Jacek Mizerka
Bogusław Guzik

EKSPERYMENTALNE BADANIE PROCEDURY EKONOMETRYCZNEGO SZACOWANIA MACIERZY LEONTIEFA

1. Wstęp

Konstruowanie krajowych bilansów przepływów międzygałęziowych regularnie w krótkich okresach czasu (np. odstępach rocznych) jest praktycznie trudne do zrealizowania ze względu na dużą pracochłonność, brak wyczerpujących danych statystycznych oraz wysokie koszty. Potrzeby praktyki planistycznej, różnorodnych badań itp. zmuszają jednak do opracowywania takich tablic również dla momentów, dla których brak kompletnych danych źródłowych, pozwalających zbudować macierz nakładów - wyników. Trzeba wówczas w ten czy inny sposób macierz taką oszacować. W takim wypadku pojawia się pytanie o „jakość" (adekwatność, „dobroć") danej metody szacowania macierzy nakładów A.

Nie sposób podać uniwersalnego zestawu warunków adekwatności dla wszystkich metod czasowania macierzy A. Wydaje się jednak, że można sformułować dwa zasadnicze postulaty, których spełnienie pozwalałoby uznać pewną metodę za „dobrą" czy też dopuszczalną metodę szacowania macierzy A.

Przyjmijmy, że należy oszacować macierz A^D dotyczącą pewnego okresu czasu D. W szczególności przedział D może być jednopunktowy, co oznaczałoby, że mamy oszacować macierz nakładów dla pewnej daty (np. roku).

Oznaczmy symbolem $\hat{A}^D$, $\hat{A}^D = [\hat{a}^D_{ij}]$ i, j=1,...,N oszacowanie macierzy $A^D = [a^D_{ij}]$. Odpowiednio niech $L^D = [l^D_{ij}]$ oznacza macierz Leontiefa, $L^D = I - A^D$, a $\hat{L}^D = [\hat{l}^D_{ij}]$ niech oznacza oszacowanie macierzy Leontiefa. Przez $X_t = [X_{it}]$ oznaczymy wektor produktów globalnych poszczególnych działów gospodarki w roku t, a przez $y_t = [y_{it}]$ oznaczymy

wektor produktów końcowych tych działów w roku t. W całym artykule zakładamy, że produkcje globalne, produkcje końcowe, przepływy mierzone są wartościowo.

Postulaty są następujące:

P.1. Macierz $\hat{A}^D$ będąca oszacowaniem macierzy A^D powinna spełniać warunki analogiczne do warunków narzucanych na macierz A w „normalnej" gospodarce, a więc

(1) $\hat{a}^D_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$ $\quad i,j=1,\ldots, N;$

(2) $0 \leqslant \sum_{i=1}^{N} \hat{a}^D_{ij} \leqslant 1$ $\quad j=1,\ldots,N;$

(3) $X_t > \hat{A}^D X_t$ $\quad t \in D^1.$

Odpowiednikami tych postulatów dla oszacowania macierzy Leontiefa są:

(4) $\hat{l}^D_{ij} \in \langle -1, 0 \rangle$ $\quad i=j, \; i,j=1,\ldots,N;$

$\hat{l}^D_{ii} \in \langle 0, 1 \rangle$ $\quad i=1,\ldots,N;$

(5) $1 \geqslant \sum_{i=1}^{N} \hat{l}^D_{ij} \geqslant 0$ $\quad j=1,\ldots,N;$

(6) $\hat{L}^D X_t > 0$ $\quad t \in D.$

P.2. Odbiegnięcia macierzy $\hat{A}^D$ (lub macierzy $\hat{L}^D$) uzyskanych za pomocą danej metody od „prawdziwych" macierzy A^D (lub L^D) są niewielkie.

Sformułowanie postulatu P.2. jest sformułowaniem ogólnikowym o ile nie ustali się, jakie odchylenia uznaje się za małe, a jakie za duże oraz o ile nie ustali się miernika odbiegnięcia macierzy $\hat{A}^D$ (lub macierzy $\hat{L}^D$) od macierzy A^D (lub macierzy L^D). Mówiąc o „małych" odbiegnięciach generalnie mamy na myśli to, że określcny miernik niedokładności oszacowania A^D (lub L^D) przez $\hat{A}^D$ (lub $\hat{L}^D$) przyjmuje dostatecznie małe wartości[2].

W literaturze spotkać można wiele propozycji szacowania macierzy A^D (lub macierzy L^D). Do bardziej znanych należy np. metoda RAS, czy też metoda sprowadzająca się do prognozowania poszczególnych współczynników macierzy A^D (lub macierzy L^D) na podstawie trendów odpowiednich współczynników w już znanych macierzach A (lub L).

---

[1] Warunki te oznaczają: (1) - nakład produktów działu -i-tego na produkcję globalną działu j-ego jest nieujemny i nie przekracza produkcji globalnej działu j-ego; (2) - nakłady ponoszone na produkcję globalną działu j-ego są nieujemne i nie przekraczają produkcji globalnej tego działu; (3) - macierz A jest produktywna, co znaczy, że gospodarka produkuje więcej niż zużywa na cele reprodukcji prostej.

[2] Mierniki te mogą być wzięte ze statystyki opisowej, bądź (o ile uczyni się odpowiednie założenia stochastyczne) ze statystyki matematycznej.

