Paweł KLIBER
Katedra Ekonomii Matematycznej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

O PEWNYM DOWODZIE ZASADNICZEGO TWIERDZENIA MATEMATYKI FINANSOWEJ W MODELU Z PRZELICZALNĄ PRZESTRZENIĄ ZDARZEŃ ELEMENTARNYCH

Wstęp

W artykule zaprezentujemy pewien oryginalny dowód zasadniczego twierdzenia matematyki finansowej[1]. Twierdzenie to ma wielkie znaczenie w nowoczesnej matematyce finansowej – przy probabilistycznym modelowaniu rynku finansowego oraz przy wycenie instrumentów pochodnych. Zasadnicze twierdzenie podaje opis modeli rynku, w których nie ma możliwości arbitrażu, czyli takich, na których inwestor nie może osiągać dowolnie dużych zysków bez ponoszenia ryzyka. W najczęściej spotykanej postaci[2] twierdzenie mówi, że na rynku nie istnieje możliwość arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pewna miara probabilistyczna, względem której zdyskontowane ceny akcji są martyngałami, czyli nie przejawiają systematycznej tendencji do ruchów w górę ani w dół. Twierdzenie ma zatem związek z teorią rynku efektywnego [6]. Mówi bowiem, że przy braku możliwości arbitrażu inwestowanie na rynku można rozpatrywać jako grę sprawiedliwią.

[1] Ang. *First Fundamental Theorem of Financial Mathematics*. Zobacz np. [19].

[2] W artykule twierdzenie sformułujemy w nieco ogólniejszej postaci, posługując się pojęciami jądra wyceny i *numéraire*. Pójdziemy zatem drogą sugerowaną w [8].

Twierdzenie ma także istotne znaczenie dla wyceny instrumentów pochodnych. Wynika bowiem z niego, że cenę instrumentu pochodnego można wyrazić jako wartość oczekiwaną jego wypłat, liczoną względem pewnej miary probabilistycznej. Zasada ta pozwala w pewnych wypadkach wyznaczać wzory na ceny instrumentów pochodnych, na przykład takie jak wzór Blacka-Scholesa, opisujący cenę opcji na akcję ([20], rozdz. 6).

Na zasadę, która kryje się za zasadniczym twierdzeniem, pierwsi zwrócili uwagę J. C. Cox i S. A. Ross w artykule [3]. Pierwsze sformułowanie i dowód twierdzenia (dla modeli ze skończoną przestrzenią zdarzeń elementarnych) pojawiło się jednak dopiero w artykule [7]. Na dowód twierdzenia w przypadku ogólnym trzeba było czekać ponad dziesięć lat. Pierwszy taki dowód podali R. C. Daland, A. Morton i W. Willinger w artykule [4]. Inne dowody można znaleźć w artykułach [9], [15] oraz [17].

Dla modeli ze skończoną przestrzenią zdarzeń elementarnych dowód zasadniczego twierdzenia jest dość prosty i sprowadza się do zastosowania pewnych twierdzeń o rozdzielaniu zbiorów wypukłych w przestrzeniach skończenie wymiarowych. Dowód w wersji ogólnej wymaga zastosowania bardziej subtelnych środków[3]. W artykule wykażemy, że jeżeli przestrzeń zdarzeń elementarnych jest przeliczalna, to dowód można przeprowadzić podobnie jak w modelu ze skończoną przestrzenią zdarzeń elementarnych, tzn. wykorzystując twierdzenia o oddzielaniu.

W artykule przypomnimy niezbędne pojęcia stosowane w matematyce finansowej, sformułujemy model rynku papierów wartościowych, zdefiniujemy pojęcia arbitrażu, modelu bezarbitrażowego, jądra wymiany i równoważnej miary martyngałowej, sformułujemy i udowodnimy zasadnicze zwierdzenie.

1. Model rynku

Rozważamy model rynku papierów wartościowych z czasem dyskretnym i skończonym. Na rynku można handlować tylko w określonych momentach. Horyzontem czasu jest zbiór momentów, w których można dokonywać transakcji na rynku. Oznaczamy go przez $\mathbf{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$, gdzie $T < +\infty$. Model rynku opisany jest na pewnej przestrzeni probabilistycznej. Mamy dany zbiór zdarzeń elementarnych Ω, pewną σ-algebrę jego podzbiorów $\mathcal{F}$ oraz miarę probabilistyczną $\mathbf{P}: \mathcal{F} \to [0, 1]$.

[3] Na przykład miar Esshera, jak w przypadku dowodów podanych w [9] i [15].

Kolejnym elementem modelu jest filtracja **F**. Jest to rosnący (w sensie inkluzji, tj. $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}$) ciąg σ-algebr

$$\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_T\},$$

gdzie $\mathcal{F}_t$ opisuje informację dostępną dla inwestora[4] w chwili t. Możemy przyjąć, że $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. W przeciwnym wypadku możemy bowiem zastąpić σ-algebrę $\mathcal{F}$ ostatnim elementem filtracji $\mathcal{F}_T$.

Na rynku handluje się d różnymi papierami wartościowymi. Cenę i-tego papieru wartościowego w chwili t oznaczamy przez S_t^i. Ceny wszystkich papierów wartościowych w chwili t opisuje wektor $S_t = (S_t^1, S_t^2, \ldots, S_t^d)$. Ceny papierów wartościowych tworzą wektorowy, d-wymiarowy proces stochastyczny $S: \Omega \times \mathbf{T} \to \mathbf{R}^d$. Zakładamy, że proces S jest adaptowany[5] do filtracji **F**.

Papiery wartościowe, którymi handluje się na rynku, będziemy nazywać umownie akcjami, choć mogą to być także inne papiery wartościowe (obligacje, kontrakty terminowe itp.). Dla dalszych wywodów istotne jest to, że inwestor może posiadać zarówno dodatnie, jak i ujemne ilości opisanych papierów wartościowych. Możliwa jest zatem ich krótka sprzedaż. Dla aktywów takich jak towary na giełdach towarowych nie zawsze jest to możliwe. W takim wypadku zależność opisywana przez zasadnicze twierdzenie nie zachodzi (zob. [12] lub [14], rozdz. 4).

Ceny wszystkich akcji są zawsze nieujemne. Akcję, której cena przyjmuje zawsze (w każdym momencie i w każdej możliwej sytuacji na rynku) wartości dodatnie, nazywamy *numéraire*. Przyjmujemy konwencję, że jeśli *numéraire* istnieje, to jest nim akcja o numerze 1, S^1. Procesy stochastyczne $\tilde{S}^i$, gdzie

$$\tilde{S}_t^i \equiv \frac{S_t^i}{S_t^1}, \qquad i = 1, \ldots, d, \; t = 0, \ldots, T,$$

nazywamy procesami *zdyskontowanych* cen akcji. Zdyskontowane ceny wszystkich akcji opisuje proces wektorowy $\tilde{S}$, gdzie $\tilde{S}_t = (1, \tilde{S}_t^2, \tilde{S}_t^3, \ldots, \tilde{S}_t^d)$. Jest to proces adaptowany do filtracji **F**.

