Marcin ANHOLCER
Katedra Badań Operacyjnych
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

ZBIEŻNOŚĆ METODY WYRÓWNAŃ DLA NIELINIOWYCH ZADAŃ ALOKACJI

Wstęp

Metoda wyrównań jest naturalnym uogólnieniem metod wyrównywania kosztów krańcowych i wyrównywania dochodów krańcowych dla kwadratowych zadań alokacji (patrz np. [1], [3], [7], [8]).

Różnymi wersjami tych zadań zajmowali się też między innymi autorzy prac [4], [5] i [6]. Na uwagę zasługuje przede wszystkim praca [5], mająca charakter przeglądowy i prezentująca różne typy algorytmów rozwiązywania nieliniowych zadań alokacji.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie dowodu zbieżności metody wyrównań, który – według wiedzy autora – nie został dotychczas przeprowadzony.

W pierwszym punkcie zaprezentowane zostały modele, odpowiadające rozpatrywanym zadaniom, w drugim przedstawiono zwięźle obie wersje metody wyrównań. Trzeci punkt poświęcony jest podstawowym pojęciom teorii algorytmów, a ostatni, czwarty zawiera dowód odpowiedniego twierdzenia o zbieżności.

1. Sformułowanie nieliniowych zadań alokacji

1.1. Zagadnienie transportowo-produkcyjne bez ograniczeń mocy produkcyjnych

W modelu występuje m dostawców i n odbiorców (zakładów produkcyjnych), u których dokonuje się przerobu dostarczanego towaru. Transportowany i przetwarzany jest towar jednorodny i doskonale podzielny.

Dane są ograniczenia podażowe, jednostkowe koszty transportu oraz funkcje kosztów przerobu dostarczanego surowca w poszczególnych zakładach. Przyjmuje się, że podaż dostawców musi być w pełni wykorzystana, a moce przerobowe zakładów są nieograniczone. Celem jest minimalizacja łącznych kosztów transportu i produkcji.

Oznaczmy przez c_{ij} jednostkowe koszty transportu od dostawcy i do zakładu j, przez x_{ij} wielkość przewozu od dostawcy i do zakładu j, przez a_i podaż dostawcy i. Przez x_j oznaczać będziemy wielkość przerobu w zakładzie j, a przez $f(x_j)$ – funkcję kosztów przerobu w zakładzie j. Model matematyczny będzie wówczas miał następującą postać (por. [1], [3], [7], [8]):

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

przy

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Zakładamy, że funkcje f_j, $j = 1, \ldots, n$ są wypukłe. Zagadnienie (1) oznaczać będziemy przez TP1W.

1.2. Zagadnienie pośrednika bez ograniczeń popytowych

Pośrednik ma możliwość zakupu towaru u m dostawców i sprzedaży go n odbiorcom. Dane są jednostkowe koszty transportu, podaż dostawców, funkcje kosztów zakupu u poszczególnych dostawców i przychodów ze sprzedaży u poszczególnych odbiorców. Popyt odbiorców jest nieograniczony, a pośrednik jest zainteresowany maksymalizacją swojego zysku.

Oznaczmy przez c_{ij} jednostkowe koszty transportu od dostawcy i do odbiorcy j, przez x_{ij} wielkość przewozu od dostawcy i do odbiorcy j, przez a_i podaż dostawcy i. Niech x_i oznacza wielkość zakupu u dostawcy i, $f_i(x_i)$ funkcję kosztów zakupu u dostawcy i, y_j wielkość sprzedaży odbiorcy j, a $g_j(y_j)$ – funkcję przychodu ze sprzedaży u odbiorcy j. Model matematyczny będzie wówczas miał następującą postać (por. [1], [7], [8]):

$$\max \sum_{j=1}^{n} g_j(y_j) - \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

przy

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$x_i \leqslant a_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = y_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Zakładamy, że wszystkie funkcje f_i, $i = 1, \ldots, m$, są wypukłe, a g_j, $j = 1, \ldots, n$, są wklęsłe. Zagadnienie (2) oznaczać będziemy przez NP1W.

