Elżbieta RYCHŁOWSKA-MUSIAŁ

OPTYMALNE STRATEGIE ALOKACJI KAPITAŁU MIĘDZY DWA ZAKŁADY JEDNEJ FIRMY

Dla dużej liczby przedsiębiorstw ciągle aktualnym problemem jest opracowanie optymalnej (z punktu widzenia wybranego kryterium) strategii rozwoju oraz znalezienie skutecznych sposobów jej realizacji. W artykule zajmiemy się wyznaczeniem jednego z elementów takiej strategii długookresowej. Przedstawiony zostanie prosty model dynamiczny przedsiębiorstwa, umożliwiający wyznaczenie optymalnej strategii alokacji kapitału firmy pomiędzy dwa zakłady, stosujące różne techniki produkcji.

Technikę analizować będziemy pod kątem dwóch własności: kapitało- i pracochłonności. Mogą zatem występować cztery kombinacje tych atrybutów:

- technika kapitałochłonna i pracochłonna,
- technika kapitałooszczędna i pracooszczędna,
- technika kapitałochłonna i pracooszczędna,
- technika kapitałooszczędna i pracochłonna.

Dwie pierwsze techniki upraszczają jednakże problem decyzyjny. Jedna jest bowiem istotnie gorsza, a druga pod każdym względem najlepsza. Zadanie będzie zatem polegało na wyznaczeniu optymalnej alokacji kapitału pomiędzy dwa zakłady, z których jeden prowadzi produkcję techniką kapitałochłonną i pracooszczędną, a drugi techniką kapitałooszczędną i pracochłonną. Determinantą wyboru odpowiedniej techniki jest jej efektywność mierzona poziomem kosztów marginalnych (w wersji stacjonarnej – jednostkowych).

Analiza rozwiązań modelu wskazuje na kapitałochłonny (pracooszczędny) kierunek zmian technologicznych.

W długim horyzoncie ujawnia się w rozwiązaniu *efekt magistrali*, co oznacza, że trajektorie optymalne przebiegają czasowo wzdłuż pewnych trajektorii zrównoważonego wzrostu zwanych *magistralami*. Długości faz „do-

chodzenia" do magistrali i ewentualnie „zejścia" z niej są ograniczone. Jeżeli długość horyzontu analizy rośnie, to wydłuża się faza rozwoju firmy na magistrali.

1. Sformułowanie modelu

Przyjmiemy, że głównym celem właścicieli firmy (akcjonariuszy) jest maksymalizacja wartości firmy rozumianej jako suma dwóch składników: zaktualizowanego strumienia dywidendy (spodziewanej w ciągu całego okresu planowania) i zaktualizowanej wartości kapitału, jakim dysponuje firma na koniec okresu planowania. Uwagę skupimy na wyborze ciągu optymalnych procesów technologicznych, dlatego dla uproszczenia przyjmiemy, że jedynym źródłem zasilania majątku jest kapitał własny firmy. Stąd postać funkcji celu:

$$\max\{\int_0^z D(t)e^{-it}\,dt + K(z)e^{-iz}\}, \tag{1}$$

gdzie:

$D(t)$ – wielkość dywidendy w momencie t (gęstość strumienia)[1],

$K(t)$ – wielkość majątku w momencie t (zasób),

i – stopa dyskontowa (utożsamiana ze stopą zwrotu kapitału, $i > 0$, $i = \text{const}$),

z – ustalony horyzont planowania.

Źródłem finansowania inwestycji realizowanych przez firmę w każdym z zakładów jest zysk zatrzymany oraz fundusz amortyzacyjny (równoważący fizyczną deprecjację majątku):

$$I_i(t) = \dot{K}_i(t) + aK_i(t), \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

gdzie:

$K_i(t)$ – majątek i-tego zakładu w momencie t (zasób),

$I_i(t)$ – wielkość inwestycji w i-tą technikę w momencie t (gęstość strumienia),

a – stopa deprecjacji (jednakowa w obu zakładach).

Poziom zatrudnienia w każdym z zakładów jest wprost proporcjonalny do zaangażowanego w nim majątku (stałe techniczne uzbrojenie pracy w ramach każdego zakładu):

$$L_i(t) = l_i K_i(t), \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

[1] Różnice między wielkościami strumieniowymi a zasobowymi oraz umowność związanej z nimi terminologii opisane zostały szczegółowo w pracy E. Panka [5], s. 12.

gdzie:

$L_i(t)$ – poziom zatrudnienia w i-tym zakładzie w momencie t (zasób),

l_i – odwrotność technicznego uzbrojenia pracy w i-tym zakładzie.

Zależność wielkości produkcji od zasobu majątku w obu zakładach opisuje liniowa, jednoczynnikowa funkcja produkcji

$$Q_i(K_i(t)) = q_i K_i(t), \quad i=1, 2, \tag{4}$$

gdzie:

$Q_i(K_i(t))$ – poziom produkcji wytworzonej w i-tym zakładzie w momencie t (gęstość strumienia),

q_i – współczynnik produktywności majątku w i-tym zakładzie,

Produkcja firmy jest sumą produkcji obu zakładów, działających w jej ramach:

$$Q(K_1(t),K_2(t)) = Q_1(K_1(t)) + Q_2(K_2(t)) = q_1 K_1(t) + q_2 K_2(t). \tag{5}$$

Majątek i zatrudnienie firmy także są, odpowiednio, sumą majątku i zatrudnienia poszczególnych zakładów:

$$K(t) = K_1(t) + K_2(t), \tag{6}$$

$$L(t) = L_1(t) + L_2(t) = l_1 K_1(t) + l_2 K_2(t). \tag{7}$$

Przyjmijmy, że zakład 1 stosuje technikę pracooszczędną (kapitałochłonną), a zakład 2 technikę kapitałooszczędną (pracochłonną). Zatem:

$$\frac{1}{q_1} > \frac{1}{q_2}, \text{ czyli } q_1 < q_2, \quad \text{oraz} \quad \frac{l_1}{q_1} < \frac{l_2}{q_2}. \tag{8}$$

Parametr $1/q_i$ oznacza kapitałochłonność produkcji wytwarzanej przy stosowaniu techniki i-tego rodzaju, parametr l_i/q_i – pracochłonność produkcji przy stosowaniu techniki i-tego rodzaju.

Wprowadźmy współczynnik $s(t) = \frac{K_1(t)}{K(t)}$. Wówczas z (6) otrzymujemy:

$$K_2(t) = (1 - s(t))K(t). \tag{9}$$

Funkcję $s(t)$ nazywać będziemy funkcją podziału majątku między zakłady. Może ona przyjmować wartości z przedziału $[s_{\min}, s_{\max}]$, gdzie:

$s_{\min}$ – minimalny udział majątku zakładu 1 w całym majątku firmy, $s_{\min} \geq 0$,

$s_{\max}$ – maksymalny udział majątku zakładu 1 w całym majątku firmy, $s_{\max} \leq 1$.