---

[4] Na temat modeli rynków finansowych zobacz: [5], [14], rozdz. 3, [19] lub [20], rozdz. 5. Informacje na temat przestrzeni probabilistycznych z filtracją można znaleźć w [10] i [18].

[5] Proces S jest *adaptowany* do filitracji **F**, gdy zmienna losowa S_t jest $\mathcal{F}_t$-mierzalna dla każdego $t \in \mathbf{T}$.

Najczęściej przyjmuje się, że w modelu istnieje papier wartościowy o dodatnich cenach. Zazwyczaj jako *numéraire* bierze się *proces konta* bankowego lub cenę obligacji wolnej od ryzyka. W tym artykule rozważamy także przypadki, w których taki papier wartościowy nie istnieje. W związku z tym musimy przyjąć następujące założenie:

Założenie 1 (istnienie rynku). Nie istnieje taki moment $t \in \mathbf{T}$ i taki zbiór $A \in \mathcal{F}$, gdzie $\mathbf{P}(A) > 0$, że $S_t = 0$ na zbiorze A.

Założenie mówi, że każdej chwili i w każdym możliwym stanie rynku cena co najmniej jednego papieru wartościowego jest dodatnia.

2. Strategie inwestycyjne i arbitraż

Inwestor może kupować lub sprzedawać dowolną liczbę akcji. Przyjmujemy zatem założenie, że akcje są nieskończenie podzielne i nie ma żadnych ograniczeń na krótką sprzedaż. Przez θ_t^i oznaczmy liczbę i-tej akcji, jaką inwestor posiadał na końcu okresu t. Cały portfel inwestora na końcu okresu t opisuje wektor $\theta_t = (\theta_t^1, \theta_t^2, \ldots, \theta_t^d)$. *Strategią inwestycyjną* nazywamy dowolny, prognozowalny[6], d-wymiarowy proces stochastyczny $\theta : \Omega \times \{1, 2, \ldots, T\} \to \mathbf{R}^d$.

Wartość strategii θ w chwili t wynosi

$$V_t(\theta) = \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i S_t^i = \theta_t \cdot S_t, \tag{1}$$

gdzie kropką oznaczamy iloczyn skalarny dwóch wektorów. *Zyskiem* strategii inwestycyjnej θ do chwili t nazywamy wartość wyrażenia

$$G_t(\theta) = \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=1}^{d} \theta_s^i \Delta S_s^i = \sum_{s=1}^{t} \theta_s \cdot \Delta S_s, \tag{2}$$

gdzie $\Delta S_s^i = S_s^i - S_{s-1}^i$ jest przyrostem ceny i-tej akcji w chwili s, a ΔS_s jest wektorem przyrostów cen akcji w chwili s: $\Delta S_s = (\Delta S_s^1, \ldots, \Delta S_s^d)$.

Interesują nas tylko strategie, do których inwestor nie dokłada ani nie wycofuje pieniędzy w innych momentach niż $t = 0$ i $t = T$. W każdym innym

[6] Proces stochastyczny θ nazywamy *prognozowalnym*, jeśli dla każdego $t > 0$ zmienna losowa θ_t jest $\mathcal{F}_{t-1}$-mierzalna, czyli wartość procesu dla momentu t znana jest już w chwili $t - 1$.

momencie t wartość portfela kupowanego przez inwestora w chwili t powinna być równa wartości portfela, który inwestor przetrzymał od chwili $t-1$. Oznacza to, że w każdym momencie $t \in \mathbf{T}$ powinien być spełniony warunek

$$\theta_{t-1} \cdot S_t = \theta_t \cdot S_t \tag{3}$$

Strategie inwestycyjne, które spełniają warunek (3) nazywamy *samofinansującymi*. Jak łatwo sprawdzić, warunek (3) można także zapisać jako

$$\theta_t \cdot \Delta S_t = \Delta V_t(\theta), \tag{4}$$

gdzie $\Delta V_t(\theta) = V_t(\theta) - V_{t-1}(\theta)$.

Możliwością arbitrażu nazywamy strategię samofinansującą θ, która spełnia następujące warunki:

(i) $V_0(\theta) = 0$,

(ii) $V_T(\theta) \geqslant 0$ oraz $\mathbf{P}(V_T(\theta) > 0) > 0$.

Strategia, która jest możliwością arbitrażu, umożliwia osiągnięcie zysku bez inwestowania kapitału i bez narażania się na ryzyko. Taka możliwość jest oczywiście nierealistyczna. W realistycznym modelu rynku możliwość arbitrażu nie powinna zatem istnieć. Mówimy wówczas, że rynek jest *wolny od arbitrażu* lub *bezarbitrażowy*.

Mówimy, że w modelu istnieje *lokalna możliwość arbitrażu* w chwili $t > 0$, jeśli istnieje $\mathcal{F}_{t-1}$-mierzalna zmienna losowa $\psi : \Omega \to \mathbf{R}^d$ taka, że

$$\mathbf{P}(\psi \cdot S_{t-1} = 0) = 1 \tag{5}$$

oraz

$$\psi \cdot \Delta S_t \geqslant 0 \quad \text{i} \quad \mathbf{P}(\psi \cdot \Delta S_t > 0) > 0. \tag{6}$$

Miarę probabilistyczną $\mathbf{Q} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ nazywamy *równoważną miarą martyngałową*, jeśli spełnia następujące warunki:

(I) $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$, tj. $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(A) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{Q}(A) > 0$,

(II) $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{S}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1}$ oraz $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[|\tilde{S}_t|] < \infty$ dla $t = 1, \ldots, T$.

Zapis $E^{\mathbf{Q}}$ oznacza wartość oczekiwaną liczoną względem miary $\mathbf{Q}$. Warunek (II) mówi, że zdyskontowany proces cen $\tilde{S}$ jest *martyngałem* względem miary $\mathbf{Q}$. Warunek (I) oznacza, że miara $\mathbf{Q}$ jest równoważna mierze $\mathbf{P}$, czyli obie miary nadają zerowe prawdopodobieństwa tym samym zdarzeniom.

Adaptowany proces stochastyczny $H:\Omega\times\{1, 2, ..., T\}\to\mathbf{R}$ nazywamy *jądrem wyceny*, jeżeli spełnia następujące warunki:

- $\mathbf{P}(H_t>0)=1$ dla każdego $t\in\{1, 2, ..., T\}$,
- $E[H_t|\mathcal{F}_{t-1}]<\infty$ dla każdego $t\in\{1, 2, ..., T\}$,
- $E[H_tS_t|\mathcal{F}_{t-1}]=S_{t-1}$ dla każdego $t\in\{1, 2, ..., T\}$.

Jeżeli w modelu istnieje równoważna miara martyngałowa, to proces

$$H_t=\frac{S_{t-1}^1}{S_t^1}\cdot\frac{\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}}{\mathbf{E}\left[\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]}$$

jest jądrem wyceny. Jak zobaczymy w twierdzeniu 3, jeżeli w modelu istnieje jądro wyceny oraz papier wartościowy, którego ceny są zawsze dodatnie, to można w nim skonstruować równoważną miarę martyngałową.

