Tomasz ŚWIST
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

WERYFIKACJA EKONOMETRYCZNA MODELU WYCENY AKTYWÓW KAPITAŁOWYCH DLA PORTFELA PSEUDOGEOMETRYCZNYCH RUCHÓW BROWNA

Problem badawczy

Ex re ukazania się artykułu [4] poruszającego problem modelowania ewolucji wartości kapitałowych za pomocą procesów stochastycznych kwestią otwartą pozostawała weryfikacja ekonometryczna modelu wyceny aktywów kapitałowych opisanych za pomocą pseudogeometrycznych ruchów Browna (mCAPM[1]). Opierając się na wynikach formalnych uzyskanych w [3] i [4], oraz polskim rynku akcji i bonów skarbowych przeprowadzona zostanie ekonometryczna analiza pozwalająca na ocenę porównawczą tego modelu z modelem CAPM wprowadzonym przez Sharpe'a, Lintnera i Mossina (zobacz na przykład [2], s. 351-370). Uzyskane wyniki mają stanowić wskazówkę co do kierunków ewentualnych dalszych badań modelu mCAPM.

1. Opis arytmetycznego i pseudogeometrycznego ruchu Browna

Jednym z ważniejszych modeli teoretycznych w rachunku prawdopodobieństwa jest stacjonarny ruch Browna. Pierwszy teoretyczny model procesów finansowych oparty na stacjonarnym ruchu Browna został przedstawiony przez

[1] Od ang. *modified Capital Assets Pricing Model.*

Louisa Bacheliera w 1900 roku (zobacz [5], s. 162-168). Jednakże ze względu na swe właściwości stacjonarny ruch Browna jest mało użyteczny w modelowaniu stochastycznych procesów finansowych. Dlatego też wprowadzono pewne jego uogólnienie do procesu losowego nazywanego ruchem Browna i opisanego za pomocą stochastycznego równania różniczkowego:

$$dX(t)=\mu(X(t), t)dt+\sigma(X(t), t)d\tilde{W}(t), \tag{1}$$

$$X(0)=X_0, \tag{2}$$

gdzie:

$\mu(X(t), t)$ – współczynnik przesunięcia (dryfu),
$\sigma(X(t), t)$ – współczynnik zmienności,
$\tilde{W}(t)$ – standardowy proces Wienera,
X_0 – przyjęta wartość początkowa procesu.

Zakładając, że współczynniki dryfu i zmienności są stałe:

$$\mu(X(t), t)=\mu\cdot X_0, \tag{3}$$

$$\sigma(X(t), t)=\sigma\cdot X_0>0, \tag{4}$$

otrzymujemy arytmetyczny ruch Browna, opisany za pomocą stochastycznego zagadnienia początkowego (2) i

$$dX(t)=\mu\cdot X_0 dt+\sigma\cdot X_0 d\tilde{W}(t). \tag{5}$$

W tym przypadku oczekiwana stopa zwrotu z każdego efektywnego instrumentu finansowego jest opisana za pomocą modelu CAPM przedstawionego później równaniem (9).

Zakładając, że współczynniki dryfu i zmienności są wprost proporcjonalne do oczekiwanej wartości $E(X(t))$ procesu losowego:

$$\mu(X(t), t)=\mu\cdot E(X(t)), \tag{6}$$

$$\sigma(X(t), t)=\sigma\cdot E(X(t))>0, \tag{7}$$

otrzymujemy zaproponowany w [3] pseudogeometryczny ruch Browna określony za pomocą stochastycznego zagadnienia początkowego (2) i :

$$dX(t)=\mu\cdot E(X(t))dt+\sigma\cdot E(X(t))d\tilde{W}(t). \tag{8}$$

W [4] dowiedziono, że w tym wypadku oczekiwana stopa zwrotu z każdego efektywnego instrumentu finansowego jest wyznaczona za pomocą modelu mCAPM opisanego później równaniem (11).