2. Metoda wyrównań

2.1. Metoda wyrównań dla zadań typu TP1W

W przypadku zadań typu TP1W zadanie dualne ma postać:

$$\max \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \left(a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right) v_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_{ij}$$

przy

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_{ij}} - u_{ij} - v_i = -c_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$u_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Warunki KKT dla tego zadania są więc następujące:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i,\ i=1,\ldots,m,$$

$$x_{ij}\geqslant 0,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n,$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_{ij}}-u_{ij}-v_i=-c_{ij},\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n, \tag{4}$$

$$u_{ij}x_{ij}=0,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n.$$

$$u_{ij}\geqslant 0,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n.$$

Wyznaczając z równań wartości zmiennych u_i, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, i wykorzystując warunki komplementarności, możemy przeformułować je do poniższej postaci:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i,\ i=1,\ldots,m,$$

$$x_{ij}\geqslant 0,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n.$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_{ij}}+c_{ij}=v_i,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n,\ x_{ij}>0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_{ij}}+c_{ij}\geqslant v_i,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n,\ x_{ij}=0.$$

Na tej podstawie możemy sformułować algorytm następująco:

1. Wyznacz początkowe wartości pochodnych cząstkowych funkcji celu względem poszczególnych zmiennych zgodnie ze wzorem:

$$k_{ij}^{(0)}=\frac{\partial f_j(\mathbf{0})}{\partial x_{ij}}+c_{ij},\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n. \tag{6}$$

Przyjmij $k:=0$. Obierz współczynnik dokładności rozwiązania $\varepsilon>0$. Wyznacz rozwiązanie wyjściowe zgodnie z zasadą:

$$x_{ij}^{(0)}=\begin{cases} a_i,\ k_{ij}^{(0)}=\min\limits_{h=1,\ldots,n}\{k_{ih}^{(0)}\}, & \\ 0,\ \text{w przeciwnym przypadku.} & i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n, \end{cases} \tag{7}$$

W sytuacji niejednoznacznej wybieramy przy tym najniższy indeks j o podanej własności.

2. Zmodyfikuj pochodne cząstkowe funkcji celu:

$$k_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f_j(x^{(k)})}{\partial x_{ij}} + c_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

3. Wyznacz wartości przybliżone zmiennych dualnych[1] v_i na podstawie wzoru:

$$v_i^{(k)} = \min_{j=1,\ldots,n} \{k_{ij}^{(k)}\}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

4. Wyznacz wskaźniki optymalności w_i na podstawie wzoru:

$$w_i^{(k)} = \max_{\substack{j=1,\ldots,n \\ x_{ij}^{(k)} > 0}} \{k_{ij}^{(k)}\} - v_i^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

5. Jeżeli $\left(\sum_{i=1}^{m} (w_i^{(k)})^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$, to STOP. Otrzymane rozwiązanie leży wystarczająco blisko zbioru rozwiązań zadowalających Ω (znajduje się wystarczająco blisko punktu KKT).

6. Wybierz indeks wiersza i^*, dla którego zachodzi:

$$w_{i^*}^{(k)} = \max_{i=1,\ldots,m} \{w_i^{(k)}\}. \tag{11}$$

W sytuacji niejednoznacznej wybierz dowolny indeks o podanej własności.

7. Wybierz indeksy kolumn j^* i j^{**} zgodnie z zasadami:

$$k_{i^*j^*}^{(k)} = \max_{\substack{j=1,\ldots,n \\ x_{i^*j}^{(k)} > 0}} \{k_{i^*j}^{(k)}\}, \tag{12}$$

$$k_{i^*j^{**}}^{(k)} = \min_{j=1,\ldots,n} \{k_{i^*j}^{(k)}\}. \tag{13}$$

W sytuacji niejednoznacznej wybierz dowolne indeksy o podanej własności.

---

[1] Użyte sformułowanie należy rozumieć tak, że wartości obliczone według podanych wzorów są zbieżne do wartości zmiennych dualnych w punkcie KKT.