W artykule zajmiemy się eksperymentalnym sprawdzeniem własności pewnego podejścia do szacowania macierzy Leontiefa, które zaproponował Oskar Starzeński m.in. w pracach [3], [4], [5], [6]. W propozycji tej wykorzystuje się powszechnie dostępne informacje o wartościach produktów końcowych oraz produktów globalnych i konstruuje się modele ekonometryczne dla wielkości produkcji końcowej względem wielkoście produkcji globalnych poszczególnych działów gospodarki. Współczynniki regresji tych modeli traktuje się jako oszacowania odpowiednich elementów macierzy Leontiefa.

Podejście O. Starzeńskiego było już analizowane w pracy [1]. Między innymi na podstawie fikcyjnych przykładów, charakteryzujących się dużymi zmianami produktów końcowych oraz produktów globalnych, stwierdzono, że podejście to nie dostarcza dobrych oszacowań macierzy Leontiefa. Ponieważ w praktyce nie obserwuje się zazwyczaj raptownych zmian produkcji końcowych i produkcji globalnych dlatego postanowiliśmy sprawdzić własności podejścia O. Starzeńskiego na autentycznym materiale statystycznym opisującym przepływy międzygałęziowe gospodarki polskiej w latach 1958-1980.

2. Szacowanie macierzy Leontiefa za pomocą modelu ekonometrycznego

Przedstawimy ideę propozycji O. Starzeńskiego, a następnie przedstawimy pewną własną modyfikację tego podejścia, użytą w referowanym tu eksperymencie obliczeniowym.

Niech jak poprzednio y_{it} oznacza produkcję końcową działu i-tego w roku t, a X_{it} niech oznacza produkcję globalną działu i-tego w roku t. Ponadto niech $y_t = [y_{it}]$ oraz $X_t = [X_{it}]$, $i=1,\ldots,N$.

Nie używając sformułowań stochastycznych (w takiej właśnie wersji przedstawiono problem w pracach [3], [4], [5], [6]), propozycję O. Starzeńskiego scharakteryzować można następująco.

Rozważa się układ przybliżonych równań liniowych

$$(7) \qquad y_{it} \hat{=} \sum_{j=1}^{N} b_{ij} X_{jt} \qquad i=1,\ldots,N; \quad t \in D,$$

których współczynniki wyznaczane są za pomocą procedur ekonometrycznych na podstawie informacji statystycznej $\{y_{it}, X_{it}\}$ $i=1,\ldots,N$; $t \in D$. Równania układu (7) przy ustalonym indeksie i są więc modelem ekonometrycznym opisującym kształtowania się produkcji końcowej działu i-tego w okresie D, w zależności od produkcji globalnych poszczególnych działów w okresie D.

Macierz $B = [b_{ij}]$ $i,j=1,\ldots,N$ proponuje się przyjąć za oszacowanie macierzy Leontiefa L^D związanej z okresem D.

Zauważmy, że równania (7) - pomijając to, że są one równaniami przybliżonymi - mają formę podobną do równań leontiefowskich

$$(8) \qquad y_{it} = \sum_{j=1}^{N} l_{ij}^{t} X_{jt} \qquad i=1,\ldots,N; \quad t \in D$$

gdzie l_{ij}^t są współczynnikami macierzy Leontiefa L^t związanej z czasem t. Zauważmy też, że jeśli rozpatrujemy macierz L^D i w okresie D nie zachodziły istotne zmiany w technologii, to można przypuścić, że dość dobre będą przybliżenia:

$$y_{it} \hat{=} \sum_{j=1}^{N} l_{ij}^D X_{jt} \qquad i=1,\ldots,N; \quad t \in D. \tag{9}$$

Jak można przypuścić, zewnętrzne podobieństwo (7) do (8) oraz (9) tkwi u podstaw propozycji O. Starzeńskiego, by za oszacowanie macierzy L^D wziąć macierz B, a za oszacowanie współczynnika l_{ij}^D wziąć współczynnik regresji b_{ij}.

W cytowanych pracach O. Starzeńskiego podano różne sformułowania zadania wyznaczenia macierzy $B = [b_{ij}]$ i,j=1,...,N. Intencję podstawowego sformułowania[3] można oddać następująco:

Na podstawie informacji statystycznej $\{y_{it}, X_{it}\}$ (i=1,...,N; $t \in D$) znaleźć wektory $b_i' = (b_{ij})$ j=1,...,N takie, że

$$\sum_{t \in D} (y_{it} - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} X_{jt})^2 \longrightarrow \min, \tag{10}$$

$$b_{ii} \leqslant 1, \quad b_{ij} \leqslant 0 \qquad (j \neq 1,\ldots,N; \quad j=1), \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{N} b_{ij} X_{jt} > 0 \qquad i=1,\ldots,N. \tag{12}$$

Procedura ta sprowadza się więc do wyznaczenia z osobna poszczególnych wierszy b_i' macierzy B klasyczną metodą najmniejszych kwadratów przy warunkach ubocznych (11), (12). Stosowanie tej procedury wymaga oczywiście by liczba obserwacji (tutaj: liczebność zbioru D) była większa od liczby działów N.

Warunki (11), (12) nie wyczerpują jednak zestawu postulatów jakie należy stawiać w odniesieniu do macierzy szacującej macierz Leontiefa L^D (o postulatach tych mówiliśmy we wstępie). Dlatego też dalej używać będziemy zmodyfikowanej wersji procedury podstawowej.