3. Pewne zależności

Udowodnimy teraz kilka zależności, które będą nam potrzebne do dowodu zasadniczego twierdzenia.

Lemat 1. *Niech $\mathcal{F}$ będzie σ-algebrą podzbiorów przeliczalnego zbioru Ω. Istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{P}$, podzbiorów zbioru Ω, która spełnia następujące warunki*:

(i) $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{F}$,

(ii) $A_1, A_2\in\mathcal{P}\wedge A_1\neq A_2\Rightarrow A_1\cap A_2=\emptyset$,

(iii) $B\in\mathcal{F}\Rightarrow$ *istnieje podrodzina* $\mathcal{P}_1\subseteq\mathcal{P}$ *taka, że* $B=\bigcup_{A\in\mathcal{P}_1}A$.

Dowód. Będą nas interesować podzbiory σ-algebry $\mathcal{F}$ spełniające warunki (i) i (ii) lematu i takie, że suma wszystkich ich elementów wynosi Ω. Inaczej mówiąc, interesują nas podziały zbioru Ω elmentami σ-algebry $\mathcal{F}$. Takie podziały istnieją. Jednym z nich jest jednoelementowa rodzina $\{\Omega\}$. Przez $\mathbf{A}$ oznaczymy rodzinę wszystkich takich podziałów:

$$\mathbf{A}=\left\{\mathcal{A}\subseteq\mathcal{F}:\mathcal{A}\text{ spełnia warunek (ii) i }\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A=\Omega\right\}. \tag{7}$$

Wprowadźmy następujący porządek w zbiorze **A**:

$$\forall \mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathbf{A}: \ \mathcal{A} \geqslant \mathcal{B} \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}\, \exists B \in \mathcal{B}: A \subseteq B. \tag{8}$$

Jak łatwo sprawdzić, tak zdefiniowana relacja $\geqslant$ jest zwrotna, przechodnia i słabo antysymetryczna, a więc stanowi porządek w zbiorze **A**.

Rozważmy dowolny podzbiór $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ taki, że **B** jest liniowo uporządkowany przez relację $\geqslant$. Wykażemy, że istnieje element $h(\mathbf{B}) \in \mathbf{A}$ taki, że $h(\mathbf{B}) \geqslant \mathcal{B}$ dla każdego $\mathcal{B} \in \mathbf{B}$. Innymi słowy, każdy liniowo uporządkowany podzbiór zbioru **A** jest ograniczony z góry. Niech $\mathbf{C} = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathbf{B}} \mathcal{B}$. Dla dowolnego $\omega \in \Omega$ rozważmy te wszystkie elementy rodziny **C**, które zawierają ω. Jest ich tylko przeliczalnie wiele i należą do $\mathcal{F}$, a zatem także ich iloczyn jest elementem σ-algebry $\mathcal{F}$. Oznaczmy

$$h(\omega) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \in \mathbf{C} \\ \mathcal{B} \ni \omega}} \mathcal{B}. \tag{9}$$

Zbiór $h(\mathbf{B}) = \{h(\omega) : \omega \in \Omega\}$ jest szukanym ograniczeniem górnym dla **B**.

Wykazaliśmy, że w zbiorze **A** każdy podzbiór liniowo uporządkowany ma ograniczenie górne. Na podstawie lematu Zorna ([11], s. 92), w zbiorze **A** istnieje element maksymalny $\bar{\mathcal{A}}$, czyli taki, że jeśli $\mathcal{A} \geqslant \bar{\mathcal{A}}$, to $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}$. Rodzina $\bar{\mathcal{A}}$ spełnia warunki (i) i (ii), jako element **A**. Jest przeliczalna, ponieważ zbiór Ω jest przeliczalny, a każdy zbiór z $\bar{\mathcal{A}}$ zawiera co najmniej jeden element $\omega \in \Omega$. Pozostaje sprawdzić, czy $\bar{\mathcal{A}}$ spełnia warunek (iii). Weźmy dowolny $B \in \mathcal{F}$. Rodzina $\{B, \Omega \setminus B\}$ należy do **A**, a zatem $\bar{\mathcal{A}} \geqslant \{B, \Omega \setminus B\}$, czyli dla każdego $A \in \bar{\mathcal{A}}$ albo $A \subseteq B$, albo $A \cap B = \emptyset$. Wystarczy zauważyć, że

$$B = \bigcup_{\substack{A \in \bar{\mathcal{A}} \\ A \subseteq B}} A.$$

Mamy zatem $\mathcal{P} \equiv \bar{\mathcal{A}}$. ■

Rodzinę $\mathcal{P}$, o której mowa w lemacie 1, nazywamy *podziałem zbioru* Ω *związanym z* σ*-algebrą* $\mathcal{F}$. Lemat ten mówi, że σ-algebrę $\mathcal{F}$ tworzą wszystkie sumy elementów podziału $\mathcal{P}$. Zachodzi następujący związek między zawieraniem się σ-algebr a zawieraniem się związanych z nimi podziałów:

Lemat 2. *Niech* $\mathcal{F}$ *i* $\mathcal{G}$ *będą* σ*-algebrami podzbiorów przeliczalnego zbioru* Ω, *a* $\mathcal{P}$ *i* $\mathcal{Q}$ *niech będą podziałami zbioru* Ω, *związanymi odpowiednio*

z $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$. Jeśli $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, to każdy element podziału $\mathcal{Q}$ zawiera się w pewnym elemencie podziału $\mathcal{P}$:

$$\forall A \in \mathcal{Q}\ \exists B \in \mathcal{P} : A \subseteq B. \tag{10}$$

(Posługując się zapisem z dowodu lematu 1: $\mathcal{Q} \geqslant \mathcal{P}$).

Dowód. Tak jak w dowodzie lematu 1, interesują nas podrodziny σ-algebry $\mathcal{F}$, składające się z rozłącznych zbiorów, sumujących się do Ω. Oznaczmy przez $\mathbf{A}_{\mathcal{F}}$ zbiór wszystkich takich rodzin zawartych w $\mathcal{F}$, a przez $\mathbf{A}_{\mathcal{G}}$ oznaczmy zbiór wszystkich takich rodzin zawartych w $\mathcal{G}$. Zachodzi $\mathbf{A}_{\mathcal{F}} \subset \mathbf{A}_{\mathcal{G}}$, ponieważ $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Zgodnie z rozumowaniem z dowodu lematu 1, $\mathcal{P}$ jest elementem maksymalnym w $\mathbf{A}_{\mathcal{F}}$, a $\mathcal{Q}$ jest elementem maksymalnym w $\mathbf{A}_{\mathcal{G}}$. Oznacza to, że $\mathcal{Q} \geqslant \mathcal{P}$, co daje tezę lematu. ■

Potrzebny nam będzie także następujący lemat:

Lemat 3. *Niech X będzie dowolną przestrzenią liniową unormowaną. Jeśli A i B są podzbiorami przestrzeni B, przy czym zbiór A jest domknięty i ograniczony, a B jest skończenie wymiarową podprzestrzenią liniową przestrzeni X, to zbiór*

$$A+B=\{x+y : x \in A,\ y \in B\}$$

jest domknięty.