8. Niech $\lambda_{\max}^{(k)} = x_{i^*j^*}^{(k)}$. Znajdź wartość $\lambda_{\text{opt}}^{(k)}$, będącą rozwiązaniem zadania przeszukiwania liniowego:

$$\begin{aligned} &\min f(x^{(k)} + \lambda d^{(k)}) \\ &\text{przy} \\ &\lambda \in \langle 0, \lambda_{\max}^{(k)} \rangle, \end{aligned} \tag{14}$$

gdzie wektor poprawy rozwiązania $d^{(k)} \in E_{m \times n}$ ma tylko dwie niezerowe współrzędne:

$d_{i^*j^*}^{(k)} = -1$ oraz $d_{i^*j^{**}}^{(k)} = 1$.

9. Podstaw $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_{\text{opt}}^{(k)} d^{(k)}$, $k := k+1$ i wróć do kroku 2.

2.2. Metoda wyrównań dla zadań typu NP1W

Zadanie dualne do zadania typu NP1W można zapisać następująco:

$$\min \sum_{j=1}^{n} g_j(y_j) - \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \left(a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right) v_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_{ij}$$

przy

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g_j}{\partial x_{ij}} - \frac{\partial f_j}{\partial x_{ij}} + u_{ij} - v_i = c_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n, \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = y_j, \quad j = 1, ,,, , n, \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ &u_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n, \\ &v_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{15}$$

Warunki KKT dla tego zadania przyjmują więc postać:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i=1,\ldots,m,$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,n,$$

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_{ij}} - \frac{\partial f_j}{\partial x_{ij}} + u_{ij} - v_i = c_{ij}, \quad i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,n,$$

$$u_{ij} \geqslant 0, \quad i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,n, \tag{16}$$

$$v_i \geqslant 0, \quad i=1,\ldots,m,$$

$$x_{ij} u_{ij} = 0, \quad i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,n,$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i \right) v_i = 0, \quad i=1,\ldots,m.$$

Po odpowiednim przeformułowaniu możemy je zapisać następująco:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i=1,\ldots,m,$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,n,$$

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_{ij}} - \frac{\partial f_j}{\partial x_{ij}} - c_{ij} = v_i, \quad i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,n, \quad x_{ij} > 0,$$

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_{ij}} - \frac{\partial f_j}{\partial x_{ij}} - c_{ij} \leqslant v_i, \quad i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,n, \quad x_{ij} = 0, \tag{17}$$

$$v_i = 0, \quad i=1,\ldots,m, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i,$$

$$v_i \geqslant 0, \quad i=1,\ldots,m, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i.$$

Biorąc pod uwagę powyższe ustalenia, metodę wyrównań dla zadań typu NP1W można zapisać w postaci:

1. Wprowadź dodatkowe zmienne $x_{i,n+1} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$.

2. Wyznacz początkowe wartości pochodnych cząstkowych funkcji celu względem poszczególnych zmiennych zgodnie ze wzorem:

$$k_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \dfrac{\partial g_j(\mathbf{0})}{\partial x_{ij}} - \dfrac{\partial f_i(\mathbf{0})}{\partial x_{ij}} - c_{ij}, & i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n, \\ 0, & i = 1, \ldots, m,\ j = n+1. \end{cases} \tag{18}$$

Przyjmij $k := 0$. Obierz współczynnik dokładności rozwiązania $\varepsilon > 0$. Wyznacz rozwiązanie wyjściowe zgodnie z zasadą:

$$x_{ij}^{(0)} = \begin{cases} a_i, & k_{ij}^{(0)} = \min\limits_{h = 1, \ldots, n+1} \{k_{ih}^{(0)}\}, \\ 0, \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n+1, \tag{19}$$

W sytuacji niejednoznacznej wybieramy przy tym najniższy indeks j o podanej własności.

3. Zmodyfikuj pochodne cząstkowe funkcji celu:

$$k_{ij}^{(k)} = \frac{\partial g_j(x^{(k)})}{\partial x_{ij}} - \frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_{ij}} + c_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

(dla $j = n+1$ pochodne pozostają niezmienione).