Zauważmy przede wszystkim, że ze względu na postulat (5), który odnosi się do kolumn macierzy szacującej oraz ze względu na postulat (6), który z kolei odnosi się do wierszy macierzy szacującej, zadanie wyznaczania macierzy B trzeba stawiać jako zadanie jednoczesnego wyznaczenia całej macierzy B[4].

---

[3] Sformułowania te różnią się propozycjami procedur estymacji macierzy B.

[4] Dodajmy, że w jednym z sformułowań O. Starzeński proponuje jednoczesną estymację macierzy B. Wynika to jednak z przyjęcia założeń uogólnionej regresji liniowej dla całego modelu wielorównaniowego, a nie z przyjęcia takich warunków pobocznych.

Zauważmy przy okazji, że warunek produktywności (6) niewystarcza na to, by spełniony był warunek (5). Na przykład jeśli $\hat{L} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.001 \\ -0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \end{bmatrix}$, to dostajemy $\hat{L}X = \begin{bmatrix} 4.2 \\ 23.0 \end{bmatrix}$, co oznacza, że macierz jest produktywna. Jednakże $\hat{l}_{11} + \hat{l}_{21} < 0$.

Proponowane sformułowanie zapisać można w następujący sposób:

Na podstawie informacji statystycznej $\{y_{it}, X_{it}\}$ $i=1,\ldots,N$; $t \in D$ znaleźć macierz $B = [b_{ij}]$ $i,j=1,\ldots,N$ taką, że

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{N} w_i \sum_{t\in D} (y_{it} - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} X_{jt})^2 \longrightarrow \min,$$

$$(14) \qquad b_{ij} \in \langle -1, 0 \rangle \quad i \neq j;$$

$$b_{ii} \in \langle 0, 1 \rangle \quad i,j=1,\ldots,N;$$

$$(15) \qquad 1 \geqslant \sum_{i=1}^{N} b_{ij} \geqslant 0 \quad j=1,\ldots,N;$$

$$(16) \qquad \sum_{j=1}^{N} b_{ij} X_{jt} > 0 \quad i=1,\ldots,N; \quad t \in D,$$

gdzie w_i jest wagą sumy kwadratów reszty $\sum_{t\in D}(y_{it} - \sum_{j=1}^{N} b_{ij}X_{jt})^2$, tzn. jest wagą sumy kwadratów reszt modelu dla produkcji końcowej i-tego działu.

Sugerujemy użycie takich wag, które pozwalają unikać majoryzowania rozwiązania przez odchylenia $e_{it} = y_{it} - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} X_{jt}$ dla działów, w których y_{it} jest duża co do skali w porównaniu z produkcjami końcowymi innych działów (jeśli y_{it} jest duże, to reszty e_{it} choć nawet relatywnie niewielkie, mogą być duże co do skali). Dalej przyjmować będziemy, że

$$(17) \qquad w_i = 1 \Big/ \sum_{t\in D} (y_{it} - \bar{y}_i)^2$$

gdzie $\bar{y}_i$ jest średnią arytmetyczną wartości y_{it}, $t \in D$. Wówczas funkcja kryterium (13) ma postać:

$$(13)' \qquad \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^2 \longrightarrow \min \quad \text{lub} \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^2 \longrightarrow \min$$

gdzie φ_i^2 jest współczynnikiem zbieżności modelu dla produkcji końcowej działu i-tego[5].

3. Realizacja eksperymentu obliczeniowego

Celem artykułu jest, jak już wspomniano, empiryczne sprawdzenie własności procedury (13)-(16) jako procedury szacowania macierzy Leontiefa L^D. W eksperymencie postanowiono::

1° sprawdzić podobieństwo macierzy B do macierzy L^d,

2° sprawdzić podobieństwo macierzy B do macierzy L^t, $t \in D$,

---

5

$$\varphi_i^2 = \sum_{t\in D} (y_{it} - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} X_{jt})^2 \Big/ \sum_{t\in D} (y_{it} - \bar{y}_i)^2.$$

3° zbadać reakcję współczynników b_{ij} na agregację i dezagregację działów,
4° zbadać zmiany współczynników w przypadku usuwania pewnych działów.

Elementy l^D_{ij} macierzy L^D oraz elementy l^t_{ij} macierzy L^t zdefiniowane są wzorami:

$$l^D_{ij} = x^D_{ij} / X^D_j, \qquad l^t_{ij} = x^t_{ij} / X^t_j \tag{18}$$

gdzie x^D_{ij}, x^t_{ij} są przepływami z działu i do działu j odpowiednio - w okresie D, w roku $t \in D$, natomiast X^D_j, X^t_j są wielkością produkcji globalnej działu j-ego odpowiednio - w okresie D, w roku $t \in D$. Naturalnie $x^D_{ij} = \sum_{t \in D} x^t_{ij}$, $x^D_j = \sum_{t \in D} X^t_j$. Wartości l^D_{ij}, l^t_{ij} $(i,j=1,\ldots,N)$ liczono na podstawie obserwacji przepływów oraz produkcji globalnych zawartych w wykorzystanym w naszym eksperymencie materiale statystycznym.

A. Dane statystyczne

Wykorzystano dane statystyczne zawarte w opracowanych przez GUS bilansach przepływów międzygałęziowych z lat 1958, 1959, 1960, 1961, 1962, 1967, 1969, 1971, 1972, 1973, 1975, 1977, 1980. Bilanse te zamieszczone są w Rocznikach Statystycznych GUS oraz w specjalnych opracowaniach dotyczących bilansów przepływów międzygałęziowych z lat 1962, 1967 wydanych także przez GUS.