Dowód. Weźmy dowolny, zbieżny ciąg punktów (z_k) ze zbioru $A+B$. Oznaczmy jego granicę przez z. Wykażemy, że $z \in A+B$. Punkty z_k należą do zbioru $A+B$, a zatem można je przedstawić w postaci $z_k=x_k+y_k$, gdzie $x_k \in A$, a $y_k \in B$. Wykażemy, że zbiór $\{y_k : k \in \mathbf{N}\}$ jest ograniczony. Wiemy, że zbiór A jest ograniczony. Niech M będzie taką liczbą dodatnią, że $\|x\| \leqslant M$ dla każdego $x \in A$. Z nierówności trójkąta otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$\|z_k\| = \|x_k+y_k\| \geqslant \|y_k\| - \|x_k\| \geqslant \|y_k\| - M. \tag{11}$$

Gdyby zatem zbiór $\{y_k : k \in \mathbf{N}\}$ nie był ograniczony, wtedy nieograniczony byłby także zbiór $\{z_k : k \in \mathbf{N}\}$, a zatem ciąg (z_k) nie byłby zbieżny.

Zbiór $\{y_k : k \in \mathbf{N}\}$ jest ograniczony, zawiera się zatem w pewnym zbiorze postaci $\{y \in B : \|y\| \leqslant N\}$ dla pewnego $N>0$. Ten ostatni zbiór jest domknięty i leży w skończenie wymiarowej przestrzeni B. Jest zatem zwarty. Każdy ciąg punktów z tego zbioru, a więc także ciąg (y_k), zawiera podciąg zbieżny. Niech (y_{k_i}) będzie zbieżnym podciągiem ciągu (y_k). Oznaczmy $y = \lim_{i \to \infty} y_{k_i}$. Oczywiście, $y \in B$. Oznaczmy $x=z-y$. Mamy

$$\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = \lim_{i\to\infty} (z_{k_i} - y_{k_i}) = z - y = x,$$

co oznacza, że $x \in A$, ponieważ zbiór A jest domknięty. Zatem $z = x + y$, gdzie $x \in A$, a $y \in B$, co oznacza, że $z \in A + B$. Zbiór $A + B$ jest więc domknięty. ■

Uwaga 1. Założeń w lemacie nie można osłabić. Przykład

$$A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 > \frac{1}{x_1}\right\}, \qquad B = \{(x_1, 0) \in \mathbf{R}^2\}$$

pokazuje, że nie można pominąć założenia o ograniczoności zbioru A. Mamy bowiem

$$A + B = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbf{R},\ x_2 > 0\},$$

czyli nie jest zbiorem domkniętym. Następny przykład[7] pokazuje, że nie można także pominąć założenia o skończonym wymiarze podprzestrzeni B. Przestrzenią jest ℓ_∞. Niech $A = \{\tilde{e}_n : n > 1\}$, gdzie $\tilde{e}_n = \left(\frac{1}{n}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\right)$ (jedynka znajduje się na n-tym miejscu), a $B = \{x \in \ell_\infty : x_1 = 0\}$. Wówczas zbiór $A + B$ nie jest domknięty. Ciąg punktów $z_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ jest zbieżny do 0, lecz $0 \notin A + B$.

Lemat 4. *W modelu istnieje możliwość arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w nim lokalna możliwość arbitrażu w pewnej chwili* $\tau > 0$.

Dowód. Niech ψ będzie lokalną możliwością arbitrażu w chwili τ, co oznacza, że $\psi \cdot S_\tau \geqslant 0$ oraz $\mathbf{P}(\psi \cdot S_\tau > 0) > 0$. Wprowadźmy zmienne losowe $X^1, \ldots, X^d$. Niech $X^i = 1$, gdy $S^i_\tau > 0$ oraz $X^i = 0$, gdy $S^i_\tau = 0$. Oznaczmy $X = X^1 + \ldots + X^d$. Na podstawie założenia 1, $X > 0$, prawie na pewno. Rozważmy następującą strategię inwestycyjną θ:

$$\theta_t = 0 \qquad \text{dla } t < \tau,$$

$$\theta_\tau = \psi,$$

$$\theta^i_t = \frac{X^i}{X} \cdot \frac{\psi \cdot \Delta S^i_\tau}{S^i_\tau} + (1 - X^i) \quad \text{dla } t > \tau.$$

[7] Autorem tego przykładu jest Piotr Maćkowiak.

Strategia θ jest, jak łatwo sprawdzić, samofinansująca. Jej wartość w chwili końcowej wynosi

$$V_T(\theta)=\frac{1}{X}\sum_{i=1}^{d} S_T^i\left[\frac{X^i}{S_\tau^i}\psi\cdot\Delta S_\tau+(1-X^i)\right]\geqslant 0$$

oraz $\mathbf{P}(V_T(\theta)>0)>0$, co wynika z tego, że ψ jest lokalną możliwością arbitrażu oraz z założenia 1. Strategia θ jest zatem możliwością arbitrażu.

Wykażemy teraz, że z istnienia możliwości arbitrażu wynika istnienie lokalnej możliwości arbitrażu. Niech θ będzie możliwością arbitrażu. Mamy zatem $V_0(\theta)=0$ oraz $V_T(\theta)\geqslant 0$ i $\mathbf{P}(V_T(\theta)>0)>0$. Niech

$$\tau=\inf\{t:\exists B\in\mathcal{F}_t,\ \mathbf{P}(B)>0,\ V_t(\theta)>0 \text{ na zbiorze } B\}. \tag{12}$$

Taki moment τ na pewno istnieje, gdyż w przeciwnym razie θ nie byłaby możliwością arbitrażu. Przyjmijmy

$$\psi=\theta_\tau 1_B,$$

gdzie $B\in\mathcal{F}_\tau$ jest zbiorem takim jak w (12), tj. $V_t(\theta)>0$ na B. Mamy

$$\psi\cdot\Delta S_\tau=\theta_t\cdot\Delta S 1_B=V_\tau(\theta)1_B-V_{\tau-1}(\theta)1_B=V_\tau(\theta)1_B\geqslant 0$$

oraz $\mathbf{P}(\psi\cdot\Delta S_\tau>0)>0$. Z (12) wynika, że $\psi\cdot S_{\tau-1}=V_{\tau-1}(\theta)=0$. Zmienna ψ jest zatem lokalną możliwością arbitrażu w chwili τ. ■

4. Zasadnicze twierdzenie matematyki finansowej

Możemy teraz przystąpić do sformułowania i udowodnienia zasadniczego twierdzenia. Sformułujemy je najpierw dla modelu jednookresowego (tj. dla horyzontu $\mathbf{T}=\{0, 1\}$), a następnie rozszerzymy je na model wielookresowy.