4. Wyznacz wartości przybliżone zmiennych dualnych[2] v_i na podstawie wzoru:

$$v_i^{(k)} = \max_{j = 1, \ldots, n+1} \{k_{ij}^{(k)}\}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{21}$$

5. Wyznacz wskaźniki optymalności w_i na podstawie wzoru:

$$w_i^{(k)} = v_i^{(k)} - \min_{\substack{j = 1, \ldots, n+1 \\ x_{ij}^{(k)} > 0}} \{k_{ij}^{(k)}\}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{22}$$

---

[2] Użyte sformułowanie należy rozumieć tak, że wartości obliczone według podanych wzorów są zbieżne do wartości zmiennych dualnych w punkcie KKT.

6. Jeżeli $\left(\sum_{i=1}^{m}(w_i^{(k)})^2\right)^{1/2} < \varepsilon$, to STOP. Otrzymane rozwiązanie leży wystarczająco blisko zbioru rozwiązań zadowalających Ω (znajduje się wystarczająco blisko punktu KKT).
7. Wybierz indeks wiersza i^* dla którego zachodzi:

$$w_{i^*}^{(k)} = \max_{i=1,\ldots,m} \{w_i^{(k)}\}. \tag{23}$$

W sytuacji niejednoznacznej wybierz dowolny indeks o podanej własności.

8. Wybierz indeksy kolumn j^* i j^{**} zgodnie z zasadami:

$$k_{i^*j^*}^{(k)} = \min_{\substack{j=1,\ldots,n+1 \\ x_{i^*j}^{(k)}>0}} \{k_{i^*j}^{(k)}\}, \tag{24}$$

$$k_{i^*j^{**}}^{(k)} = \max_{j=1,\ldots,n} \{k_{i^*j}^{(k)}\}. \tag{25}$$

W sytuacji niejednoznacznej wybierz dowolne indeksy o podanej własności.

9. Niech $\lambda_{\max}^{(k)} = x_{i^*j^{**}}^{(k)}$. Znajdź wartość $\lambda_{\text{opt}}^{(k)}$, będącą rozwiązaniem zadania przeszukiwania liniowego:

$$\max f(x^{(k)} + \lambda d^{(k)})$$

przy (26)

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\max}^{(k)},$$

gdzie wektor poprawy rozwiązania $d^{(k)} \in E_{m\times n}$ ma tylko dwie niezerowe współrzędne:
$d_{i^*j^*}^{(k)} = -1$ oraz $d_{i^*j^{**}}^{(k)} = 1$.

10. Podstaw $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_{\text{opt}}^{(k)} d^{(k)}$, $k := k+1$ i wróć do kroku 3.

3. Algorytmy i ich zbieżność

Pojęcie algorytmu

Przez algorytm rozumieć będziemy proces iteracyjny, który generuje ciąg punktów zgodnie z ustalonymi regułami wraz z odpowiednim kryterium zatrzymania.

Definicja 1. Odwzorowanie algorytmiczne, algorytm, warunek stopu i iteracja. Przez odwzorowanie algorytmiczne rozumiemy odwzorowanie punktu $x^{(k)} \in X$ w zbiór $A(x^{(k)}) \subset X$. Przy założeniu, że dany jest punkt początkowy $x^{(1)} \in X$, wykonywanie algorytmu polega na sekwencyjnym wyborze punktu $x^{(k+1)} \in A(x^{(k)})$, aż do momentu spełnienia z góry zadanego kryterium (warunku stopu). Taki jednorazowy wybór określamy jako k-tą iterację algorytmu.

Definicja 2. Zbiór rozwiązań zadowalających.
Niech dany będzie problem

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{przy} \\ &x \in S. \end{aligned} \tag{27}$$

Zbiorem rozwiązań zadowalających nazywamy zbiór $\Omega \subset S$ taki, że jeżeli kolejny element ciągu wygenerowanego przez algorytm należy do tego zbioru, to algorytm kończy swoje działanie.