W eksperymencie rozpatrywano pięć działów gospodarki narodowej: PRZEMYSŁ, BUDOWNICTWO, ROLNICTWO, LEŚNICTWO, TRANSPORT I ŁĄCZNOŚĆ. Nie uwzględniono natomiast HANDLU ze względu na to, że w pewnych bilansach wartości przepływów z tego działu do innych były ujemne, co byłoby sprzeczne z formalnymi warunkami narzucanymi na macierz współczynników nakładów[6].

Na przestrzeni lat 1957-1980 występowały pewne zmiany klasyfikacyjne w obrębie badanych działów gospodarki narodowej, jednakże na ogół były one niewielkie i odbywały się w ramach działów. Generalnie wydaje się, że zmiany te nie przekreślają możliwości wykorzystania zebranego materiału statystycznego dla sprawdzenia własności rozważanej metody szacowania macierzy Leontiefa.

Wszystkie dane w cytowanych bilansach ujmowane są w cenach bieżących uzyskiwanych przez producentów[7].

---

[6] Nazwa „handel" występuje w bilansach 1971, 1972, 1973, 1975, 1977, 1980. W bilansach 1957, 1958, 1959, 1960 używa się nazwy „obrót ekonomiczny", a w bilansach 1961, 1962, 1967, 1969 używa się nazwy „obrót towarowy".

[7] Warto dodać, że publikowane przez GUS bilanse przepływów z wielu powodów nie odpowiadają klasycznemu schematowi Leontiefa, np. wiersze bilansów odpowiadają grupom produktów, a kolumny działom (gałęziom). Współczynnikiem macierzy nakładów jest wtedy x_{ij}/X_j gdzie x_{ij} jest przepływem „produktów" działu i-tego do działu j-ego (a nie przepływem z działu i-tego do działu j-ego). To co nazywa się produkcją końcową jest produkcją końcową „produktów" działu i-tego. Takie też definicje współczynników nakładów i takie rozumienie produkcji końcowej przyjmowano w przedstawianym tu eksperymencie. Terminologia klasycznego schematu leontiefowskiego jest wygodniejsza i dlatego jej używamy.

B. Systemy działów gospodarki

W celu zbadania „jakości" oszacowań macierzy Leontiefa dla różnych układów działów gospodarki, a także po to, by stwierdzić reakcję elementów macierzy B na agregację i dezagregację, na wprowadzanie oraz wyprowadzanie pewnych działów z układu, utworzono różne kombinacje działów. Każdą kombinację liczby i nazw działów określimy mianem systemu.

Ogółem rozpatrzono 76 systemów. Podstawowym systemem jest układ 5 podanych wyżej działów gospodarki (przemysł, budownictwo, rolnictwo, leśnictwo, transport i łączność). Pozostałe systemy (są one 2,3,4 działowe) są przekształceniami systemu podstawowego. Uzyskiwano je poprzez przenoszenie odpowiedniej liczby działów systemu podstawowego (tak utworzone systemy nazywać będziemy systemami bez agregatów) oraz przez agregowanie działów systemu podstawowego[8].

C. Wyznaczanie macierzy B

Zadania (13) - (16) rozwiązywano za pomocą opracowanego przez autorów programu obliczeniowego w języku FORTRAN. Konieczność opracowania własnego programu spowodowana została brakiem w bibliotece programów EMC Odra 1305 zainstalowanej w AE Poznań jakichkolwiek programów szukania minimum funkcji nieliniowych przy ograniczeniach typu (14) - (16).

Istota zastosowanego algorytmu sprowadza się do generowania wielu macierzy $P = [p_{ij}]$ $i,j=1,\ldots,N$ czyniących zadość warunkom (14) - (16)[9]. Jako macierz B przyjmowano tę spośród wygenerowanych macierzy P, dla której wyrażenie

$$(19) \qquad \sum_{i=1}^{N} w_i \sum_{t \in D} (y_{it} - \sum_{j=1}^{N} p_{ij} X_{jt})^2$$

miało wartość najmniejszą. Zastosowany algorytm jest więc algorytmem poszukiwań prostych z losowym wyborem punktów.

Obliczenia przeprowadzono poprzez powtarzanie pewnych cykli obliczeń. Na cykl o numerze c składało się:

1° losowanie 100 macierzy P z zadanego obszaru losowań O_c,

2° ustalenie trzech aktualnie najlepszych w sensie minimalizacji wyrażenia (19) macierzy P po przeprowadzeniu C cykli obliczeń,

3° sprawdzanie warunku stopu.

Zakończenie obliczeń mających na celu znalezienie macierzy B następowało gdy numer przeprowadzonego cyklu obliczeń wykroczyłby poza limit 10 cykli, bądź gdy macierz P_c najlepsza po przeprowadzeniu c cykli obliczeń była nieistotnie lepsza od macierzy P_{c-1} najlepszej po przeprowa-

---

[8] Przykładowo wśród systemów 4-działowych, pięć systemów otrzymano przez „przeniesienie" 4 działów z systemu podstawowego ($\binom{5}{4} = 5$), pozostałe zaś są systemami, w których 3 działy przeniesiono z $\binom{4}{3}$ systemu podstawowego, a jeden jest agregatem dwóch pozostających działów systemu podstawowego.