Nie tracąc ogólności, możemy przyjąć, że $s_{\min} = 0$, a $s_{\max} = 1$. Dodatkowo będziemy zakładać, że $s(t)$ jest funkcją przedziałami ciągłą. Równania (5) – (7) przyjmą wtedy postać:

$$Q(K(t), s(t)) = (q_1 s(t) + q_2(1-s(t)))K(t) = ((q_1 - q_2)s(t) + q_2)\, K(t), \tag{10}$$

$$L(K(t), s(t)) = (l_1 s(t) + l_2(1-s(t)))K(t) = ((l_1 - l_2)s(t) + l_2)\, K(t). \tag{11}$$

Wypracowany w firmie zysk netto, czyli przychody ze sprzedaży pomniejszone o koszty pracy, wydatki konieczne na odnowę zużytej części majątku (fundusz amortyzacyjny) i należny podatek, jest przeznaczany na wypłatę dywidendy i (lub) zwiększenie majątku. Można to zapisać następująco:

$$ZN(Q, K, L) = S(Q) - wL(t) - aK(t) - f(S(Q) - wL(t) - aK(t)) = D(t) + \dot{K}(t), \tag{12}$$

gdzie:

$ZN(Q, K, L)$ – wartość zysku netto przy poziomie produkcji Q, majątku K, oraz zatrudnieniu L,

$S(Q)$ – rosnąca, wklęsła, funkcja przychodu ze sprzedaży: $S(Q) > 0$, gdy $Q > 0$, $S'(Q) > 0$, $S''(Q) < 0$, $S(Q) = P(Q)Q$,

$P(Q)$ – malejąca funkcja jednostkowej ceny sprzedaży przy poziomie produkcji Q: $P(Q) > 0$, gdy $Q > 0$, $P'(Q) < 0$,

f – stawka podatku dochodowego od osób prawnych,

w – stawka płac.

Ponadto będziemy zakładać, że wyrażona wartościowo krańcowa produktywność majątku w momencie początkowym nie jest niższa od kosztu krańcowego kapitału w momencie początkowym, tzn. że spełniony jest warunek

$$\left.\frac{\partial S}{\partial K}\right|_{K=K(0)} \geq a + \frac{i}{1-f}, \tag{13}$$

co oznacza, że polityka redukcji majątku nigdy nie będzie optymalna.

Przed sformułowaniem zadania sterowania optymalnego tak działającym przedsiębiorstwem zauważmy jeszcze, że nadwyżkę finansową po uwzględnieniu (2) i (12) można przedstawić następująco:

$$CF(K, L, Q) = ZN(K, L, Q) + aK(t) = (1-f)(S(Q) - wL(t) - aK(t)) + aK(t) = \\ = I(t) + D(t). \tag{14}$$

Równość (14) oznacza, że nadwyżka finansowa wypracowana w firmie może być przeznaczona na:

– inwestycje,

– dywidendę.

Powstaje pytanie, którą z powyższych polityk i w jakim czasie firma powinna realizować, aby zmaksymalizować wartość swojej funkcji celu.

Z warunków (2)-(14) po elementarnych przekształceniach otrzymujemy następujące zadanie sterowania optymalnego[2], którego rozwiązanie daje odpowiedź na postawione pytanie.

Znaleźć:

$$\max_{I(t),s(t)} \left(\int_0^z \left(CF(K(t),s(t)) - I(t) \right) e^{-it} dt + K(z) e^{-iz} \right) \tag{15}$$

przy ograniczeniach:

$$\dot{K}(t) = I(t) - aK(t), \tag{16}$$

$$s(t) \geq 0, \tag{17}$$

$$1 - s(t) \geq 0, \tag{18}$$

$$CF(K(t), s(t)) - I(t) \geq 0, \tag{19}$$

$$K(0) = K_0 > 0, \tag{20}$$

gdzie:

$$CF(K(t), s(t)) = (1-f)\left(S(Q) - w((l_1 - l_2)s(t) - l_2)K(t)\right) + afK(t). \tag{21}$$

Obowiązują ponadto zależności (10)-(11).

Zmiennymi sterującymi w zadaniu są $I(t)$ (wielkość inwestycji) oraz $s(t)$ (współczynnik podziału majątku między zakłady). Zmienną stanu jest całkowity zasób majątku $K(t)$.

Zagadnienie postaci (15)-(20) spełnia założenia twierdzeń o warunkach koniecznych i dostatecznych istnienia rozwiązania ([3], s. 282-284).

---

[2] Sformułowany problem alokacji kapitału między dwa zakłady jest pewną modyfikacją zadania przedstawionego w pracy [3].

2. Warunki optymalności

Utwórzmy funkcję Lagrange'a

$$L(K(t), I(t), s(t), \lambda(t), \mu(t)) = \big(CF(K(t), s(t)) - I(t)\big) + \lambda(t)(I(t) - aK(t)) + \\ + \mu_1(t)s(t) + \mu_2(t)(1-s(t)) + \mu_3(t)\big(CF(K(t), s(t)) - I(t)\big). \tag{22}$$

Rozwiązanie zadania (15)-(20) musi spełniać następujący układ warunków, wszędzie poza ewentualnymi punktami nieciągłości wektora sterowań $(I(t), s(t))$:

$$\dot{\lambda}(t) = (i + a)\,\lambda(t) - \frac{\partial CF}{\partial K}(\mu_3(t) + 1), \tag{23}$$

$$-1 + \lambda(t) - \mu_3(t) = 0, \tag{24}$$

$$\mu_1(t) - \mu_2(t) + \frac{\partial CF}{\partial s}(\mu_3(t) + 1) = 0, \tag{25}$$

$$\mu_1(t) \geq 0 \wedge \mu_1(t)\, s(t) = 0, \tag{26}$$

$$\mu_2(t) \geq 0 \wedge \mu_2(t)(1 - s(t)) = 0, \tag{27}$$

$$\mu_3(t) \geq 0 \wedge \mu_3(t)\big(CF(K(t), s(t)) - I(t)\big) = 0, \tag{28}$$

$$\lambda(z) = 1 \quad \text{(warunek transwersalności)}. \tag{29}$$

3. Trajektorie optymalne i charakterystyka rozwiązania

Analiza układu warunków (23)-(29) wskazuje na istnienie pięciu ścieżek dopuszczalnych, które łącząc się ze sobą, tworzą trajektorie optymalne. Ścieżki dopuszczalne i ich krótką charakterystykę przedstawia tabela. Stałą wartość produkcji w fazie reorganizacji (ścieżka 2) zapisujemy: Q_{21}^* (indeks 21 oznacza, że produkcja prowadzona jest w obu zakładach), w stanach równowagi stacjonarnej stałe wartości produkcji i kapitału oznaczamy analogicznie: Q_1^*, K_1^* (ścieżka 4, produkcja wyłącznie w zakładzie 1), Q_2^*, K_2^* (ścieżka 5, produkcja wyłącznie w zakładzie 2).

W zależności od efektywności technik stosowanych przez każdy zakład, a także od długości horyzontu[3], firma może wybierać wśród następujących strategii alokacji kapitału między obydwoma zakładami:

[3] Krytyczną długość horyzontu ($\bar{z}$), od której w rozwiązaniu pojawia się faza stacjonarna, można wyznaczyć dla konkretnej, ustalonej postaci funkcji produkcji (zob. punkt 4).