Definicja 3. Odwzorowanie domknięte.
Niech $X \subset E_p$ i $Y \subset E_q$ będą niepuste i domknięte. Załóżmy, że dane jest odwzorowanie algorytmiczne $A : X \to Y$. Odwzorowanie A nazywamy odwzorowaniem domkniętym w punkcie $x \in X$, jeżeli z warunków: $x^{(k)} \in X$, $x^{(k)} \to x$, $y^{(k)} \in A(x^{(k)})$, $y^{(k)} \to y$, wynika, że $y \in A(x)$. Odwzorowanie A jest domknięte na zbiorze $Z \subset X$, gdy jest domknięte w każdym punkcie zbioru Z.

Twierdzenie 1. Twierdzenie o zbieżności.
Niech $X \subset E_n$ będzie niepusty i domknięty oraz niech $\Omega \subset X$ będzie zbiorem rozwiązań zadowalających. Niech dane będzie odwzorowanie algorytmiczne $A : X \to X$. Załóżmy, że $x^{(1)} \in X$, a kolejne punkty ciągu są generowane zgodnie z zasadą:
„Jeżeli $x^{(k)} \in \Omega$, to stop. W przeciwnym razie wybierz $x^{(k+1)} \in A(x^{(k)})$, $k := k+1$ i powtórz"
Załóżmy, że ciąg $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ zawarty jest w zwartym podzbiorze zbioru X oraz istnieje ciągła funkcja α o tej własności, że $\alpha(y) < \alpha(x)$, $x \notin \Omega$, $y \in A(x)$. Jeżeli odwzorowanie A jest domknięte na dopełnieniu zbioru Ω, to albo algorytm osiągnie po skończonej liczbie kroków pewien punkt $x^* \in \Omega$, albo generować będzie nieskończony ciąg $\{x^{(k)}\}$, którego wszystkie punkty skupienia należą do Ω oraz $\alpha(x^{(k)}) \to \alpha(x^*)$ dla pewnego $x^* \in \Omega$. W szczególności jeżeli zbiór Ω jest jednoelementowy, algorytm osiągnie go po skończonej liczbie kroków albo wygeneruje zbieżny ciąg punktów z granicą w Ω.

Dowód twierdzenia można znaleźć w pracy [2].

Definicja 4. Odwzorowanie złożone.
Niech $X \subset E_n$, $Y \subset E_p$ i $Z \subset E_q$ będą niepuste i domknięte. Niech dane będą odwzorowania algorytmiczne $B: X \to Y$ i $C: Y \to Z$. Odwzorowaniem złożonym $A = CB$ nazywamy odwzorowanie $A: Y \to Z$ zdefiniowane następująco:

$$A(x) = \bigcup_{y \in B(x)} C(y). \tag{28}$$

Twierdzenie 2. Domkniętość odwzorowania złożonego.
Niech $X \subset E_n$, $Y \subset E_p$ oraz $Z \subset E_q$ będą niepuste i domknięte. Niech dane będą odwzorowania algorytmiczne $B: X \to Y$ oraz $C: Y \to Z$. Rozważmy odwzorowanie złożone $A = CB$. Załóżmy, że B jest domknięte w punkcie $x \in X$, a C jest domknięte na zbiorze $B(x)$. Niech $\{x^{(k)}\} \subset X$ i $\{y^{(k)}\} \subset Y$ będą ciągami takimi, że jeżeli $x^{(k)} \to x$ i $\forall k: y^{(k)} \in B(x^{(k)})$, to istnieje zbieżny podciąg ciągu $\{y^{(k)}\}$. Wtedy odwzorowanie A jest domknięte w punkcie x.

Dowód znajduje się w pracy [2].

Wniosek 1. Domkniętość odwzorowania złożonego.
Niech $X \subset E_n$, $Y \subset E_p$ oraz $Z \subset E_q$ będą niepuste i domknięte. Niech dane będą odwzorowania algorytmiczne $B: Y \to$ oraz $C: Y \to Z$. Rozważmy odwzorowanie złożone $A = CB$. Załóżmy, że B jest domknięte w punkcie $x \in X$, a C jest domknięte na zbiorze $B(x)$. Jeżeli zbiór Y jest zwarty, to odwzorowanie A jest domknięte w punkcie x.