[9] Elementy macierzy P generowano przy użyciu generatora liczb pseudolosowych.

dzeniu c-1 cykli obliczeń. Uznawano, że macierz P_c jest nieistotnie lepsza od macierzy P_{c-1}, gdy średni współczynnik zbieżności $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^2$ dla P_c był o mniej niż 0.001 niższy od analogicznego współczynnika dla macierzy P_{c-1}.

Jeśli nie zachodził, żaden z warunków stopu, to

a) ustalano obszar O_{c+1} losowań macierzy P w cyklu c+1, przy czym $O_{c+1} \subset O_c$,

b) trzy najlepsze macierze po przeprowadzeniu c cykli obliczeń przyjmowano jako już wylosowane z obszaru O_{c+1},

c) rozpoczynano nowy cykl obliczeń.

Obszar O_{c+1} ustalono w prosty sposób, mianowicie za przedział, z którego losuje (i,j)-y element macierzy P przyjęto przedział $[d_{ij}^c, g_{ij}^c]$, gdzie d_{ij}^c jest najmniejszym, a g_{ij}^c jest największym ze współczynników p_{ij} dla trzech najlepszych macierzy P po przeprowadzeniu c cykli obliczeń. Dla pierwszego cyklu przyjmowano $d_{ij}^o = -1$, $g_{ij}^o = 0$ jeśli $i \neq j$ oraz $d_{ii}^o = 0$, $g_{ii}^o = 1$.

Program obliczeniowy dodatkowo wyznaczał macierz B bez warunków pobocznych (14)-(16), macierz L^D oraz L^t i charakterystyki pośrednie służące dalej do oceny podobieństwa macierzy B do macierzy L^D oraz podobieństwa macierzy B do macierzy L^t, $t \in D$[10].

4. Wyniki eksperymentu

Dla scharakteryzowania odbiegnięć macierzy B od macierzy L^D oraz od macierzy L^t, $t \in D$ oraz dla scharakteryzowania wpływu agregacji i usuwania (włączania) pewnych działów wykorzystano metody statystyki opisowej. Nie stosowano natomiast narzędzi statystyki matematycznej, gdyż wymagałoby to przyjęcia koncepcji, że produkcje końcowe, globalne, przepływy są losowe.

1° Odbiegnięcia macierzy B od L^D

Tego rodzaju odbiegnięcia mogą być scharakteryzowane np. przez moduły różnic

$$m_{ij} = \left| b_{ij} - l_{ij}^D \right| \qquad i,j=1,\ldots,N \tag{20}$$

bądź np. przez względne moduły różnic

$$z_{ij} = m_{ij} \Big/ \left| l_{ij}^D \right| \qquad i,j=1,\ldots,N;\ l_{ij}^D \neq 0. \tag{21}$$

Ogrom materiału liczbowego nie pozwala na zamieszczanie tych wartości. Ograniczymy się przeto do przedstawienia pewnych syntetycznych charakterystyk tych odbiegnięć dla grup systemów. Podamy: średnie arytmetyczne modułów różnic, odchylenia standardowe modułów śróżnic, średnie arytmetyczne względnych modułów różnic, frakcje modułów różnic nie przekraczających 0.1 tzn. częstości tego, że $|b_{ij}|$ odchyla się od $|l_{ij}^D|$ o mniej jak 0.1. Przykładowo średnia arytmetyczna modułów różnic dla danej grupy systemów obliczania jest ze wzoru:

[10] Program liczył ok. 1000 instrukcji.

(22) $$m = \frac{1}{N_G} \sum_{k \in G} \sum_{j=1}^{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} m_{ijk}$$

gdzie m_{ijk} jest modułem różnicy między b_{ij} a l^D_{ij} dla k-tego systemu z G-tej grupy, N_k jest liczbą działów w k-tym systemie, $N_G = \sum_{k \in G} N_k^2$.

Średnie arytmetyczne modułów różnic, odchylenia standardowe modułów różnic, średnie arytmetyczne względnych modułów różnic oraz frakcje modułów różnic nie przekraczających 0.1 podano w tabeli 1.

Tabela 1

Syntetyczne charakterystyki odbiegnięć macierzy B od macierzy L^D dla grup systemów

Grupy systemów	liczba systemów	średniay modułów różnic	odch. stand. modułów różnic	średnia względn. modułów różnic	frakcja modułów różnic niewiększych od 0.1
5-działowy	1	.122	.176	30.69	.640
4-działowe	15	.158	.183	6.88	.546
a) bez agregatu	5	.152	.190	14.38	.563
b) z 1 agregatem	10	.160	.179	3.12	.538
3-działowe	35	.168	.172	14.26	.451
a) bez agregatu	10	.201	.199	27.07	.411
b) z 1 agregatem	10	.177	.172	10.45	.433
c) z 2 agregatami	15	.144	.147	8.26	.489
2-działowe	25	.120	.179	15.04	.683
a) bez agregatu	10	.193	.216	32.25	.550
b) z 1 agregatem	5	.069	.079	.11	.700
c) z 2 agregatami	10	.044	.047	.12	.875
OGÓŁEM	76	.156	.178	12.37	.526

Jak widać odbiegnięcia elementów macierzy B od odpowiednich elementów macierzy L^D są na ogół znaczne. Średnie arytmetyczne modułów różnic na ogół przekraczają 0.1, bezwzględne wartości elementów macierzy B są często kilkunastokrotnie, a niekiedy kilkudziesięciokrotnie większe (mniejsze) od bezwzględnych wartości odpowiadających im elementów macierzy L^D. Ponadto tylko dla około połowy elementów macierzy L^D moduły różnic między nimi a odpowiednimi elementami macierzy B są mniejsze od 0.1. Oznacza to, że szacowanie macierzy Leontiefa L^D za pomocą macierzy B jest postępowaniem wysoce wątpliwym.

