Roman KIEDROWSKI

Katedra Ekonomii Matematycznej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

RÓWNOWAGA DŁUGOOKRESOWA W OGÓLNYM MODELU KONKURENCJI KLASYCZNEJ

Wstęp

W literaturze poświęconej równowadze i stabilności złożonych systemów ekonomicznych dominującą pozycję zajmuje, pochodząca od L. Walrasa, neoklasyczna teoria równowagi ogólnej (walrasowskiej). Jej współczesna, zmatematyzowana postać, ukształtowana w połowie ubiegłego stulecia w głośnych pracach K. Arrowa, G. Debreu, L. McKenziego i wielu ich kontynuatorów, oceniana z formalnego, metodologicznego punktu widzenia, powszechnie uchodzi za najbardziej dojrzałą teorię ekonomiczną. Poświęcona jej literatura liczy setki artykułów i dziesiątki książek (m.in. [5], [1], [12], [33], [25], [24], [31, rozdz. 3 i 4]). Jej przedmiotem są modele gospodarki, w których *explicite* wyodrębnia się wielu konsumentów, dążących do maksymalizacji użyteczności konsumpcji i wielu producentów (przedsiębiorstw), zmierzających do maksymalizacji zysków. Zakłada się, że każde przedsiębiorstwo może wytwarzać wiele różnych produktów, zużywanych w procesach produkcyjnych lub będących przedmiotem konsumpcji. Technologie produkcji poszczególnych przedsiębiorstw opisują przestrzenie produkcyjne o bardzo ogólnych własnościach. Z postulatu maksymalizacji zysku wynika podaż przedsiębiorstw, ich popyt zaopatrzeniowy oraz popyt na siłę roboczą. Popyt na siłę roboczą konfrontowany jest z kolei z jej podażą, określaną przez konsumentów. Ponieważ wszystkie przedsiębiorstwa są wyłączną własnością pewnych grup konsumentów, wartość konsumpcji każdego konsumenta ograniczona jest sumą jego wynagrodzenia za pracę i ewentualnych udziałów w zyskach przedsiębiorstw.

Głównym osiągnięciem teorii równowagi ogólnej są egzystencjalne twierdzenia o istnieniu takiego układu cen równowagi, dla którego:

- globalny popyt na każdy towar (łącznie z siłą roboczą) równy jest jego podaży,
- wszyscy konsumenci w ramach swojego ograniczenia budżetowego maksymalizują użyteczność konsumpcji,
- wszyscy producenci maksymalizują zyski.

Teoria równowagi ogólnej, niezależnie od swojej formalnej elegancji i zaawansowanego aparatu matematycznego, wywołuje liczne wątpliwości i kontrowersje, jeśli oceniać ją pod kątem trafności opisu rzeczywistych systemów ekonomicznych. Przykładem jej kompleksowej krytyki jest znana książka J. Kornaia *Anti-Equilibrium*, w której autor twierdzi wręcz, że szkoła równowagi ogólnej stała się hamulcem w rozwoju myśli ekonomicznej i wymienia aż 12 jej cech charakterystycznych, będących przedmiotem krytyki [22, s. 56-62].

Najsłabszym punktem omawianej teorii są trudności z przedstawieniem przekonującego wyjaśnienia, w jaki sposób gospodarka osiąga stan równowagi ogólnej. W celu udzielenia odpowiedzi na to pytanie standardowo przywołuje się, pochodzący od L. Walrasa, opis procesu znanego pod francuską nazwą *tâtonnement*. Proces ten jest scentralizowaną, iteracyjną procedurą równoczesnego korygowania cen wszystkich towarów w zależności od relacji między popytem i podażą, przebiegającą według następującego schematu.

1. Procesem kieruje pewien podmiot, zwany umownie maklerem (*auctioner*), który na wstępie arbitralnie ustala ceny wszystkich towarów i podaje je do wiadomości producentów i konsumentów.
2. Kierując się podanymi cenami, producenci ustalają optymalne plany produkcji, a konsumenci optymalną konsumpcję i podaż siły roboczej. Swoje ustalenia przekazują maklerowi.
3. Makler oblicza globalny popyt na każdy towar i porównuje go z globalną podażą. Następnie podnosi ceny tych towarów, na które globalny popyt przekracza globalną podaż i obniża ceny towarów, których podaż jest większa od popytu. Skorygowane ceny ogłasza producentom i konsumentom, po czym procedura wraca do punktu drugiego.
4. Produkcja, wymiana i konsumpcja dóbr następują dopiero wówczas, gdy w wyniku kolejnych korekt osiągnięte zostaną ceny równowagi.