Teza wynika wprost z ostatniego twierdzenia.

4. Zbieżność metody wyrównań

Poniżej udowodnione zostanie twierdzenie o zbieżności metody wyrównań dla zadań typu TP1W przy założeniu, że gradient funkcji celu spełnia warunek Lipschitza. Warunek ten nie ogranicza istotnie liczby funkcji celu, które możemy rozpatrywać, z drugiej zaś strony jego niespełnienie nie musi automatycznie oznaczać, że algorytm jest rozbieżny. Dowód dla zadań typu NP1W jest analogiczny, zostanie więc pominięty.

Niech A oznacza odwzorowanie algorytmiczne, odpowiadające metodzie wyrównań. Niech B oznacza odwzorowanie odpowiadające wyznaczeniu kierunku poprawy rozwiązania (a więc indeksów zmiennych, które będą w danej iteracji zwiększane i zmniejszane). Niech C oznacza odwzorowanie,

odpowiadające wyznaczeniu kolejnego rozwiązania przy danym kierunku poprawy rozwiązania (równoważnie można przyjąć, że C wyznacza optymalną długość kroku). Przez X oznaczmy zbiór rozwiązań dopuszczalnych zadania, a przez D zbiór dopuszczalnych kierunków poprawy.

Lemat 1. Zbiór D jest zbiorem zwartym.

Dowód. D jest zbiorem złożonym z wszystkich wektorów o mn elementach, których wszystkie elementy poza dwoma są równe zero, a dwa pozostałe równe są 1 i -1. Jest on więc skończonym (a więc domkniętym i ograniczonym) podzbiorem przestrzeni euklidesowej E_{mn} (dokładniej, składa się z $2\binom{mn}{2}$ punktów tej przestrzeni). Wynika stąd, że jest zbiorem zwartym.

Lemat 2. Zbiór X jest zbiorem zwartym.

Dowód. X ze względu na charakter warunków ograniczających (równania i/lub nieostre nierówności) zbiór X jest domknięty. Ponadto dla każdego dopuszczalnego rozwiązania x spełniony jest warunek:

$$\|x\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \right)^{1/2}.$$

X jest więc zbiorem ograniczonym. Z tego, że jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej E_{mn} wynika więc, że jest zbiorem zwartym.

Lemat 3. Jeżeli gradient funkcji celu zadania spełnia warunek Lipschitza na zbiorze X, to $B: X \to D$ w metodzie wyrównań dla zadań typu TP1W *jest odwzorowaniem domkniętym na zbiorze X.*

Dowód. Jak wynika z lematów 1 i 2, zbiory D i X są domknięte. Ponadto wiemy, że $B: X \to D$ jest odwzorowaniem typu punkt–zbiór. Pozostaje wykazać, że warunki: $x^{(k)} \in X$, $x^{(k)} \to x$, $d^{(k)} \in B(x^{(k)})$, $d^{(k)} \to d$ implikują, że $d \in B(x)$.

Ze względu na skończoność zbioru D, od pewnego k warunki $d^{(k)} \in B(x^{(k)})$ i $d^{(k)} \to d$ równoważne są warunkowi $d \in B(x^{(k)})$ (wynika to bezpośrednio z faktu, że dla prawie wszystkich k musi być spełniona równość $d_k = d$).