Ścieżki dopuszczalne i ich charakterystyka

Ścieżki	$\mu_1(t)$	$\mu_2(t)$	$\mu_3(t)$	$K(t)$	$Q(t)$	$D(t)$	Charakterystyka
1	0	+	+	wzrasta	$Q_2(t)$	brak	faza wzrostu (zakład 2)
2	0	0	+	wzrasta	Q_{21}^*	brak	faza reorganizacji $\frac{\partial S}{\partial Q} = \frac{w(l_2 - l_1)}{q_2 - q_1} = c_{21}$
3	+	0	+	wzrasta	$Q_1(t)$	brak	faza wzrostu (zakład 1)
4	+	0	0	K_1^*	Q_1^*	dodatnia	stan stacjonarny (ścieżka końcowa) $\frac{\partial S}{\partial Q} = \frac{1}{q_1}\left(\frac{i}{1-f} + a + wl_1\right) = c_1$
5	0	+	0	K_2^*	Q_2^*	dodatnia	stan stacjonarny (ścieżka końcowa) $\frac{\partial S}{\partial Q} = \frac{1}{q_2}\left(\frac{i}{1-f} + a + wl_2\right) = c_2$

A. Technika (pracooszczędna) kapitałochłonna bardziej efektywna niż technika (kapitałooszczędna) pracochłonna ($c_1 < c_2 < c_{21}$)

- „Niski" początkowy zasób majątku firmy ($K_0 < \frac{1}{q_1} Q_0$, $Q_0 < Q_{21}^*$) i długi horyzont ($z > \bar{z}$). Proces optymalny wyznacza trajektoria[4] $1 \to 2 \to 3 \to 4$. Wraz ze skracaniem horyzontu w rozwiązaniu znika jako pierwsza faza stacjonarna (ścieżka 4 – magistrala) i rozwiązaniem jest trajektoria $1 \to 2 \to 3$; gdy horyzont ulega dalszemu skróceniu, rozwiązanie jest dwufazowe: trajektoria $1 \to 2$ lub jednofazowe: ścieżka 1 (w przypadku bardzo krótkiego horyzontu).
- „Średni" początkowy zasób majątku firmy ($K_0 < \frac{1}{q_1} Q_0$, $Q_0 = Q_{21}^*$) i długi horyzont ($z > \bar{z}$). Rozwiązaniem optymalnym jest trajektoria $2 \to 3 \to 4$. Gdy długość horyzontu nie jest wystarczająca, aby trajektoria osiągnęła

[4] Trajektorię optymalną, będącą rozwiązaniem zadania, symbolicznie zapisujemy w postaci ciągu liczb, z których każda jest umownym numerem jednej ze ścieżek dopuszczalnych (faz). Fazy łączą strzałki, określające kierunek przełączeń.

stan stacjonarny, wówczas rozwiązaniem jest trajektoria 2→3, a w przypadku bardzo krótkiego horyzontu, ścieżka 2.

- „Wysoki" początkowy zasób majątku firmy ($K_0 = \frac{1}{q_1} Q_0$, $Q_{21}^* \leq Q_0 < Q_1^*$) i długi horyzont ($z > \bar{z}$). Proces optymalny wyznacza dwufazowa trajektoria 3→4. W krótkim horyzoncie rozwiązanie jest jednofazowe: ścieżka 3.
- „Optymalny" początkowy zasób majątku firmy ($K_0 = \frac{1}{q_1} Q_0$, $Q_0 = Q_1^*$). Niezależnie od długości horyzontu rozwiązaniem optymalnym jest pozostawanie przedsiębiorstwa w równowadze stacjonarnej (ścieżka 4).
- Początkowy zasób majątku firmy przekracza zasób „optymalny" ($K_0 > \frac{1}{q_1} Q_0$, $Q_0 = Q_1^*$). W sytuacji tej nie jest spełniony warunek (11), zatem nie można podać optymalnej strategii produkcyjnej na gruncie sformułowanego modelu.

B. Technika (pracooszczędna) kapitałochłonna mniej efektywna niż technika (kapitałooszczędna) pracochłonna ($c_{21} < c_2 < c_1$)

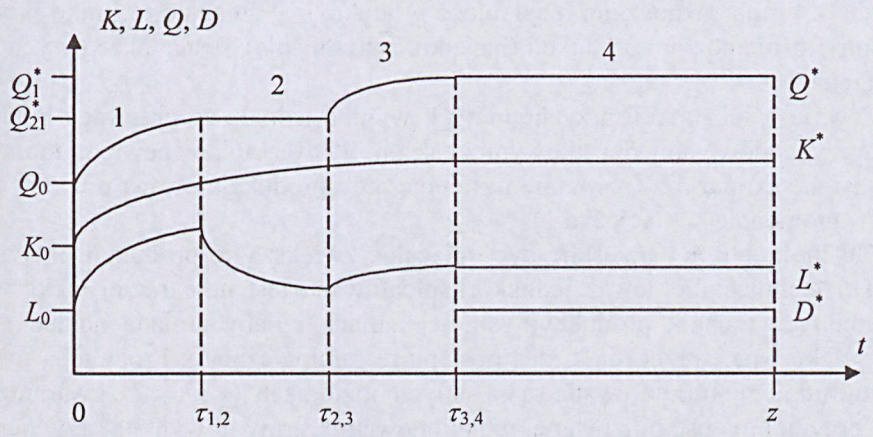
- Początkowy zasób majątku niższy od „optymalnego" ($K_0 = \frac{1}{q_2} Q_0$, $Q_0 < Q_2^*$) i długi horyzont ($z > \bar{z}$). Proces optymalny jest wyznaczony przez trajektorię 1→5. Gdy horyzont jest krótki, znika faza stacjonarna (ścieżka 5 – magistrala) i rozwiązanie jest jednofazowe: ścieżka 1.
- Kapitał własny początkowy „optymalny" ($K_0 = \frac{1}{q_2} Q_0$, $Q_0 = Q_2^*$). Przedsiębiorstwo pozostaje w równowadze stacjonarnej (ścieżka 5) niezależnie od długości horyzontu.
- Kapitał własny początkowy przekracza zasób „optymalny" ($K_0 > \frac{1}{q_2} Q_0$, $Q_0 = Q_2^*$). Tak jak w ostatnim punkcie **A**, w sytuacji tej nie jest spełniony warunek (11) i nie można sformułować strategii optymalnej.

ad **A**. Jeżeli zasób majątku firmy kształtuje się na poziomie niewystarczającym do rozpoczęcia produkcji techniką pracooszczędną (kapitałochłonną), co zachodzi przy „niskim" początkowym zasobie majątku, musi ona rozpocząć

produkcję, wykorzystując technikę kapitałooszczędną (pracochłonną). Pomimo wysokich kosztów jednostkowych wytwarzania rośnie poziom produkcji (majątku, zatrudnienia); rosną także przychody ze sprzedaży, które rekompensują z nawiązką wysokie koszty produkcji.

Z wklęsłości funkcji przychodu $S(Q)$ wynika jednak, że przewaga krańcowych przychodów nad jednostkowymi kosztami wytwarzania w pewnym momencie musi się skończyć. Zrównanie następuje, gdy produkcja osiąga poziom Q_{21}^*, czyli w momencie $\tau_{1,2}$ (ścieżka 1).