Zauważmy, że w ramach poszczególnych grup systemów „dobroć" oszacowań L^D przez B na ogół zwiększa się w miarę wzrostu liczby agregatów. Może to sugerować pewną modyfikację procedury O. Starzeńskiego, polegającą na tym, że najpierw rozważa się system bardzo zagregowany, a następnie poddaje się ów system kolejnym dezagregacjom.

2° Odbiegnięcia macierzy B od macierzy L^t, $t \in D$

Poprzednio stwierdziliśmy, że wartości b_{ij} szacujące odpowiednie elementy macierzy L^D odbiegają niekiedy dość znacznie od l^D_{ij}. Z możliwością odbiegnięć (ale nie nazbyt dużych) trzeba się pogodzić. Metoda estymacji macierzy L^D nie powinna jednak dostarczać takiego oszacowania tej macierzy, które wskazuje odmienną strukturę powiązań działowych, niż to obserwowano w przedziale D, z którego brano dane statystyczne do estymacji macierzy L^D. Przyjmiemy zatem, że macierz B jest zadawalającym oszacowaniem macierzy L^D jeśli każdy element b_{ij} macierzy B wpada do przedziału zmienności (i,j)-ych elementów macierzy L^t, $t \in D$. Sens tego postulatu można wyjaśnić następująco. Wartość l^D_{ij} jest średnią (ważoną) wartości l^t_{ij}, $t \in D$, a zatem l^D_{ij} należy do przedziału $\langle \min_{t\in D} l^t_{ij}, \max_{t\in D} l^t_{ij} \rangle$. Metoda estymacji macierzy L^D taka, że oszacowania l^D_{ij} wypadają poza takie przedziały będzie wątpliwa gdyż sugerowałaby odmienną strukturę powiązań międzydziałowych niż struktura obserwowana w przedziale D.

W tabeli 2 podano frakcje elementów b_{ij} macierzy B należących do odpowiednich przedziałów $\langle \min_{t\in D} l^t_{ij}, \max_{t\in D} l^t_{ij} \rangle$.

T a b e l a 2

Frakcje elementów macierzy B należących do przedziałów $\left[\min_{t\in D} l^t_{ij}, \max_{t\in D} l^t_{ij} \right]$

Grupy systemów	Frakcja
5-działowy	·160
4-działowe	·192
a) bez agregatu	·250
b) z 1 agregatem	·163
3-działowe	·232
a) bez agregatu	·198
b) z 1 agregatem	·211
c) z 2 agregatami	·289
2-działowe	·548
a) bez agregatu	·160
b) z 1 agregatem	·700
c) z 2 agregatami	·775
OGÓŁEM	·261

Widzimy, że za wyjątkiem systemów 2-działowych z 1 i 2 agregatami, częstość wpadania elementów macierzy B do przedziałów zmienności odpowiednich elementów macierzy L^t, $t \in D$ jest niewielka i na ogół nie przekracza 30%. Trudno zatem traktować współczynniki b_{ij} jako dopuszczalne oszacowania odpowiednich elementów maciezzy Leontiefa L^D.

3° Badanie skutków wyprowadzania działów z układu oraz wpływu agregacji działów

Jak wiadomo elementy macierzy Leontiefa obliczane są wg wzoru

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ij} & \text{dla } i=j \\ - a_{ij} & \text{dla } i \neq j; \quad i,j=1,\ldots,N \end{cases} \tag{23}$$

gdzie

$$a_{ij} = x_{ij}/X_j \tag{24}$$

x_{ij} jest przepływem z działu i do działu j, X_j jest produkcją globalną działu j-ego.

Jeśli więc przekształcamy pewien system agregując wybrane działy bądź wyprowadzając je z układu, ale pewne działy „starego" systemu przechodzą bez zmian do „nowego" systemu, to wartości l_{ij} charakteryzujące powiązania działów „przenoszonych" bez zmian ze starego do nowego systemu nie ulegają zmianie. Nie zmieniają się bowiem odpowiednie x_{ij} oraz X_j.

Analogiczna własność powinna też mieć miejsce dla macierzy oceniającej macierz Leontiefa.

Dla sprawdzenia, czy ów postulat jest spełniony przez macierz B zbadamy jak zachowuje się współczynnik b_{11} szacujący zużycie wewnętrzne w dziale PRZEMYSŁ.

Skutki wyprowadzania pewnych działów z układu

W tabeli 3 przedstawiono różnice v_{11} między elementami b^s_{11} a b^n_{11}, gdzie b^s_{11}, b^n_{11} oznaczają oszacowania elementu macierzy Leontiefa odpo-