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $k_{0,1}$ oznacza indeks, od którego począwszy wszystkie wyrazy ciągu $\{d^{(k)}\}$ są równe d. Ze względu na zbieżność ciągu $\{x^{(k)}\}$, istnieje taka wartość indeksu $k_{0,2}$, że dla $k > k_{0,2}$ spełniona jest nierówność: $\|x^{(k)} - x\| < \varepsilon$. Niech $k_0 = \max\{k_{0,1}; k_{0,2}\}$. Wówczas dla $k > k_0$ mamy:

$$|x_{ij}^{(k)} - x_{ij}| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{29}$$

Z tego, że gradient funkcji spełnia warunek Lipschitza, wynika, że dla pewnej stałej L:

$$|k_{ij}^{(k)} - k_{ij}| < L\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

Stąd wynika zaś kolejno, że:

$$|w_i^{(k)} - w_i| < 2L\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{31}$$

$$\left| \min_{i=1,\ldots,m} \{w_i^{(k)}\} - \min_{i=1,\ldots,m} \{w_i\} \right| < 4L\varepsilon. \tag{32}$$

Dla wystarczająco małego ε gwarantuje to wybór indeksu i^* z tego samego zbioru co w przypadku wyboru dla rozwiązania x.

Przy ustalonym i^*, korzystając z warunku Lipschitza, otrzymujemy następujące dwie nierówności:

$$\left| \max_{\substack{j=1,\ldots,n \\ x_{i^*j}^{(k)} > 0}} \{k_{i^*j}^{(k)}\} - \max_{\substack{j=1,\ldots,n \\ x_{i^*j}^{(k)} > 0}} \{k_{i^*j}\} \right| < L\varepsilon \tag{33}$$

oraz

$$\left| \min_{j=1,\ldots,n} \{k_{i^*j}^{(k)}\} - \min_{j=1,\ldots,n} \{k_{i^*j}\} \right| < L\varepsilon. \tag{34}$$

Przy odpowiednio małym ε gwarantuje to wybór indeksów j^* i j^{**} z tego samego zbioru, co w przypadku wyboru dla rozwiązania x.

Ponieważ wybór indeksów i^*, j^* i j^{**} jest równoważny wyborowi kierunku poprawy rozwiązania, otrzymujemy ostatecznie, że $d \in B(x)$. Wynika stąd, że odwzorowanie B jest domknięte.

Lemat 4. *$C: D \to X$ w metodzie wyrównań dla zadań typu* TP1W *jest odwzorowaniem domkniętym na zbiorze D.*

Dowód. Jak wynika z lematów 1 i 2, zbiory D i X są domknięte. Ponadto wiemy, że $C: D \to X$ jest odwzorowaniem typu punkt–punkt (a więc tym bardziej punkt–zbiór). Pozostaje wykazać, że warunki: $d^{(k)} \in D$, $d^{(k)} \to d$, $x^{(k)} = C(d^{(k)})$, $x^{(k)} \to x$ implikują, że $x = C(d)$.

Podobnie jak w dowodzie lematu 3 zauważamy, że dla prawie wszystkich k spełniona jest równość $d_k = d$. Wynika stąd, że dla prawie wszystkich k (powiedzmy, większych od pewnego k_0), spełniona jest równość $x^{(k)} = C(d)$.

Z tego wynika, że prawie wszystkie elementy ciągu $\{x^{(k)}\}$ równe są $C(d)$. To zaś łącznie ze zbieżnością ciągu do punktu x implikuje, że $x = C(d)$. Wynika stąd, że odwzorowanie C jest domknięte.

Lemat 5. Jeżeli gradient funkcji celu zadania spełnia warunek Lipschitza na zbiorze X, to $A: X \to X$ jest odwzorowaniem domkniętym na zbiorze X.

Dowód. W dowodzie lematu skorzystamy z wniosku 1 i uprzednio udowodnionych lematów.

Odwzorowanie $A: X \to X$ można zapisać w postaci: $A = CB$, gdzie $B: X \to D$ i $C: D \to X$ są odwzorowaniami domkniętymi odpowiednio na zbiorach X i D. Wiemy ponadto, że zbiór D jest zwarty. Założenia wniosku 1 są spełnione, więc A jest odwzorowaniem domkniętym.