Od momentu $\tau_{1,2}$ przestaje być opłacalne dalsze zwiększanie produkcji przy zastosowaniu początkowej techniki (pracochłonnej). Istnieje jednak możliwość zmiany techniki na bardziej efektywną, umożliwiającą dalszy wzrost. Zatem faza druga to okres reorganizacji procesu produkcyjnego: realokacji kapitału. Produkcja utrzymywana jest cały czas na poziomie zapewniającym równość pomiędzy krańcowym przychodem ze sprzedaży a jednostkowym kosztem produkcji Q_{21}^*, ale zachodzą zmiany w strukturze majątku i zatrudnienia. Dzięki inwestycjom wzrasta udział majątku w tworzeniu produktu, a maleje udział pracy, czyli zatrudnienie.



Rys. 1. Optymalne trajektorie majątku firmy, zatrudnienia, produkcji i dywidendy w przypadku „niskiego" początkowego zasobu majątku i długiego horyzontu, gdy $c_1 < c_2 < c_{21}$

Faza ta trwa do momentu całkowitej zmiany techniki produkcyjnej, czyli do momentu zaprzestania produkcji w zakładzie, wykorzystującym technikę pracochłonną (kapitałooszczędną) i przeniesienia całego kapitału do zakładu produkującego techniką kapitałochłonną (pracooszczędną), czyli do momentu $\tau_{2,3}$ (ścieżka 2).

Reorganizacja procesu produkcyjnego umożliwia następnie dalsze zwiększanie produkcji (a zatem także majątku i, nieznacznie, zatrudnienia). Stosowana w tym okresie technika (pracooszczędna) wpływa na obniżenie kosztów jednostkowych produkcji. Zatem, podobnie jak w fazie początkowej, krańcowy przychód ze sprzedaży przekracza jednostkowy koszt wytwarzania i dopóki tak się dzieje, opłacalne jest zwiększanie produkcji. Zrównanie następuje, gdy produkcja osiąga poziom Q_1^*, czyli w momencie $\tau_{3,4}$ (ścieżka 3).

Od momentu $\tau_{3,4}$ przestaje być opłacalne zwiększanie produkcji (przy wykorzystaniu dotychczasowej techniki). Ponieważ jednak, w przeciwieństwie do momentu $\tau_{1,2}$, nie jest dostępna żadna bardziej efektywna technika produkcji, należy pozostać na tej ścieżce do końca horyzontu. Produkcja, majątek i zatrudnienie utrzymywane są na stałych poziomach Q_1^*, K_1^*, L_1^* gwarantujących optymalne, ustabilizowane funkcjonowanie firmy. Jest to okres wymiernych korzyści dla właścicieli firmy – akcjonariuszy, gdyż osiągnąwszy „bezpieczny" poziom rozwoju, firma może wypłacać dywidendę (ścieżka 4).

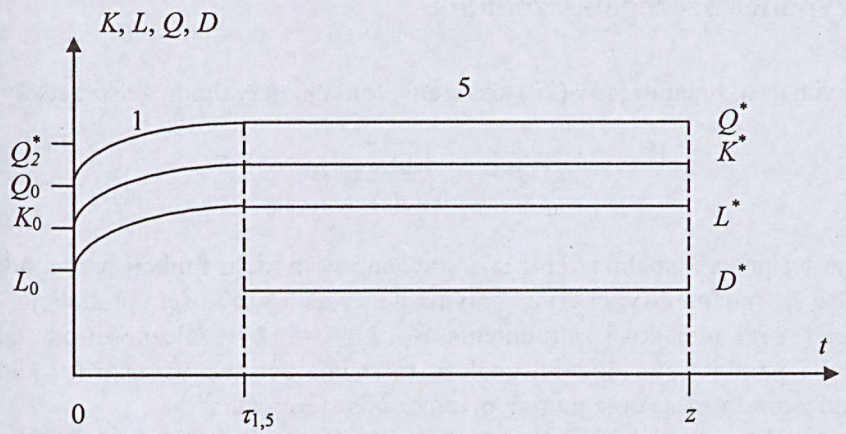
Jeśli firma ma zasób majątku, wystarczający na rozpoczęcie produkcji techniką pracooszczędną, co występuje w przypadku „wysokiego" początkowego zasobu majątku, to optymalną strategię produkcyjną wyznacza trajektoria $3 \rightarrow 4$.

ad **B.** Firma rozpoczyna działalność produkcyjną, stosując technikę pracochłonną. Rośnie poziom produkcji (majątku, zatrudnienia), rosną także przychody ze sprzedaży.

Z wklęsłości funkcji przychodu $S(Q)$ wynika jednak, że przewaga krańcowych przychodów nad jednostkowymi kosztami wytwarzania w pewnym momencie musi się skończyć. Zrównanie następuje, gdy produkcja osiąga poziom Q_2^*, czyli w momencie $\tau_{1,5}$ (ścieżka 1).

Od momentu $\tau_{1,5}$ przestaje być opłacalne zwiększanie produkcji przy stosowanej technice. Ponieważ jednak eksploatowana jest najbardziej efektywna z dostępnych technik produkcyjnych, jej zmiana byłaby zmianą na technikę mniej efektywną, sprzeczną z ideą postępu technologicznego. Produkcja, majątek i zatrudnienie utrzymywane są na stałych poziomach Q_2^*, K_2^*, L_2^* gwarantujących optymalne, ustabilizowane funkcjonowanie firmy i wypłatę dywidendy akcjonariuszom. Stan ten utrzymywany jest do końca horyzontu (ścieżka 5).

Zauważmy, iż trajektoria rozwoju składa się z dwóch istotnych etapów (faz): „dochodzenia" do magistrali (trajektoria $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ lub ścieżka 1) i rozwoju po magistrali (ścieżka 4 lub ścieżka 5), kiedy to stosowana jest najbardziej efektywna z dostępnych technik produkcji. Jeśli technika początkowa jest najbardziej efektywną z dostępnych technik produkcji, to jest ona stosowana w procesie produkcyjnym do końca horyzontu. Jeżeli jest dostępna technika bardziej efektywna to po pewnym czasie zastępuje ona technikę mniej efektywną. Zauważmy, iż zmiana dotyczy wyłącznie zastąpienia techniki kapitałooszczędnej (pracochłonnej) techniką pracooszczędną (kapitałochłonną).



Rys. 2. Optymalne trajektorie majątku firmy, zatrudnienia, produkcji i dywidendy w przypadku początkowej wartości majątku niższej od optymalnej i długiego horyzontu, gdy $c_{21} < c_2 < c_1$

Gdyby przyjąć w modelu istnienie trzeciego zakładu, stosującego technikę bardziej pracooszczędną niż pierwsza (oraz bardziej kapitałochłonną), tzn. taką, że:

$$Q_3(t) = q_3 K_3(t), \quad L_3(t) = l_3 K_3(t)$$

oraz

$$\frac{1}{q_3} > \frac{1}{q_1} > \frac{1}{q_2} \quad \text{i} \quad \frac{l_3}{q_3} < \frac{l_1}{q_1} < \frac{l_2}{q_2},$$

wtedy (o ile technika ta byłaby efektywna) mógłby nastąpić drugi proces realokacji kapitału – przesunięcia środków z zakładu 1 do zakładu 3.