Twierdzenie 1. *Zakładamy, że jednookresowy model rynku jest zbudowany na przeliczalnej przestrzeni stanów, a ceny akcji mają skończoną wartość oczekiwaną,*

$$\mathbf{E}[|S_1|]<\infty. \tag{13}$$

W modelu nie istnieje możliwość arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w nim jądro wyceny, czyli dodatnia i całkowita zmienna losowa H taka, że

$$S_0=\mathbf{E}[HS_1].$$

Dowód. Zgodnie z lematem 1, σ-algebrę $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1$ można przedstawić za pomocą przeliczalnego (lub skończonego) podziału zbioru Ω, $\mathcal{P}=\{A_1, A_2, ...\}$. W każdym zbiorze A_i, ceny akcji w okresie pierwszym są stałe, ponieważ w przeciwnym razie S_1 nie byłaby zmienną losową $\mathcal{F}_1$-mierzalną. Oznaczmy przez $S_1(A_1)$ wartość wektora cen akcji w okresie 1 w zbiorze A_i. Oznaczmy $p_i=\mathbf{P}(A_i)$ i zdefiniujmy zbiór L jako

$$L=\{(-\theta\cdot S_0, p_1\theta\cdot S_1(A_1), p_2\theta\cdot S_1(A_2), p_3\theta\cdot S_1(A_3), ...):\theta\in\mathbf{R}^d\}. \quad (14)$$

Elementy zbioru L odpowiadają wartościom $V(\theta)$ pewnej strategii inwestycyjnej θ. Pierwsza współrzędna opisuje koszt strategii w momencie $t=0$, a następne współrzędne oznaczają wartości $V_1(\theta)$ w zbiorach A_i, przemnożone przez p_i. L jest przestrzenią liniową. Jeśli podział $\mathcal{P}$ jest skończony, to jest to podprzestrzeń $\mathbf{R}^{N+1}$, gdzie N to liczba elementów podziału $\mathcal{P}$. Jeśli zbiór $\mathcal{P}$ jest przeliczalny, to dla każdego $x\in L$ mamy

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|=|-\theta\cdot S_0|+\sum_{i=2}^{\infty}|p_i\theta\cdot S_1(A_i)|=|-\theta\cdot S_0|+\left|\theta\cdot\sum_{i=2}^{\infty}|p_iS_1(A_i)|\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\theta\cdot S_0|+|\theta|\cdot\mathbf{E}[|S_1|]<\infty,$$

na podstawie założenia (13). L jest więc skończenie wymiarową (jej wymiar nie przekracza d) podprzestrzenią ℓ_1. Dalej, przez $\|\cdot\|_1$ będziemy oznaczać normę $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{N+1}|x_i|$, jeśli podział $\mathcal{P}$ jest skończony lub normę przestrzeni ℓ_1, jeśli podział jest nieskończony. W pierwszym wypadku $X=\mathbf{R}^{N+1}$, a w drugim $X=\ell_1$.

Zdefiniujmy zbiór B:

$$B=\{x\in X:\|x\|_1=1, x\geqslant 0\},$$

gdzie nierówność $x\geqslant 0$ oznacza, że każda współrzędna ciągu x spełnia $x_i\geqslant 0$. Zbiór B jest domknięty, ograniczony i wypukły. Możliwość arbitrażu istnieje tylko wtedy, gdy $B\cap L\neq\emptyset$. Załóżmy, że możliwość arbitrażu nie istnieje, czyli że $B\cap L=\emptyset$. Pokażemy, jak można znaleźć jądro wyceny.

Niech $C=B-L$. C jest zbiorem wypukłym oraz $0\notin C$ (ponieważ w przeciwnym wypadku mielibyśmy $B\cap L\neq\emptyset$). Na podstawie lematu 3, C jest zbiorem domkniętym. W zbiorze $X\setminus C$ istnieje zatem pewne otoczenie zera, $V=\{x\in X:\|x\|_1<\varepsilon\}$ dla pewnego $\varepsilon>0$. Zbiór V jest wypukły i pochłaniający[8] oraz ma niepuste wnętrze. Zachodzi także $V\cap C=\emptyset$. Na

[8] Zbiór V nazywamy *pochłaniającym*, jeśli dla każdego punktu $x\in X$ istnieje taka nieujemna liczba λ, że $\lambda x\in V$.

podstawie twierdzenia o oddzielaniu ([2], s. 188; [13], s. 176), istnieje hiperpłaszczyzna rozdzielająca zbiory C i V. Istnieje zatem ciągły funkcjonał liniowy, $f \in X^*$, różny od funkcjonału zerowego, a także liczba rzeczywista α takie, że

$$f(v) \leqslant \alpha \quad \text{dla każdego} \quad v \in V \tag{15}$$

oraz

$$f(z) \geqslant \alpha \quad \text{dla każdego} \quad z \in C. \tag{16}$$

Nierówność (16) oznacza, że dla każdego $x \in B$ oraz $y \in L$, $f(x-y) = f(x) - f(y) \geqslant \alpha$, czyli $f(x) \geqslant f(y) + \alpha$.

Załóżmy, że dla każdego $v \in V$ zachodzi $f(v) \geqslant 0$. Zbiór V jest pochłaniający, zatem dowolny punkt $x \in X$ można zapisać jako $x = \lambda X$ dla pewnej nieujemnej liczby λ. Zatem $f(x) = f(\lambda v) = \lambda f(v) \geqslant 0$. Oznacza to, że $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$, wbrew temu, że f ma być różny od funkcjonału zerowego. Wynika stąd, że istnieje punkt $v \in V$ taki, że $f(v) > 0$. Zatem $\alpha > 0$. Mamy więc

$$f(x) > f(y) \quad \text{dla każdego} \quad x \in B,\ y \in L. \tag{17}$$

L jest podprzestrzenią liniową, zatem musi zachodzić $f(y) = 0$ dla każdego $y \in L$. Gdyby bowiem $f(y) > 0$ (lub $f(y) < 0$) dla pewnego $y \in L$, wtedy biorąc $f(\lambda y) = \lambda f(y)$ dla $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$), funkcjonał f mógłby przyjmować dowolnie duże wartości na L, a zatem nierówność (17) nie mogłaby zachodzić. Nierówność (16) oznacza więc, że

$$f(x) > 0 \quad \text{dla każdego} \quad x \in B. \tag{18}$$

Jeśli $X = \mathbf{R}^{N+1}$, to funkcjonał f można przedstawić w postaci iloczynu skalarnego

$$f(x) = f_0 x_1 + f_1 x_2 + \ldots + f_N x_{N-1}.$$

Jeśli zaś $X = \ell_1$, to ([13], s. 153) $f \in \ell_1^* \simeq \ell_\infty$. Istnieje zatem ciąg $(f_0, f_1, f_2, \ldots) \in \ell_\infty$ taki, że

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_{i-1}. \tag{19}$$

Niech $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (ciąg zer z jedynką na k-tym miejscu). Oczywiście, $e_k \in B$, a zatem na podstawie (18) i (19) mamy $f(e_k) > 0$, więc $f_{k-1} > 0$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots$