TWIERDZENIE 3. Zbieżność metody wyrównań dla zadań typu TP1W.
Jeżeli gradient funkcji celu zadania spełnia warunek Lipschitza na zbiorze X, to $A: X \to X$ w metodzie wyrównań dla zadań typu TP1W *jest odwzorowaniem zbieżnym, to znaczy albo algorytm zatrzyma się po skończonej liczbie kroków, albo wszystkie punkty skupienia generowanego przez niego ciągu rozwiązań należą do zbioru rozwiązań optymalnych*

$$\Omega = \left\{ x : \left(\sum_{i=1}^{m} w_i^2 \right)^{1/2} = 0 \right\}.$$

Dowód przeprowadzony zostanie na podstawie twierdzenia 1 i części powyższych lematów.

Zbiór rozwiązań

$$\Omega = \left\{ x : \left(\sum_{i=1}^{m} w_i^2 \right)^{1/2} = 0 \right\}.$$

jest zbiorem niepustym i domkniętym, w całości zawartym w zbiorze X. Wynika stąd w szczególności, że A jest odwzorowaniem domkniętym na domknięciu zbioru Ω. Wiemy ponadto, że ciąg rozwiązań generowanych przez algorytm $\{x^{(k)}\}$ zawiera się w zbiorze X, który jest zbiorem zwartym. Zdefiniujmy funkcję α jako funkcję celu zadania:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j).$$

W każdym kolejnym kroku wartość funkcji celu maleje. Z powyższych faktów wynika, że spełnione są założenia twierdzenia o zbieżności, a więc algorytm

wyrównań jest zbieżny dla zadań typu TP1W z funkcjami celu, których gradienty spełniają warunek Lipschitza.

Twierdzenie 4. Zbieżność metody wyrównań dla zadań typu NP1W.
Jeżeli gradient funkcji celu zadania spełnia warunek Lipschitza na zbiorze X, to $A: X \to X$ *w metodzie wyrównań dla zadań typu* NP1W *jest odwzorowaniem zbieżnym, to znaczy albo algorytm zatrzyma się po skończonej liczbie kroków, albo wszystkie punkty skupienia generowanego przez niego ciągu rozwiązań należą do zbioru rozwiązań optymalnych*

$$\Omega = \left\{ x : \left(\sum_{i=1}^{m} w_i^2 \right)^{1/2} = 0 \right\}.$$

Dowody odpowiednich lematów i samego twierdzenia przebiegają analogicznie jak dowody przeprowadzone powyżej, zostaną więc pominięte.

Literatura

[1] M. Anholcer, *Zastosowanie algorytmów ogólnych i specjalnych do rozwiązywania zadań dystrybucji z kwadratowymi funkcjami celu* (praca magisterska, AE w Poznaniu), Poznań 2000

[2] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali, C.M. Shetty, *Nonlinear Programing. Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons Inc., New York – Chichester – Brisbane – Toronto – Singapore 1993

[3] W. Borucki, E. Ignasiak, J. Marcinkowski, W. Sikora, *Badania operacyjne*, PWE, Warszawa 1996

[4] L. Cooper, L. LeBlanc, *Stochastic Transportation Problems and Other Network Related Convex Problems*, Naval Research Logistics Quarterly 24, 1977, 2

[5] K. Holmberg, *Efficient Decomposition and Linearization Methds for the Stochastic Transportation Problem*, Computational Optimization and Applications 4, 1995

[6] K. Holmberg, K.O. Jörnsten, *Cross Decomposition Applied to the Stochastic Transportation Problem*, European Journal of Operational Research 17, 1984

[7] W. Sikora, *Sterowanie oprocentowaniem wkładów i kredytów bankowych*, w: E. Ignasiak (red.), *Badania operacyjne w zarządzaniu firmami i przedsięwzięciami*, Poznań 1998

[8] W. Sikora, H. Runka, D. Pyrzyński, *Optymalizacja przepływów w sferze dystrybucji dóbr jednorodnych*, Projekt badawczy H\12\209\90-2, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań 1991

THE CONVERGENCE OF EQUALIZATION METHOD FOR NONLINEAR ALLOCATION PROBLEMS

Summary

In the article the author presents the convergence proof of the equalization method for nonlinear transportation – production problems.