Zauważmy, iż generowane przez model efektywne zmiany technologiczne wskazują na pracooszczędny kierunek zmian. Powstaje pytanie, czy jest on spójny z ogólnymi zasadami długofalowego wzrostu ekonomicznego, obserwowanymi przez ekonomistów?

S. Gomułka [2] wyprowadzając tendencje zmian technologicznych przy pewnym poziomie agregacji pisze, iż obserwowane regularności tych zmian są takie, jakby miały tendencję do oszczędzania głównie nakładów niereprodukowalnych, przede wszystkim zaś nakładów pracy ([2], s. 103).

Także E. Kurtys, przedstawiając analizę kosztów przedsiębiorstwa, zauważa że wpływ postępu technicznego na koszty własne przedsiębiorstwa przejawia się przede wszystkim w zastępowaniu pracy żywej pracą uprzedmiotowioną ([1], s. 148).

4. Przypadek szczególny zadania

Podstawiając w zadaniu (15)-(20) konkretną funkcję przychodu ze sprzedaży

$$S(Q) = p_0 \sqrt{\frac{Q_0}{Q(t)}}\, Q(t)$$

(funkcja tej postaci spełnia założenia stawiane w modelu funkcji przychodu ze sprzedaży), można wyznaczyć optymalne, stałe wielkości produkcji Q_i^*, $i=1, 2, 21$, oraz majątku i zatrudnienia K_i^*, L_i^*, $i=1, 2$ w zależności od stałych wartości i parametrów modelu, znaleźć równania ścieżek wzrostu (produkcji, majątku, zatrudnienia) oraz punkty przełączania sterowania.

Z charakterystyki ścieżek i warunków koniecznych optymalności (23)–(25) wynika, iż

$$\left.\frac{\partial S}{\partial Q}\right|_{Q=Q_i^*} = c_i, \quad i=1, 2, 21, \tag{30}$$

gdzie c_i oznacza jednostkowe koszty produkcji przy poziomie produkcji Q_i^*, $i=1, 2, 21$, określone w tabeli (s. 255).

Podstawiając pochodną wybranej funkcji przychodu $S(Q)$ do zależności (30), otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} p_0 \sqrt{\frac{Q_0}{Q_i^*}} = c_i . \tag{31}$$

Stąd:

$$Q_i^* = \frac{1}{4} Q_0 \frac{p_0^2}{c_i^2}, \quad i=1, 2, 21. \tag{32}$$

Uwzględniając (5)-(7) oraz (32), otrzymujemy następujące rozwiązania:
Dla ścieżki 2:

$$Q_{21}^* = \frac{1}{4} Q_0 \frac{p_0^2 (q_2 - q_1)^2}{w^2 (l_2 - l_1)^2} . \tag{33}$$

Dla ścieżki 4:

$$Q_1^* = \frac{1}{4} Q_0 \frac{p_0^2 q_1^2}{\left(\frac{i}{1-f} + a + w l_1\right)^2} . \tag{34}$$

$$K_1^* = \frac{1}{4} K_0 \frac{p_0^2 q_1^2}{\left(\frac{i}{1-f} + a + wl_1\right)^2}, \tag{35}$$

$$L_1^* = \frac{1}{4} L_0 \frac{p_0^2 q_1^2}{\left(\frac{i}{1-f} + a + wl_1\right)^2}. \tag{36}$$

Dla ścieżki 5:

$$Q_2^* = \frac{1}{4} Q_0 \frac{p_0^2 q_2^2}{\left(\frac{i}{1-f} + a + wl_2\right)^2}, \tag{37}$$

$$K_2^* = \frac{1}{4} K_0 \frac{p_0^2 q_2^2}{\left(\frac{i}{1-f} + a + wl_2\right)^2}, \tag{38}$$

$$L_2^* = \frac{1}{4} L_0 \frac{p_0^2 q_2^2}{\left(\frac{i}{1-f} + a + wl_2\right)^2}. \tag{39}$$

Wyznaczymy teraz ścieżki wzrostu i punkty przełączania sterowania.

- $c_1 < c_2 < c_{21}$

***Ścieżka* 1**

Charakteryzuje ją produkcja techniką pracochłonną ($K(t)=K_2(t)$) i zerowa dywidenda ($D(t)=0$). Zatem równanie różniczkowe (12) przyjmuje następującą postać:

$$\dot{K}_2(t) = (1-f)\left(S(Q) - wL_2(t) - aK_2(t)\right). \tag{40}$$

Biorąc pod uwagę (3) i (4), $Q(t) = q_2 K_2(t)$, oraz podstawiając w (40) postać wybranej funkcji przychodu, otrzymujemy równanie różniczkowe typu Bernoullie'go:

$$\dot{Q}(t) = (1-f)\, p_0 \sqrt{Q_0}\, q_2\, Q(t)^{\frac{1}{2}} - (1-f)(wl_2 + a)Q(t). \tag{41}$$

Rozwiązaniem tego równania z uwzględnieniem warunku początkowego ($Q(0)=Q_0$) jest funkcja

$$Q^*(t)=\left(\frac{C_1}{C_2}+\left(Q_0^{\frac{1}{2}}-\frac{C_1}{C_2}\right)e^{-\frac{1}{2}C_2 t}\right)^2 \quad \text{dla} \quad t\in[0,\ \tau_{1,2}], \tag{42}$$

a także odpowiednio (na mocy (10), (11) i charakterystyki ścieżki):

$$K_2^*(t)=\frac{1}{q_2}\left(\frac{C_1}{C_2}+\left(Q_0^{\frac{1}{2}}-\frac{C_1}{C_2}\right)e^{-\frac{1}{2}C_2 t}\right)^2 \quad \text{dla} \quad t\in[0,\ \tau_{1,2}] \tag{43}$$

oraz

$$L_2^*(t)=\frac{l_2}{q_2}\left(\frac{C_1}{C_2}+\left(Q_0^{\frac{1}{2}}-\frac{C_1}{C_2}\right)e^{-\frac{1}{2}C_2 t}\right)^2 \quad \text{dla} \quad t\in[0,\ \tau_{1,2}], \tag{44}$$

gdzie

$$C_1=(1-f)\,p_0\sqrt{Q_0}\,q_2, \quad C_2=(1-f)(wl_2+a). \tag{45}$$

Funkcje $Q^*(t)$, $K_2^*(t)$ i $L_2^*(t)$ są wklęsłymi funkcjami rosnącymi ($\frac{dQ}{dt}>0$, $\frac{dK_2}{dt}>0$, $\frac{dL_2}{dt}>0$, $\frac{d^2Q}{dt^2}<0$, $\frac{d^2K_2}{dt^2}<0$, $\frac{d^2L_2}{dt^2}<0$).