2. Założenia weryfikacji

Opierając się na polskim rynku kapitałowym, przeprowadzono analizę porównawczą klasycznego modelu CAPM i mCAPM. Jako podstawę tej analizy przyjęto tygodniowe stopy zwrotu zebrane w następujący sposób:

- za portfel rynkowy przyjęto portfel WIG20,
- analiza została przeprowadzona na 14 spółkach, wchodzących w skład WIG20 na dzień 28 lutego 2003 roku – z analizy zostały usunięte spółki, których notowania nie były permanentne lub które w okresie analizy weszły w fuzję (BPHPBK, BZWBK, Kęty, Budimex, PGF, Amica),
- za stopę zwrotu wolną od ryzyka przyjęto stopę rentowności 52-tygodniowych bonów skarbowych, dla których w przypadku braku notowania przyjęto rentowność za okres poprzedni,
- okres analizy obejmuje 119 okresów tygodniowych (okres od 17 listopada 2000 roku do 28 lutego 2003 roku).

Zaproponowany tutaj zestaw założeń został przyjęty jedynie dla potrzeb zaplanowanych badań, które maja charakter pilotażowy.

3. Analiza dopasowania klasycznego modelu CAPM

Zaproponowany przez Sharpe'a, Lintnera i Mossina model CAPM jest opisany zależnością:

$$E(r_i)-r_f=\beta_i(E(r_m)-r_f), \tag{9}$$

gdzie:

r_i – stopa zwrotu z instrumentu finansowego,
r_m – stopa zwrotu z portfela rynkowego,
r_f – stopa zwrotu z instrumentu wolnego od ryzyka.

Stosując metodę najmniejszych kwadratów, otrzymano wartości współczynnika β_i dla poszczególnych badanych spółek. Dla każdej badanej spółki przeprowadzono analizę dopasowania modelu. Wykorzystano tutaj

współczynnik determinacji, będący kwadratem współczynnika korelacji regresji wielorakiej (na przykład [1], s. 514-532) i opisany zależnością

$$R^2(\beta_i)=\frac{\sum_{j=1}^{n}(r_i^{(j)}-\hat{r}_i^{(j)})^2}{\sum_{j=1}^{n}(r_i^{(j)}-\bar{r}_i)^2}, \tag{10}$$

gdzie poszczególne symbole oznaczają:

$r_i^{(j)}$ – obserwowana stopa zwrotu z akcji spółki i w tygodniu j,
$\hat{r}_i^{(j)}$ – wyznaczona za pomocą modelu CAPM oczekiwana stopa zwrotu z akcji spółki i w tygodniu j,
$\bar{r}_i$ – przeciętna tygodniowa stopa zwrotu z akcji spółki i wyznaczona dla całego okresu badania.

Wartości współczynnika determinacji informują, w jakim stopniu model CAPM wyjaśnia zmienność obserwowanej stopy zwrotu badanej spółki. Zestawienie zbiorcze otrzymanych wyników zawiera poniższa tabela.

Zestawienie wyników analizy dopasowania

Spółki	β_i	$R^2(\beta_i)$ (w %)	κ_i	$R^2(\kappa_i)$ (w %)
Pekao	0,60	53,14	0,58	**54,32**
PKN Orlen	0,72	44,09	0,69	**44,69**
TP S.A.	0,47	64,33	0,46	**64,92**
KGHM	0,43	71,81	0,41	**72,52**
Prokom	0,44	68,32	0,42	**69,76**
BIG	0,28	87,34	0,29	86,96
Agora	0,52	59,34	0,52	**59,91**
BRE	0,44	71,43	0,41	**73,02**
Świecie	0,13	100,00	0,07	**100,00**
Softbank	0,32	82,55	0,27	**85,67**
Orbis	0,47	68,63	0,46	**69,18**
Compland	0,48	65,79	0,47	**66,80**
Dębica	0,39	91,67	0,41	**92,31**
Comarch	0,42	71,11	0,39	**72,75**

4. Analiza dopasowania modelu mCAPM

Zaproponowany w [4] model mCAPM jest opisany za pomocą zależności:

$$\kappa_i\left(1-\frac{1+r_f}{E(1+r_m)}\right)=1-\frac{1+r_f}{E(1+r_i)}, \tag{11}$$

gdzie poszczególnym symbolom przypisano to samo znaczenie, jakie im nadano w przypadku zależności (9).