Oznaczmy $h_i=\frac{f_i}{f_0}$ dla $i=1, 2, \ldots$ Wprowadźmy zmienną losową H, kładąc $H(\omega)=h_i$ na zbiorze h_i. Zmienna H jest $\mathcal{F}$-mierzalna, dodatnia oraz

$$\mathbf{E}[|H|]=\mathbf{E}[H]=\frac{1}{f_0}\sum_{i=1}^{\infty} p_i f_i<\infty.$$

(Dla uproszczenia piszę sumę dla i od 1 do ∞, ale gdy podział $\mathcal{P}_1$ ma skończenie wiele elementów, sumujemy dla i od 1 do $N+1$. Ta uwaga dotyczy także następnych sum). Weźmy $\theta=e_k$, gdzie $k\in\{1, 2, \ldots, d\}$. Ciąg

$$x=(-\theta\cdot S_0, p_1\theta\cdot S_1(A_1), p_2\theta\cdot S_1(A_2), \ldots)=(-S_0^k, p_1 S_1^k(A_1), p_2 S_1^k(A_2), \ldots)$$

należy do podprzestrzeni L, a zatem $f(x)=0$. Mamy więc

$$\mathbf{E}[HS_1^k]=\frac{1}{f_0}\sum_{i=1}^{\infty} p_i f_i x_{i+1}=\frac{1}{f_0}(f(x)-f_0 x_1)=x_1=S_0^k.$$

Zmienna H jest więc jądrem wyceny.

Wystarczy jeszcze wykazać, że jeżeli istnieje jądro wyceny H, to nie istnieje możliwość arbitrażu. Załóżmy, że ψ jest możliwością arbitrażu. Mamy zatem $\psi\cdot S_0=0$ oraz $\psi\cdot\Delta S_1\geqslant 0$ i $\mathbf{E}[\psi\cdot\Delta S_1]>0$. Ponieważ H jest zmienną dodatnią, więc $\mathbf{E}[H\psi\cdot\Delta S_1]>0$. Mamy jednak

$$\mathbf{E}[H\psi\cdot\Delta S_1]=\psi\cdot\mathbf{E}[HS_1]-\psi\mathbf{E}[HS_0]=\psi\cdot S_0-\psi\cdot S_0\mathbf{E}[H]=0,$$

co jest niemożliwe. Możliwość arbitrażu zatem nie istnieje. ■

Sformułujemy teraz twierdzenie w modelu wielookresowym.

Twierdzenie 2. *Zakładamy, że wielookresowy model rynku jest zbudowany na przeliczalnej przestrzeni stanów, a ceny akcji w każdej chwili t mają skończoną wartość oczekiwaną,*

$$\mathbf{E}[|S_t|]<\infty, \qquad \forall t\in\mathbf{T}. \tag{20}$$

W modelu nie istnieje możliwość arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w nim jądro wyceny.

Dowód. Weźmy dowolny moment $t\in\mathbf{T}\setminus\{0\}$ i dowolny zbiór A z podziału $\mathcal{P}_{t-1}$ związanego z σ-algebrą $\mathcal{F}_{t-1}$. Zgodnie z lematami 1 i 2, możemy wskazać zbiory $A_1, A_2, \ldots$, zawarte w podziale $\mathcal{P}_t$, związanym z σ-algebrą $\mathcal{F}_t$ takie, że

$$A=\bigcup_j A_j.$$

(Zbiorów takich może być skończnie wiele lub przeliczalnie wiele). Oznaczmy przez $S_{t-1}(A)$ wartość zmiennej losowej S_{t-1} w zbiorze A, a przez $S_t(A)$ wartość zmiennej S_t w zbiorze A_j. Odpowiednie zmienne losowe są mierzalne, a zatem powyższe wartości są określone jednoznacznie. Jeśli w modelu nie istnieje możliwość arbitrażu, to zgodnie z lematem 4, nie istnieje lokalna możliwość arbitrażu. W szczególności nie istnieje wektor $\psi \in \mathbf{R}^d$ taki, że $\psi \cdot S_{t-1}(A) = 0$ i $\psi \cdot S_t(A_j) \geqslant 0$ dla każdego j oraz $\mathbf{P}(\psi \cdot S_t(A_j) > 0) > 0$ dla pewnego j takiego, że $\mathbf{P}(A_j) > 0$. Gdyby bowiem taki wektor istniał, wtedy $\mathcal{F}_{t-1}$-mierzalna zmienna losowa $\theta = \psi 1_A$ stanowiłaby lokalną możliwość arbitrażu w chwili t. Oznaczmy $p_j = \mathbf{P}(A_j \mid A)$. Rozważając podprzestrzeń L, złożoną z ciągów postaci

$$(-\psi \cdot S_{t-1}(A), p_1 \psi \cdot S_t(A_1), p_2 \psi \cdot S_t(A_2), \ldots),$$

gdzie $\psi \in \mathbf{R}^d$, możemy powtórzyć rozumowanie z dowodu twierdzenia 1. Możemy zatem wskazać taki ciąg $(h_1, h_2, \ldots) \in \ell_\infty$, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_j h_j S_t(A_j) = S_{t-1}(A).$$

Określmy zmienną losową H^A, przyjmując $H^A = h_j$ na zbiorze A_j oraz $H^A = 0$ poza zbiorami $A_1, A_2, \ldots$ Mamy wówczas $\mathbf{E}[H^A \mid A] < \infty$ oraz $\mathbf{E}[H^A S_t \mid A] = S_{t-1}(A)$. Powtarzajc to rozumowanie dla każdego zbioru $A \in \mathcal{P}_{t-1}$, otrzymamy ciąg zmiennych H^A. Zdefiniujmy

$$H_t \equiv \sum_{A \in \mathcal{P}_{t-1}} H^A.$$

Jak łatwo sprawdzić, zmienna H_t jest $\mathcal{F}_t$-mierzalna, spełnia $\mathbf{E}[H \mid \mathcal{F}_{t-1}] < \infty$ oraz $\mathbf{E}[HS_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = S_{t-1}$. Proces H, złożony z takich zmiennych losowych H_t dla kolejnych momentów t, jest więc jądrem wyceny.

Pozostaje wykazać, że jeśli istnieje jądro wyceny, to nie istnieje możliwość arbitrażu. Załóżmy, że istnieje lokalna możliwość arbitrażu ψ w chwili t. Mamy wówczas $\psi \cdot S_{t-1} = 0$ oraz $\mathbf{E}[H_t \psi \cdot \Delta S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] > 0$, gdyż H_t jest dodatnią zmienną losową. Jednak, z drugiej strony, mamy

$$\mathbf{E}[H_t \psi \cdot \Delta S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \psi \cdot \mathbf{E}[H_t S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] - \psi \cdot S_{t-1} \mathbf{E}[H_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem możliwość arbitrażu nie istnieje. ■

Przedstawimy teraz najogólniejszą postać zasadniczego twierdzenia dla założonej przez nas klasy modeli.