Punkt $\tau_{1,2}$

Jest to moment osiągnięcia przez produkcję poziomu Q_{21}^*. Funkcja $Q^*(t)$ jest funkcją ciągłą, zatem z (42)

$$Q_{21}^*=\left(\frac{C_1}{C_2}+\left(Q_0^{\frac{1}{2}}-\frac{C_1}{C_2}\right)e^{-\frac{1}{2}C_2\tau_{1,2}}\right)^2. \tag{46}$$

Z równania (46) wyznaczamy szukany punkt przełączenia $\tau_{1,2}$:

$$\tau_{1,2}=\frac{2}{C_2}\ln\frac{Q_0^{\frac{1}{2}}-\frac{C_1}{C_2}}{(Q_{21}^*)^{\frac{1}{2}}-\frac{C_1}{C_2}}. \tag{47}$$

Ścieżka 2

Produkcja jest utrzymywana na stałym poziomie Q_{21}^*, ale wielkością, która ulega zmianie, jest poziom majątku produkcyjnego. Zmianie ulega zarówno $K_1(t)$ (rośnie), jak i $K_2(t)$ (maleje). Biorąc pod uwagę stały poziom produkcji ($Q(t)=Q_{21}^*$, zatem $\dot{Q}(t)=0$) oraz (5) i (6), przekształcając (12), otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe ze względu na zmienną $K_2(t)$, którego rozwiązaniem, z uwzględnieniem warunku początkowego $K_2(\tau_{1,2}) = \frac{1}{q_2} Q_{21}^*$, jest funkcja

$$K_2^*(t) = -\frac{C_3}{C_4} + \left(\frac{1}{q_2} Q_{21}^* + \frac{C_3}{C_4}\right) e^{-C_4(t-\tau_{1,2})} \quad \text{dla} \quad t \in [\tau_{1,2},\ \tau_{2,3}], \tag{48}$$

zatem również

$$K_1^*(t) = \left(\frac{1}{q_1} Q_{21}^* + \frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{C_3}{C_4}\right) - \left(\frac{1}{q_1} Q_{21}^* + \frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{C_3}{C_4}\right) e^{-C_4(t-\tau_{1,2})} \quad \text{dla} \quad t \in [\tau_{1,2},\ \tau_{2,3}], \tag{49}$$

gdzie

$$C_3 = (1-f)\frac{q_1}{q_2 - q_1} Q_{21}^* \left(p_0 \sqrt{\frac{Q_0}{Q_{21}^*}} - \frac{wl_1 + a}{q_1}\right), \quad C_4 = (1-f)\left(w\frac{q_2 l_1 - q_1 l_2}{q_2 - q_1} + a\right). \tag{50}$$

Ścieżki zmiany zatrudnienia w obu zakładach łatwo otrzymujemy z (48) i (49) uwzględniając (3).

Funkcja $K_2^*(t)$ jest wypukłą funkcją malejącą ($\frac{dK_2}{dt} < 0$, $\frac{d^2K_2}{dt^2} > 0$), $K_1^*(t)$ jest wklęsłą funkcją rosnącą ($\frac{dK_1}{dt} > 0$, $\frac{d^2K_1}{dt^2} < 0$).

Punkt $\tau_{2,3}$

Jest to moment zakończenia reorganizacji procesu produkcyjnego. Następuje całkowite zaniechanie produkcji w zakładzie, wykorzystującym technikę pracochłonną ($K_2(\tau_{2,3})=0$)[5]. Zatem z równania (48) dla $t = \tau_{2,3}$ można wyznaczyć szukany punkt przełączenia:

$$\tau_{2,3} = \frac{1}{C_4} \ln \frac{\frac{1}{q_2} Q_{21}^* + \frac{C_3}{C_4}}{\frac{C_3}{C_4}} + \tau_{1,2}. \tag{51}$$

[5] Ciągłość funkcji $K_2^*(t)$ wynika z ciągłości funkcji $K(t)$ (założenie) oraz funkcji $s(t)$ (zob. Dodatek).

Ścieżka 3

W momencie $\tau_{2,3}$ firma wchodzi w trzecią fazę rozwoju i produkcja zaczyna ponownie wzrastać (rośnie także majątek i zatrudnienie). Ponieważ jest to ścieżka, którą charakteryzuje produkcja techniką kapitałochłonną ($K(t)=K_1(t)$) i zerowa dywidenda ($D(t)=0$), zatem, podobnie jak dla fazy 1, ścieżki wzrostu otrzymamy, rozwiązując – po koniecznych przekształceniach – równanie (12) z warunkiem początkowym ($Q(\tau_{2,3})=Q_{21}^*$):

$$Q^*(t)=\left(\frac{C_5}{C_6}+\left((Q_{21}^*)^{\frac{1}{2}}-\frac{C_5}{C_6}\right)e^{-\frac{1}{2}C_5(t-\tau_{2,3})}\right)^2 \quad \text{dla} \quad t\in[\tau_{2,3},\ \tau_{3,4}], \tag{52}$$

a także odpowiednio

$$K_1^*(t)=\frac{1}{q_1}\left(\frac{C_5}{C_6}+\left((Q_{21}^*)^{\frac{1}{2}}-\frac{C_5}{C_6}\right)e^{-\frac{1}{2}C_5(t-\tau_{2,3})}\right)^2 \quad \text{dla} \quad t\in[\tau_{2,3},\ \tau_{3,4}], \tag{53}$$

gdzie

$$C_5=(1-f)(p_0\sqrt{Q_0}\,q_1),\quad C_6=(1-f)(wl_1+a). \tag{54}$$

Ścieżkę wzrostu zatrudnienia otrzymujemy z (53), uwzględniając (3). Funkcje $Q^*(t)$ i $K_1^*(t)$ są wklęsłymi funkcjami rosnącymi ($\frac{dQ}{dt}>0$, $\frac{dK_1}{dt}>0$, $\frac{d^2Q}{dt^2}<0$, $\frac{d^2K_1}{dt^2}<0$).

Punkt $\tau_{3,4}$

Punkt $\tau_{3,4}$ to moment, w którym produkcja, majątek firmy i zatrudnienie osiągają taki poziom optymalny, w którym pozostają do końca okresu planowania (Q_1^*, K_1^*, L_1^*). Z równania (52) dla $t=\tau_{3,4}$ wyznaczamy szukany punkt przełączenia:

$$\tau_{3,4}=\frac{2}{C_6}\ln\frac{(Q_{21}^*)^{\frac{1}{2}}-\frac{C_5}{C_6}}{(Q_1^*)^{\frac{1}{2}}-\frac{C_5}{C_6}}+\tau_{2,3}. \tag{55}$$

Optymalna trajektoria „wchodzi" na magistralę (przedsiębiorstwo osiąga stan równowagi stacjonarnej), gdy długość horyzontu przekroczy pewną wartość krytyczną $\bar{z}$. W przypadku gdy $c_1<c_2<c_{21}$ jest to

$$\bar{z} = \tau_{3,4}, \tag{56}$$

gdzie $\tau_{3,4}$ wyznaczamy z (55).

• $c_{21} < c_2 < c_1$

Ścieżka 1

Wzrost produkcji, majątku i zatrudnienia opisują równania (42), (43) i (44).

Punkt $\tau_{1,5}$

Punkt $\tau_{1,5}$ to moment osiągnięcia przez produkcję poziomu Q_2^*. Wyznaczamy go analogicznie jak punkt $\tau_{1,2}$ z równania (42):

$$\tau_{1,5} = \frac{2}{C_2} \ln \frac{Q_0^{\frac{1}{2}} - \frac{C_1}{C_2}}{(Q_2^*)^{\frac{1}{2}} - \frac{C_1}{C_2}}. \tag{57}$$

W przypadku gdy $c_{21} < c_2 < c_1$ krytyczną długością horyzontu jest:

$$\bar{z} = \tau_{1,5}, \tag{58}$$

gdzie $\tau_{1,5}$ wyznaczamy z (57).