T a b e l a 3

Różnice v_{11} w przypadku usuwania działów z układu

System „nowy"	b^n_{11}	v_{11}
PRZ BUD ROL LES	.4095	.0179
PRZ BUD ROL TRA	.3901	.0364
PRZ BUD LES TRA	.0986	.3279
PRZ ROL LES TRA	.5360	-.1095
PRZ BUD ROL	.4372	-.0107
PRZ BUD LES	.1094	.3171
PRZ BUD TRA	.1086	.3179
PRZ ROL LES	.4341	.0076
PRZ ROL TRA	.4419	-.0154
PRZ LES TRA	.1058	.3207
PRZ BUD	.5093	-.0828
PRZ ROL	.5641	-.1376
PRZ LES	.0115	.4150
PRZ TRA	.0015	.4249

system „stary" b^s_{11} = .4265

PRZ - przemysł
ROL - rolnictwo
BUD - budownictwo
LES - leśnictwo
TRA - transport i łączność

wiadającego przepływowi „z przemysłu do przemysłu", przy czym s oznacza system „stary", natomiast n oznacza system „nowy". Jako system stary przyjęto system podstawowy (5 działowy: PRZEMYSŁ, BUDOWNICTWO, ROLNICTWO, LEŚNICTWO, TRANSPORT I ŁĄCZNOŚĆ). Systemami nowymi są natomiast systemy zawierające dział PRZEMYSŁ i co najwyżej trzy pozostałe działy gospodarki.

Skutki agregacji działów

Analogicznie jak w przypadku badania skutków usuwania pewnych działów z układu zbadano wpływ agregacji działów na kształtowanie się ocen współczynnika l_{11}^{D}. Systemem „starym" jest nadal system podstawowy, nowe systemy natomiast tworzono jako agregaty kolejno dwóch, trzech i czterech działów, za wyjątkiem działu Przemysł.

Różnice v_{11} między ocenami b_{11}^{s} a b_{11}^{n} podano w tabeli 4

Tabela 4

Różnice v_{11} w przypadku agregacji działów

System „nowy"	b_{11}^{n}	v_{11}
PRZ BUD ROL LES+TRA	.3994	.0270
PRZ ROL LES BUD+TRA	.5355	-.1090
PRZ BUD LES ROL+TRA	.1150	.3115
PRZ ROL TRA BUD+LES	.4569	-.0305
PRZ BUD TRA ROL+LES	.1042	.3223
PRZ LES TRA BUD+ROL	.2237	.2028
PRZ BUD ROL+LES+TRA	.4517	-.0252
PRZ ROL BUD+LES+TRA	.4269	-.0004
PRZ LES BUD+ROL+TRA	.4542	-.0219
PRZ TRA BUD+ROL+LES	.4484	-.0219
PRZ BUD+ROL LES+TRA	.4342	-.0077
PRZ BUD+LES ROL+TRA	.4547	-.0282
PRZ BUD+TRA ROL+LES	.4500	-.0235
PRZ BUD+ROL+LES+TRA	.5177	-.0913

system „stary"
b_{11}^{s} = .4265

Omawiając wyniki przedstawione w tabelach 3, 4 stwierdzić trzeba, że różnice między „starymi" ocenami b_{11}^{s} a „nowymi" ocenami b_{11}^{n} niekiedy są bardzo duże. Gdybyśmy przyjęli, że różnica między b_{11}^{n} a b_{11}^{s} jest nieistotna, jeśli co do modułu jest ona niewiększa od 10% bezwzględnej wartości współczynnika b_{11}^{s}, to

- w przypadku usuwania działów blisko 2/3 różnic $v_{11} = b_{11}^{s} - b_{11}^{n}$ jest istotnie dużych,
- w przypadku agregacji działów 1/3 różnic - to różnice istotnie duże.

Uogólnianie otrzymanych wyników byłoby ryzykowne ze względu na małą liczbę obecnie badanych przypadków. Wyniki te sugerują jednak, że również

przy autentycznym materiale liczbowym procedura szacowania macierzy Leontiefa poprzez macierz B jest wątpliwa z uwagi na możliwość bardzo dużych zmian współczynników oceniających (niezmieniające się) współczynniki macierzy Leontiefa w przypadku agregacji działów, bądź usuwania działów z układu (redukcji układu).

5. Wnioski końcowe

Przeprowadzony eksperyment liczbowy na autentycznym materiale liczbowym dotyczącym gospodarki polskiej wykazał, że szacowanie macierzy Leontiefa za pomocą macierzy parametrów wielorównaniowego modelu liniowego wyjaśniającego kształtowanie się wielkości produkcji końcowej przez wielkości produkcji globalnych wyróżnionych działów gospodarki, może narazić nas na bardzo duże błędy szacunku. Oznacza to, że struktura powiązań międzydziałowych sugerowana przez macierz B może znacznie odbiegać od autentycznej struktury tych powiązań. Do tego dochodzą jeszcze pewne wady wynikające z „natury" regresji liniowej, a przejawiające się w sytuacji agregowania bądź usuwania pewnych działów układu.

Spróbujmy na zakończenie określić niektóre przyczyny możliwości dużych odbiegnięć macierzy B od prawdziwej macierzy Leontiefa.