Twierdzenie 3 (zasadnicze twierdzenie matematyki finansowej). *Zakładamy, że model rynku jest określony na przeliczalnej przestrzeni zdarzeń elementarnych oraz że spełnia założenie* 1. *Model jest wolny od arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje miara probabilistyczna* $\mathbf{P}'$ *równoważna mierze* $\mathbf{P}$, *oraz adaptowany, dodatni proces stochastyczny* H *takie, że* H *jest jądrem wyceny względem miary* $\mathbf{P}'$, *tj.*

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[H_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] < \infty \tag{21}$$

oraz

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[H_t S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = S_{t-1}. \tag{22}$$

Jeżeli w modelu istnieje papier wartościowy, którego ceny są w każdej chwili dodatnie (niech będzie to akcja S^1), *to ostatni warunek jest równoważny z istnieniem równoważnej miary martyngałowej* $\mathbf{Q}$ *dla* S^1 *jako numéraire.*

Dowód. Jeśli ceny akcji mają skończone wartości oczekiwane względem miary $\mathbf{P}$, to twierdzenie sprowadza się do twierdzenia 2. Jeśli zaś wartość oczekiwana cen akcji jest nieskończona, wystarczy wykazać, że można znaleźć miarę probabilistyczną $\mathbf{P}'$, równoważną mierze $\mathbf{P}$ i taką, że ceny akcji S_t są całkowalne względem miary $\mathbf{P}'$. Wystarczy w tym celu przyjąć

$$\mathbf{P}'(\omega) = \frac{c\mathbf{P}(\omega)}{\max\limits_{\substack{i=1,\ldots,d \\ t=0,\ldots,T}} \{S_t^i(\omega), 1\}},$$

gdzie c jest stałą, dobraną tak, aby $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}'(\omega) = 1$. Jak łatwo sprawdzić, zachodzi

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[|S_t|] < \infty.$$

Korzystając z twierdzenia 2, z $\mathbf{P}'$ jako miarą probabilistyczną, otrzymujemy, że model jest bezarbitrażowy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jądro wyceny dla miary $\mathbf{P}'$.

Pozostaje do wykazania druga część twierdzenia, o istnieniu równoważnej miary martyngałowej. Niech S_1 będzie *numéraire*. Jeśli na rynku nie ma arbitrażu, to istnieje jądro wyceny względem pewnej miary probabilistycz-

nej $\mathbf{P}'$, równoważnej z miary $\mathbf{P}$. Zdefiniujmy miarę $\mathbf{Q}$, podając jej gęstość względem miary $\mathbf{P}'$:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}'}=\frac{S_T^1}{S_0^1}\prod_{t=1}^{T} H_t. \tag{23}$$

Korzystając z uogólnionego wzoru Bayesa ([10], s. 141, lub [18], s. 231), obliczamy

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{S}_t^i|\mathcal{F}_{t-1}]=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}'}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}'}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]}=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}\frac{S_T^1}{S_0^1}H_1H_2\ldots H_T|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_T^1}{S_0^1}H_1H_2\ldots H_T|\mathcal{F}_{t-1}\right]}=$$

$$=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}S_T^1H_t\ldots H_{T-1}H_T|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[S_T^1H_t\ldots H_{T-1}H_T|\mathcal{F}_{t-1}]}=$$

$$=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}S_T^1H_t\ldots H_{T-1}H_T|\mathcal{F}_{T-1}\right]|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[S_T^1H_t\ldots H_{T-1}H_T|\mathcal{F}_{T-1}]|\mathcal{F}_{t-1}]}=$$

$$=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}H_t\ldots H_{T-1}\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[S_T^1H_T|\mathcal{F}_{T-1}]|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[H_t\ldots H_{T-1}\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[S_T^1H_T|\mathcal{F}_{T-1}]|\mathcal{F}_{t-1}]}=$$

$$=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}H_t\ldots H_{T-1}S_{T-1}^1|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[H_t\ldots H_{T-1}S_{T-1}^1|\mathcal{F}_{t-1}]}=\ldots=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}S_t^1H_t|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[S_t^1H_t|\mathcal{F}_{t-1}]}=$$

$$=\frac{S_{t-1}^i}{S_{t-1}^1}=\tilde{S}_{t-1}^i,$$

a zatem zdyskontowany proces cen spełnia warunek

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{S}_t|\mathcal{F}_{t-1}]=\tilde{S}_{t-1}. \tag{24}$$

Przedstawimy teraz najogólniejszą postać zasadniczego twierdzenia dla założonej przez nas klasy modeli.

Twierdzenie 3 (zasadnicze twierdzenie matematyki finansowej). *Zakładamy, że model rynku jest określony na przeliczalnej przestrzeni zdarzeń elementarnych oraz że spełnia założenie* 1. *Model jest wolny od arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje miara probabilistyczna* $\mathbf{P}'$ *równoważna mierze* $\mathbf{P}$, *oraz adaptowany, dodatni proces stochastyczny* H *takie, że* H *jest jądrem wyceny względem miary* $\mathbf{P}'$, *tj.*

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[H_t | \mathcal{F}_{t-1}] < \infty \tag{21}$$

oraz

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[H_t S_t | \mathcal{F}_{t-1}] = S_{t-1}. \tag{22}$$

Jeżeli w modelu istnieje papier wartościowy, którego ceny są w każdej chwili dodatnie (niech będzie to akcja S^1), *to ostatni warunek jest równoważny z istnieniem równoważnej miary martyngałowej* $\mathbf{Q}$ *dla* S^1 *jako numéraire.*

Dowód. Jeśli ceny akcji mają skończone wartości oczekiwane względem miary $\mathbf{P}$, to twierdzenie sprowadza się do twierdzenia 2. Jeśli zaś wartość oczekiwana cen akcji jest nieskończona, wystarczy wykazać, że można znaleźć miarę probabilistyczną $\mathbf{P}'$, równoważną mierze $\mathbf{P}$ i taką, że ceny akcji S_t są całkowalne względem miary $\mathbf{P}'$. Wystarczy w tym celu przyjąć

$$\mathbf{P}'(\omega) = \frac{c\mathbf{P}(\omega)}{\max\limits_{\substack{i=1,\ldots,d \\ t=0,\ldots,T}} \{S_t^i(\omega), 1\}},$$

gdzie c jest stałą, dobraną tak, aby $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}'(\omega) = 1$. Jak łatwo sprawdzić, zachodzi

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[|S_t|] < \infty.$$

Korzystając z twierdzenia 2, z $\mathbf{P}'$ jako miarą probabilistyczną, otrzymujemy, że model jest bezarbitrażowy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jądro wyceny dla miary $\mathbf{P}'$.