Zauważmy, że długości przedziałów $[0, \tau_{1,2})$, $[\tau_{1,2}, \tau_{2,3})$ i $[\tau_{2,3}, \tau_{3,4})$ zależą tylko od stanu początkowego i stałych parametrów modelu, natomiast nie zależą od długości horyzontu analizy. W miarę jego wydłużania, zmianie (wydłużeniu) ulega tylko faza ostatnia (przedział $[\tau_{3,4}, z]$ lub odpowiednio $[\tau_{1,5}, z]$) – faza równowagi stacjonarnej (magistrala).

5. Przykład optymalnej strategii produkcyjnej przedsiębiorstwa

Przedsiębiorstwo Cukiernicze SA jest jednym z największych w Polsce producentów słodyczy i proponuje odbiorcom szeroką ofertę asortymentową. Bogata gama wyrobów oferowanych przez spółkę pozwala na utrzymywanie stabilnej pozycji rynkowej mimo ciągle zmieniających się warunków zewnętrznych. Każdego roku systematycznie zwiększa liczbę wprowadzanych na rynek nowych produktów. Dział technologiczny, współpracując z przyzakładowymi laboratoriami, prowadzi prace nad udoskonaleniem stosowanych przez spółkę receptur, a także opracowuje technologie nowych produktów. Zgodnie z założeniami zarządu kierunek zmian technologicznych powinien być taki, aby zwiększać zdolności produkcyjne, zmniejszać pracochłonność oraz poprawiać atrakcyjność produkowanych wyrobów.

Za początek okresu analizy przyjmiemy 1 stycznia 2000 roku i ustalimy dziesięcioletni horyzont ($z = 10$)[6].

Początkowy zasób majątku i zatrudnienie w Przedsiębiorstwie Cukierniczym SA wynoszą odpowiednio: $K_0 = 136\,692$ tys. zł, $L_0 = 1078$ osób. Początkowa wielkość produkcji i przychód ze sprzedaży kształtują się na poziomach: $Q_0 = 17$ tys. ton/rok, $S(Q_0) = 160\,369$ tys. zł.

Pozostałe parametry:
$a = 0{,}1$ (stopa deprecjacji), $f = 0{,}28$ (obowiązująca stawka podatku dochodowego od osób prawnych), $i = 0{,}05$ (stopa zwrotu kapitału własnego), $p_0 = 9433{,}47$ (średnia jednostkowa cena sprzedaży – za tonę), $w = 1900$ zł/mies. (przeciętne wynagrodzenie miesięczne).

Parametry charakteryzujące stosowaną technikę produkcyjną (zob. (3) i (4)):

$$\frac{1}{q_2} = 8237{,}23 \text{ (kapitałochłonność produkcji)},$$

$$\frac{l_2}{q_2} = 0{,}06350 \text{ (pracochłonność produkcji)}.$$

Istnieje możliwość zmiany techniki na pracooszczędną – w większym stopniu (bardziej kapitałochłonną) niż dotychczas stosowana – zgodnie z wytycznymi zarządu. Rodzi się pytanie, czy taka zmiana będzie zmianą efektywną i czy spowoduje wzrost zysku przez obniżenie jednostkowych kosztów produkcji?

Rozważymy dwa warianty możliwych zmian technologicznych[7] i sformułujemy optymalne strategie produkcyjne, będące konsekwencją wyboru odpowiednich technik.

Pierwszy wariant zmiany techniki produkcyjnej wymaga zaangażowania majątku o wartości 140 292 tys. zł oraz zatrudnienia 998 pracowników. Nową technikę charakteryzują następujące parametry:

$$\frac{1}{q_1} = 8250{,}83 \text{ (kapitałochłonność)}, \quad \frac{l_1}{q_1} = 0{,}06023 \text{ (pracochłonność)}.$$

Wskazują one, że technika ta jest pracooszczędna (kapitałochłonna) w większym stopniu niż technika stosowana aktualnie i generuje niższe jednostkowe koszty produkcji (spełniona jest nierówność: $c_1 < c_2 < c_{21}$). Zatem w świetle

[6] Wykorzystano dane publikowane w rocznych raportach spółki. Ze względu na brak dostępu do danych o wysokości wynagrodzeń, przyjęto do obliczeń średnie wynagrodzenie publikowane przez ZUS.

[7] Postulujemy możliwe, aczkolwiek hipotetyczne wartości majątku i zatrudnienia potrzebne w produkcji opartej na alternatywnych technikach wytwarzania.

naszego modelu rozwiązaniem optymalnym jest dla firmy strategia produkcyjna wyznaczona przez trajektorię $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$.

Po około pięciu miesiącach ($\tau_{1,2}=0{,}41$, zob. (47)), gdy produkcja osiągnie poziom $Q_{21}^* = 21\,633{,}13$t w skali roku (zob. (33)), należałoby dokonać zmiany techniki produkcyjnej. Zakład produkujący według dotychczasowej techniki – pracochłonnej – należałoby zamknąć, dokonując dyslokacji kapitału ($K^*(\tau_{2,3}) = 140\,292$ tys. zł) oraz pracy ($L^*(\tau_{2,3}) = 998$ osób) na rzecz nowego zakładu. W nowym zakładzie produkcja prowadzona jest techniką pracooszczędną. Modelowa faza reorganizacji procesu produkcyjnego jest dla tego przedsiębiorstwa bardzo krótka, zmiana jest właściwie natychmiastowa ($\tau_{2,3}=0{,}42$, zob. (51)).

Następnie, po trwającym około roku i ośmiu miesięcy ($\tau_{3,4}=1{,}69$, zob. (55)) intensywnym wzroście, gdy produkcja osiąga poziom $Q_1^* = 33\,803{,}5$t w skali roku (zob. (34)), wartość majątku wynosi $K_1^* = 197\,814{,}4$ tys. zł (zob. (35)), a zatrudnienie osiąga poziom $L_1^* = 2750$ osób (zob. (36)), rozpoczyna się faza stacjonarna, w której produkcja, majątek i zatrudnienie są utrzymywane na stałych poziomach Q_1^*, K_1^*, L_1^*. W fazie tej wypłacana jest dywidenda akcjonariuszom w wysokości 90% nadwyżki finansowej.

Drugi wariant zmiany techniki produkcyjnej wymaga zaangażowania majątku o wartości 143 492 tys. zł oraz zatrudnienia 1028 pracowników. Nową technikę charakteryzują następujące parametry:

$$\frac{1}{q_1} = 8438{,}82 \text{ (kapitałochłonność)}, \qquad \frac{l_1}{q_1} = 0{,}06076 \text{ (pracochłonność)}.$$

Parametry wskazują, że technika ta jest pracooszczędna (kapitałochłonna) w większym stopniu niż technika stosowana aktualnie, ale generuje wyższe jednostkowe koszty produkcji (spełniona jest nierówność: $c_{21} < c_2 < c_1$). Rozwiązaniem optymalnym jest dla firmy strategia wyznaczona przez trajektorię $1 \rightarrow 5$. Strategia ta nie przewiduje zmiany techniki produkcyjnej.