Stosując metodę najmniejszych kwadratów, otrzymano wartości współczynnika κ_i dla poszczególnych badanych spółek. Dla każdej badanej spółki przeprowadzono analizę dopasowania modelu. Wykorzystano współczynnik determinacji określony zależnością:

$$R^2(\kappa_i)=\frac{\sum_{j=1}^{n}(r_i^{(j)}-\tilde{r}_i^{(j)})^2}{\sum_{j=1}^{n}(r_i^{(j)}-\bar{r}_i)^2}, \tag{12}$$

gdzie:

$r_i^{(j)}$ – obserwowana stopa zwrotu z akcji spółki i w tygodniu j,

$\tilde{r}_i^{(j)}$ – wyznaczona za pomocą modelu mCAPM oczekiwana stopa zwrotu z akcji spółki i w tygodniu j,

$\bar{r}_i$ – przeciętna tygodniowa stopa zwrotu z akcji spółki i wyznaczona dla całego okresu badania.

Wartości współczynnika determinacji informują, w jakim stopniu model mCAPM wyjaśnia zmienność obserwowanej stopy zwrotu badanej spółki. Zestawienie zbiorcze otrzymanych wyników zawiera powyższa tabela. Zaznaczono w niej pogrubionym drukiem te wartości $R^2(\kappa_i)$ współczynników determinacji wyznaczonych dla modelu mCAPM, które można uznać za niegorsze od wartości współczynników $R^2(\beta_i)$, wyznaczonych dla adekwatnych modeli CAPM.

Podsumowanie

Przeprowadzone badania na rynku polskim są badaniami pilotażowymi dla weryfikacji modelu mCAPM zaproponowanego w [4]. Jakość dopasowania za pomocą modelu mCAPM była w 13 na 14 przypadków niegorsza niż jakość

dopasowania przy pomocy klasycznego modelu CAPM. Zebrane wyniki pozwalają przypuszczać, że stosowanie modelu mCAPM może w większym stopniu wyjaśniać dynamikę zmienności stóp procentowych. Stanowi to przesłankę do podjęcia dalszych porównawczych badań empirycznych nad klasycznym i zmodyfikowanym modelem wyceny aktywów kapitałowych. Obszar tych badań powinien być wówczas reprezentatywny dla pełnego spektrum rynku kapitałowego. Do tej pory jako narzędzie analizy zastosowano jedynie proste kryterium aproksymacyjne, teraz konieczne już jest zastosowanie bardziej wnikliwych narzędzi analizy matematycznej i statystycznej pokazujących, który z modeli wierniej oddaje obraz rynku. Odpowiedź otrzymamy dopiero po zakończeniu takich badań. Wymagać one będą znacznych nakładów pracy. Przedstawione w niniejszym artykule wyniki należy zatem traktować jako uzasadnienie trudów podjęcia tych badań.

Opracowanie powstało pod kierunkiem prof. dra hab. Krzysztofa Piaseckiego na seminarium doktoranckim prowadzonym w Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, w Pracowni Zastosowań Matematyki w Zarządzaniu.

Literatura

[1] A.D. Aczel, *Statystyka w zarządzaniu*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000

[2] E.J. Elton, M.J. Gruber, *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa 1998

[3] K. Piasecki, *Propozycje składników portfela finansowych składników losowych*, w: E. Ignasiak (red.), *Optymalizacja decyzji, symulacja i prognozowanie procesów gospodarczych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2002

[4] K. Piasecki, *Model CAPM dla portfela pseudogeometrycznych ruchów Browna*, w: E. Panek (red.), *Matematyka w ekonomii*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2004

[5] A. Weron, R. Weron, *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1998

ECONOMETRICAL VERIFICATION CAPITAL ASSETS PRICING MODEL FOR PSEUDO-GEOMETRIC BROWNIAN MOTION PORTFOLIO

Summary

That article focuses on econometrical verification of mCAPM (modified Capital Assets Pricing Model) and compares it with the conventional CAPM by means of coefficient of determination. Executed researches are only pilot studies, notwithstanding obtained results allow to claim, that mCAPM can explain better dynamics of interest rates volatility. It is necessary to apply more discerning tools of mathematical and statistical analysis. Those studies will finally demonstrate which of models express better the view of the market.