1. Macierz Leontiefa z definicji jest funkcją przepływów i produkcji globalnych, bowiem $a_{ij} = x_{ij}/X_j$, a $l_{ii} = 1 - a_{ii}$, $l_{ij} = -a_{ij}$ $(i \neq j)$. Macierz B natomiast jest funkcją produkcji końcowych i produkcji globalnych. Ponieważ przy danej produkcji końcowej y_{it} i danej produkcji globalnej X_{it} i-tego działu w roku t, $t \in D$ $(i=1,\ldots,N)$ istnieje nieskończenie wiele różnych macierzy przepływów $x_t = \left[x_{ij}^t\right]$ $i,j=1,\ldots,N$ takich, że

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^t + y_{it} = X_{it}, \quad x_{ij}^t \geqslant 0 \quad (i=1,\ldots,N) \tag{25}$$

więc macierz B jako funkcja produkcji globalnych X_{it} oraz produkcji końcowych y_{it} nie jest charakterystyką tego pewnego pojedynczego układu macierzy Leontiefa $L^t = \left[l_{ij}^t\right]$ $i,j=1,\ldots,N$ $t \in D$ i nie jest oceną tylko pewnej macierzy L^D istniejącej w okresie D. Jest natomiast charakterystyką nieskończonej liczby układów $\left\{L_*^t,\ t \in D\right\}$ macierzy L_*^t takich, że mogą one być traktowana jako macierze Leontiefa oraz jest charakterystyką nieskończonej liczby macierzy L_*^D, takich że mogą one być traktowane jako macierz Leontiefa dla okresu D. Mówiąc, że macierz L_* może być traktowana jako macierz Leontiefa mamy na myśli to, że ma ona własności macierzy Leontiefa, a w szczególności że spełnia warunki analogiczne do warunku (4), (5), (6) i spełnione są równania bilansowe $L_* X = y$ gdzie X jest wektorem produkcji globalnych, zaś y jest wektorem produkcji końcowych zaobserwowanych w interesującym nas okresie (momencie) czasu.

2. Zauważmy, że jeśli konstruujemy wielorównaniowy model ekonometryczny dla produkcji końcowych względem produkcji globalnych, to mamy równanie predykcyjne dla produkcji końcowej

$$(26) \qquad y^{*}_{it} = b_{i1} X_{1t} + b_{i2} X_{2t} + \ldots + b_{iN} X_{Nt}$$

$$(i=1,\ldots,N),$$

gdzie b_{ij} są elementami macierzy B. Interpretując to równanie moglibyśmy powiedzieć, że po to by uzyskać wzrost produkcji końcowej y^{*}_{it} o jednostkę wystarczy zwiększyć tylko produkcję globalną X_{it} działu i-tego o $1/b_{ii}$ jednostek, i pozostawić produkcje globalne pozostałych działów na poprzednim poziomie. Równanie (26) otrzymuje się bowiem jako równanie regresji.

Jeśli natomiast weźmiemy równania leontiefowskie, to dla określenia zmian produkcji globalnych potrzebnych na to, by produkcja końcowa i-tego działu wzrosła o jednostkę trzeba skorzystać z równań $X = L^{-1} y$, tzn. równań

$$(27) \qquad \begin{cases} X_{1t} = r^{D}_{11} y^{*}_{1t} + r^{D}_{12} y^{*}_{2t} + \ldots + r^{D}_{1N} y^{*}_{Nt} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{Nt} = r^{D}_{N1} y^{*}_{1t} + r^{D}_{N2} y^{*}_{2t} + \ldots + r^{D}_{NN} y^{*}_{Nt} \end{cases}$$

gdzie r^{D}_{ij} są elementami macierzy odwrotnej do macierzy L^{D}. Z równań (27) wynika, że na to by uzyskać przyrost produkcji końcowej y^{*}_{it} o jednostkę trzeba, aby produkcja globalna X_{jt} każdej gałęzi wzrosła i tc wzrosła dokładnie o r^{D}_{ji}.

Opis gospodarki za pomocą modeli regresyjnych (26) jest więc odmienny od opisu za pomocą modeli leontiefowskich. Nie jest celem tego artykułu przesądzać, który opis jest lepszy. Na pewno jednak traktowanie dwóch różnych opisów powiązań w gospodarce jako opisów równoważnych nie jest uzasadnione.

To zastrzeżenie metodologiczne wzmacnia jeszcze zła „jakość" wyników jakie otrzymywaliśmy w naszym eksperymencie, opartym na autentycznym materiale statystycznym.

Literatura

[1] Guzik B. - Ekonometryczne szacowanie macierzy Leontiewa, Przegląd Statystyczny nr 3, 1977.

[2] Mizerka J. - Ekonometryczne szacowanie macierzy Leontiefa. Eksperyment empiryczny, maszynopis 1983.

[3] Starzeński O. - Ekonometryczno-predyktywne modele nakładów i wyników PWN, 1978.

[4] Starzeński O. - O predykcji w oparciu o ekonometryczny model wymiany (nakładów i wyników, Przegląd Statystyczny nr 2, 1975).

[5] Starzeński O. - O stabilności elementów macierzy Leontiefa i warunkowym ich szacowaniu, Przegląd Statystyczny nr 2, 1974.

[6] Starzeński O. - O szacowaniu elementów macierzy Leontiefa, Przegląd Statystyczny nr 4, 1972.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE PROCEDURE OF ECONOMETRIC ESTIMATION OF LEONTIEF'S MATRIX

Summary

An attempt at experimental investigation of the procedure of econometric estimation of Leontief's matrix suggested by O. Starzeński was undertaken in the paper. A set of conditions which should be satisfied by the matrix which is to be "a good" estimation of the Leontief co-efficient matrix was presented. Next, a method of econometric estimation of Leontief's matrix which is a modification of the method suggested by Starzeński, was proposed. Further on, a simulation experiment was carried out. The obtained estimation was then compared with Leontief's matrices constructed on the basis of real statistic material. The influence of aggregation (disaggregation), and eliminationoof certain sectors of the economy on the estimation of Leontief's matrix was investigated, and then evaluation of estimations was made. The experiment showed that estimating Leontief's matrix in the way suggested by O. Starzeński may involve serious errors of estimator.