Przez około dwa lata i cztery miesiące ($\tau_{1,5}=2{,}38$, zob. (57)) trwa okres intensywnego wzrostu, produkcja prowadzona jest techniką początkową – pracochłonną. Gdy produkcja osiągnie poziom $Q_2^* = 47\,958$ t w skali roku (zob. (37)), majątek będzie miał wartość $K_2^* = 385\,618$ tys. zł (zob. (38)), a zatrudnienie osiągnie poziom $L_2^* = 3041$ osób (zob. (39)), rozpoczyna się faza stacjonarna, w której produkcja, majątek i zatrudnienie utrzymywane są na stałych poziomach Q_2^*, K_2^*, L_2^*. W fazie tej powinna rozpocząć się wypłata dywidendy dla akcjonariuszy w wysokości 90% nadwyżki finansowej.

Podsumowanie

O powodzeniu przedsięwzięcia produkcyjnego decyduje m.in. wybór techniki, którą prowadzona jest produkcja. Analiza rozwiązania sformułowanego zadania pozwala określić optymalną strategię alokacji kapitału przedsiębiorstwa między dwa zakłady stosujące różne techniki produkcyjne. Wskazuje na celowość i kierunek zmian technologicznych lub ich bezzasadność. Zgodnie z założeniami modelu, firma może uzyskać tę samą wielkość produkcji, ponosząc mniejsze nakłady pracy przy większych nakładach majątku produkcyjnego (techniką kapitałochłonną i pracooszczędną) lub odwrotnie (techniką kapitałooszczędną i pracochłonną). Z założenia charakterystyki technik nie ulegają zmianom, zatem współczynniki kapitało- i pracochłonności są stałe. Należy jednak dodać, iż jakkolwiek niezmienność w czasie tych parametrów stanowi istotne uproszczenie z punktu widzenia zastosowań, nie ma wpływu ani na liczbę, ani na kolejność faz, występujących w rozwiązaniu. Przesądza jedynie o typie magistrali – jest ona tu stałą funkcją czasu.

Rozwiązanie zadania wyróżnia dwa warianty strategii optymalnych w zależności od efektywności dostępnych technik produkcji. Jeżeli strategia postuluje zmianę techniki produkcyjnej, zawsze jest to zmiana oszczędzająca nakłady pracy i zwiększająca wkład majątku w tworzenie produktu.

W długim horyzoncie strategia optymalna składa się z dwóch zasadniczych faz: „dochodzenia" do magistrali i rozwoju na niej. Faza „dochodzenia" do magistrali to okres intensywnego wzrostu oraz, jeżeli jest to uzasadnione analizą efektywności, zmiany stosowanej techniki produkcyjnej.

Przytoczony przykład ukazuje przedsiębiorstwo stojące w obliczu możliwości zmiany techniki produkcyjnej. Wyniki teoretyczne pozwalają sformułować strategie optymalne w dwóch analizowanych przypadkach. W pierwszym wariancie, następuje nierealne z ekonomicznego punktu widzenia, natychmiastowe przesunięcie wszystkich środków produkcji z techniki „starej" na „nową".

W obu wariantach nie do przyjęcia są także gwałtowne i radykalne zmiany w poziomie zatrudnienia. Są one jednak konsekwencjami przyjętych założeń upraszczających w modelu (m.in. pominięcia kosztów zmiany technologii). Również wyznaczone długości poszczególnych faz mogą być trudne do realizacji, ale wskazują, że czas dochodzenia do fazy stacjonarnej (równowagi) powinien być jak najkrótszy.

Drugi wariant pokazuje, iż nie każda proponowana zmiana na technikę pracooszczędną i kapitałochłonną musi być efektywna.

Dodatek

Przebieg zmienności funkcji $s^*(t)$

Sterowanie $s^*(t)$ nie musi być funkcją ciągłą. Z charakterystyki ścieżek wynika, iż nieciągłość może wystąpić w punktach: $\tau_{1,2}$ oraz $\tau_{2,3}$. Zbadajmy zachowanie funkcji $s(t)$ w punktach brzegowych ścieżki 2.

$$\lim_{t\to\tau_{1,2}^-} Q(t) = \lim_{t\to\tau_{1,2}^-} \left(q_2(1-s(t))K(t)\right) = Q_{21}^*$$

oraz

$$\lim_{t\to\tau_{1,2}^+} Q(t) = \lim_{t\to\tau_{1,2}^+} \left(\left((q_1-q_2)s^*(t)+q_2\right)K(t)\right) = Q_{21}^*.$$

Ponieważ $K(t)$ jest funkcją ciągłą, z powyższych zależności wynika, iż spełniona musi być równość

$$\lim_{t\to\tau_{1,2}^-} \left(q_2\left(1-s^*(t)\right)\right) = \lim_{t\to\tau_{1,2}^+} \left(\left((q_1-q_2)s^*(t)+q_2\right)\right),$$

z której wynika (ponieważ $q_1 \neq q_2$, a $\lim_{t\to\tau_{1,2}^-} s^*(t) = 0$), że

$$\lim_{t\to\tau_{1,2}^+} s^*(t) = 0.$$

Analogicznie można wykazać, że

$$\lim_{t\to\tau_{2,3}^-} s^*(t) = 1.$$

Funkcja $s^*(t)$ jest zatem funkcją ciągłą.

Literatura

[1] Bednarski L., Borowiecki R., Duraj J., Kurtys E., Waśniewski T., Wersty B., *Analiza ekonomiczna przedsiębiorstwa*, Wydawnictwo AE im. O. Langego we Wrocławiu, Wrocław 1998

[2] Gomułka S., *Teoria innowacji i wzrostu gospodarczego*, CASE, Warszawa 1998

[3] Hilten O. van, Kort P.M., Loon P. J.J.M. van, *Dynamic Policies of the Firm. An Optimal Control Approach*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1993

[4] Loon P.J.J.M. van, *A Dynamic Theory of the Firm: Production, Finance and Investment*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 218, Springer-Verlag, Berlin 1983
[5] Panek E., *Optymalizacja procesów wzrostu gospodarczego w świetle teorii sterowania*, PWN, Warszawa – Poznań 1989
[6] Panek E., *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2000
[7] Schijndel G.J.C.Th. van, *Dynamic Firm and Investor Behaviour Under Progresive Personal Taxation*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 305, Springer Verlag, Berlin 1988
[8] Vickers D., *The Theory of the Firm: Production, Capital and Finance*, McGraw Hill, New York 1968

OPTIMAL CAPITAL ALLOCATION BETWEEN TWO SECTIONS OF A FIRM

Summary

The paper focuses on the problem of distribution of capital and labour between two sections of a one firm. Each section represents different production activity: capital--intensive or labour-intensive. The optimal control theory is applied to solve the problem. As resultes we obtain two types of optimal strategies. The firm can choose one of them depends on the activities' efficiency. The change of the one activity for another always means substituting labour for capital goods. In the long planning horizon the optimal trajectory attains a balanced growth path (a BGP).

Obtained theoretical resultes are applied to a real firm, for which optimal capital allocation strategy is derived.