Pozostaje do wykazania druga część twierdzenia, o istnieniu równoważnej miary martyngałowej. Niech S_1 będzie *numéraire*. Jeśli na rynku nie ma arbitrażu, to istnieje jądro wyceny względem pewnej miary probabilistycz-

nej $\mathbf{P}'$, równoważnej z miary $\mathbf{P}$. Zdefiniujmy miarę $\mathbf{Q}$, podając jej gęstość względem miary $\mathbf{P}'$:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}'}=\frac{S_T^1}{S_0^1}\prod_{t=1}^{T}H_t. \tag{23}$$

Korzystając z uogólnionego wzoru Bayesa ([10], s. 141, lub [18], s. 231), obliczamy

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{S}_t^i|\mathcal{F}_{t-1}]=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}'}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}'}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]}=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}\frac{S_T^1}{S_0^1}H_1H_2\ldots H_T|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_T^1}{S_0^1}H_1H_2\ldots H_T|\mathcal{F}_{t-1}\right]}=$$

$$=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}S_T^1H_t\ldots H_{T-1}H_T|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[S_T^1H_t\ldots H_{T-1}H_T|\mathcal{F}_{t-1}]}=$$

$$=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}S_T^1H_t\ldots H_{T-1}H_T|\mathcal{F}_{T-1}\right]|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[S_T^1H_t\ldots H_{T-1}H_T|\mathcal{F}_{T-1}]|\mathcal{F}_{t-1}]}=$$

$$=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}H_t\ldots H_{T-1}\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[S_T^1H_T|\mathcal{F}_{T-1}]|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[H_t\ldots H_{T-1}\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[S_T^1H_T|\mathcal{F}_{T-1}]|\mathcal{F}_{t-1}]}=$$

$$=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}H_t\ldots H_{T-1}S_{T-1}^1|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[H_t\ldots H_{T-1}S_{T-1}^1|\mathcal{F}_{t-1}]}=\ldots=\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}\left[\frac{S_t^i}{S_t^1}S_t^1H_t|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}'}[S_t^1H_t|\mathcal{F}_{t-1}]}=$$

$$=\frac{S_{t-1}^i}{S_{t-1}^1}=\tilde{S}_{t-1}^i,$$

a zatem zdyskontowany proces cen spełnia warunek

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{S}_t|\mathcal{F}_{t-1}]=\tilde{S}_{t-1}. \tag{24}$$

Zdefiniujmy ciąg momentów stopu ([1], s. 136, lub [10], s. 220) τ_n jako

$$\tau_n = \min\left\{t : \max_i \{\tilde{S}_t^i\} \geqslant n\right\}. \tag{25}$$

Określmy ciąg procesów stochastycznych $\tilde{S}^{\tau_n}$, przyjmując[9]

$$\tilde{S}_t^{\tau_n} = \tilde{S}_{t \wedge \tau_n}.$$

Zachodzi $\tilde{S}^{\tau_n} \to \tilde{S}$, gdy $n \to \infty$. Łatwo także sprawdzić, że

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{S}_t^{\tau_n}] < \infty,$$

oraz

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{S}_t^{\tau_n} \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1}^{\tau_n}$$

dla każdego $t \in \mathbf{T}$ i każdego n. Oznacza to, że proces $\tilde{S}^{\tau_n}$ jest martyngałem względem miary $\mathbf{Q}$, a więc $\tilde{S}$ jest lokalnym martyngałem ([19], s. 477) względem miary $\mathbf{Q}$. Korzystajc z lematu Fatou ([1], s. 209) i z tego, że $\tilde{S}^{\tau_n}$ jest martyngałem, otrzymujemy

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{S}_t] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\lim_n \tilde{S}_t^{\tau_n}\right] \leqslant \lim_n \inf \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{S}_t^{\tau_n}] = \lim_n \inf \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{S}_0^{\tau_n}] = \lim_n \inf \tilde{S}_0^{\tau_n} < \infty,$$

co oznacza, że proces $\tilde{S}$ jest całkowalny. Razem z (24) oznacza to, że jest on martyngałem względem miary $\mathbf{Q}$, czyli $\mathbf{Q}$ jest miarą martyngałową. Z (23) wynika, że jest równoważna mierze $\mathbf{P}'$, a zatem także mierze $\mathbf{P}$.

Ostatnią część twierdzenia – to, że istnienie jądra wyceny lub równoważnej miary martyngałowej jest warunkiem wystarczającym braku arbitrażu – dowodzi się podobnie jak w twierdzeniu 2. ■

Literatura

[1] Bilingsley P., *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa 1987.
[2] Charalambos D. A., Border K. C., *Intfinite Dimensional Analysis*, Springer Verlag, 1999.
[3] Cox J. C., Ross S. A., *The Valuation of Options for Alternative stochastic Processes*, Journal of Financial Economics vol. 3, 1976.

[9] Zapis $a \wedge b$ oznacza tutaj mniejszą z liczb a, b. Proces taki, jak zdefiniowany poniżej $\tilde{S}^{\tau_n}$, nazywamy *procesem zatrzymanym* ([10], s. 227).

[4] Dalang R. C., Morton A., Willinger W., *Equivalent Martingale Measures and No-arbitrage in Stochastic Securities Market Models*, Stochastics and Stochastics Reports vol. 29, 1999.
[5] Elliott J. R., Kopp P. E., *Mathematics of Financial Markets*, Springer-Verlag, 1999.
[6] Fama E. F., *The Behavior of Stock Market Prices*, Journal of Business vol. 34, 1965.
[7] Harrison J. M., Kreps D. M., *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*, Journal of Economics Theory vol. 20, 1979.
[8] Hunt P. J., Kennedy J. E., *Financial Derivatives in Theory and Practice*, John Willey and Sons, Ltd. 2000.
[9] Jacod J., Shiryaev N. A., *Local Martingales and the Fundamental Asset Pricing Theorems in Discrete-time Case*, Finance and Stochastics vol. 3, 1998.
[10] Jakubowski J., Sztencel R., *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, SCRIPT, 2001.
[11] Kuratowski K., *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1977.
[12] Musiela M., Rutkowski M., *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer-Verlag, 1998.
[13] Musielak J., *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.
[14] Pliska S. R., *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell Publ., 1997.
[15] Rogers L. C. G., *Equivalent Martingale Measures and No-arbitrage*, Stochastics and Stochastics Reports vol. 51, 1994.
[16] Rudin W., *Analiza funkcjonalna*, WN PWN, Warszawa 2001.
[17] Schachermayer W., *A Hilbert-space Proof of the Fundamental Theorem of Asset Pricing*, Insurance Mathematical Economics vol. 11, 1992.
[18] Shiryaev A. N., *Probability*, Springer-Verlag, 1984.
[19] Shiryaev A. N., *Essentials of Stochastic Finance*, World Scientific Publ., 1999.
[20] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1998.

THE PROOF OF THE FUNDAMENTAL THEOREM OF FINANCIAL MATHEMATICS IN A MODEL WITH A COUNTABLE SAMPLE SPACE

Summary

The article contains a new proof of the First Fundamental Theorem of Financial Mathematics for the models with countable sample space. The author shows that in such a models it is possible to construct the proof using only methods of functional analysis. It is shown that if the market model is arbitrage-free than one can construct matringale measure directly, using the separating hyperplane theorem and Riesz representation theorems for some spaces of sequences.