Sformalizowany opis powyższej procedury, określany mianem dynamicznego modelu równowagi ogólnej, sprowadza się do układu równań różniczkowych lub różnicowych dynamiki cen. Przy odpowiednich założe-

niach dowodzi się, że układ taki jest stabilny, czyli że w wyniku procesu *tâtonnement* ceny, a w konsekwencji wszystkie pozostałe zmienne modelu, zbieżne są do swoich wartości w równowadze (np. [31, rozdz. 4], [34, rozdz. 3], [25, rozdz. 2], [18]). Chociaż twierdzenia o stabilności dynamicznego modelu równowagi ogólnej są istotnym uzupełnieniem twierdzeń o istnieniu równowagi, to wątpliwa pozostaje kwestia realności procesu, jakiego dotyczą. Poza bardzo szczególnymi przypadkami, w rzeczywistości nikt bowiem nie czeka z uruchomieniem produkcji czy przeprowadzeniem transakcji aż jakiś scentralizowany podmiot ustali ceny równowagi, bilansujące globalny popyt z globalną podażą. Wymiana dóbr odbywa się z reguły po cenach innych niż ceny równowagi, a zmiany cen są reakcjami na rzeczywiste, a nie wirtualne rozbieżności między popytem i podażą.

Próby uwzględnienia tego oczywistego faktu przy konstruowaniu dynamicznych modeli równowagi walrasowskiej są stosunkowo nieliczne i dotyczą raczej modeli samej tylko wymiany ([35], [19], [27], [18, s. 772-791], [25, s. 82-89]). Próbę sformalizowanego opisu procesu osiągania równowagi walrasowskiej z udziałem producentów i konsumentów realnie funkcjonujących w warunkach nierównowagi podjął jedynie F.M. Fisher ([13], [14]). Odejście w wymienionych pracach od założeń procesu *tâtonnement* stwarza poważne trudności z pogodzeniem neoklasycznego aksjomatu o optymalnym zachowaniu podmiotów z założeniem, że podejmują oni autonomiczne decyzje w warunkach nierównowagi, dysponując ograniczonymi informacjami. W konsekwencji uzyskane wyniki okupione są innymi, silnymi założeniami.

Zasadniczo odmienna koncepcja zarówno samej równowagi, jak i mechanizmu jej osiągania wyłania się z prac klasyków ekonomii – A. Smitha, D. Ricardo i K. Marksa. Każdy z tych autorów, koncentrując się na długim horyzoncie czasowym, przedstawił opis funkcjonowania gospodarki, w którym kluczową rolę odgrywa dążenie właścicieli kapitału do osiągania wysokich stóp zysku. Prowadzi ono do ciągłych przepływów kapitału z przedsiębiorstw o niskich stopach zysku do tych, w których stopy te są wysokie. Przepływy kapitału następują w warunkach nierównowagi na rynku produktów, co powoduje zmiany cen i (ewentualnie) wzrost lub spadek produkcji w wyniku zmiany stopnia wykorzystania mocy produkcyjnych przedsiębiorstw. Powyższe przepływy kapitału oraz dostosowania cen i produkcji do nierównowagi określane są ogólnym mianem procesu konkurencji klasycznej. Proces ten, zgodnie z poglądami klasyków ekonomii, prowadzi do wyrównania się stóp zysku lub ich

oscylowania (grawitacji) wokół wspólnej wartości[1]. Ponieważ stopy zysku zależą bezpośrednio wyłącznie od cen, towarzyszy temu zbieżność cen rynkowych do tzw. cen produkcji, zapewniających równość stóp zysku.

Klasyczna idea równowagi jako stanu gospodarki, w którym osiągnięte zostały identyczne stopy zysku, została sprecyzowana i rozwinięta w przełomowej pracy von Neumanna [28], w której przedstawiona została dualna zależność między zagadnieniem wyznaczania cen gwarantujących równość stóp zysku a zagadnieniem wyznaczania proporcji produkcji zapewniających równomierny wzrost gospodarki. W szczególności J. von Neumann podał definicję i udowodnił istnienie równowagi rozumianej jako stan, w którym

- stopy zysku są identyczne,
- gospodarka zdolna jest do równomiernego wzrostu produkcji ze stopą równą równomiernej stopie zysku[2].

Przy spełnieniu określonych warunków nałożonych na technologię produkcji, ów równomierny wzrost odbywa się przy pełnym wykorzystaniu wytworzonych dóbr, tj. przy zachowaniu równowagi między popytem i podażą[3].

W latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych ubiegłego stulecia równowaga klasyczna (neumannowska) była przedmiotem intensywnych badań (zob. m.in. [32], [26], [23], [16], [4]). Przez stosunkowo długi czas nie podejmowano jednak prób matematycznego opisu i analizy procesu wyrównywania się stóp zysku (czy też szerzej, dochodzenia gospodarki do równowagi neumannowskiej) w wyniku, zarysowanego przez klasyków, procesu konkurencji klasycznej. Co więcej, pierwsze prace, jakie pojawiły się na ten temat, podawały w wątpliwość tezę o zbieżności procesu konkurencji klasycznej. Opinia taka rozpowszechniona została w szczególności wskutek prac Nikaido ([29], [30]), w których autor, posługując się dwu-produktowym modelem konkurencji klasycznej pokazał, że zbieżność tego procesu nie ma charakteru uniwersalnego, lecz zależy od relacji między kapitałochłonnością produkcji obu produktów (dobra kapitałowego i konsumpcyjnego). Kolejne, relatywnie proste modele procesu konkurencji klasycznej, pojawiły się dopiero w latach osiemdziesiątych XX wieku.

---

[1] Odpowiednie cytaty z prac Smitha, Ricardo i Marksa można znaleźć w książce Duménila i Lévy'ego [10].

[2] Równość taka jest możliwa jedynie w abstrakcyjnych systemach ekonomicznych bez konsumpcji, w których cała produkcja wytworzona w jednym okresie może być użyta jako nakład produkcyjny w okresie następnym.

[3] Jest tak w przypadku równowagi von Neumanna w dynamicznym modelu Leontiefa.

Wnioski płynące z ich analizy generalnie potwierdzały opinię Nikaido, że w zależności od przyjmowanych szczegółowych założeń modelowych, stan równowagi klasycznej może być zarówno stabilny, jak też niestabilny (m.in. [2], [3], [15], [20]).

Silnych argumentów przemawiających za prawdziwością klasycznej tezy o wyrównywaniu się stóp zysku dostarczyli G. Duménil i D. Lévy, którzy przedstawili szereg publikacji, zawierających dowody stabilności równowagi w modelach opisujących proces konkurencji klasycznej w sposób bardziej satysfakcjonujący od innych autorów ([6], [7], [8], [9], [10], [11]).

Najogólniejszy ze swych modeli (zawierający jednak pewne niespójności), Duménil i Lévy przedstawili w pracy pod znamiennym tytułem *The Stability of Long-Term Equilibrium in a General Disequilibrium Model* [6]. Jak można wnioskować na podstawie tytułu, intencją autorów było w niej udowodnienie zbieżności procesów konkurencji klasycznej w modelu, który z punktu widzenia jego ogólności byłby porównywalny z neoklasycznymi (walrasowskimi) modelami równowagi ogólnej, będąc zarazem wolnym od ich ograniczeń.

W prezentowanym poniżej artykule przedstawiamy model konkurencji klasycznej, będący rozwinięciem wspomnianego modelu z pracy Duménila i Lévy'ego [6]. Różni się on od swojego francuskiego pierwowzoru (a zarazem od wszystkich modeli równowagi walrasowskiej) dwiema istotnymi cechami.

- Model jest opisem gospodarki, wytwarzającej nie tylko dobra konsumpcyjne i pośrednie (służące jako bieżące nakłady produkcyjne), lecz także dobra inwestycyjne, których odpowiednie wiązki tworzą zasoby majątku trwałego przedsiębiorstw. Zawarta w nim charakterystyka procesu inwestycyjnego sprawia, że staje się klasycznym modelem wzrostu[4].
- W porównaniu z modelem Duménila-Lévy'ego, cechują go rozbudowane, szczegółowe charakterystyki procesu decydowania przez poszczególnych kapitalistów o wysokości środków przeznaczonych na akumulację kapitału w przedsiębiorstwach, a także pogłębione analizy źródeł finansowania tej akumulacji.

Wśród podstawowych cech wspólnych obu modelom, różniących je od dynamicznych modeli równowagi walrasowskiej, można wymienić następujące.

[4] W pracach Duménila-Lévy'ego ([8], [10]) również prezentowane są modele z majątkiem trwałym. Są to jednak znacznie prostsze modele dwu- i trójproduktowe, w których majątek trwały jest traktowany jako jednorodny produkt wytwarzany przez jedno przedsiębiorstwo.

- Brak jakiegokolwiek organu koordynującego. Wszystkie podmioty podejmują decyzje autonomicznie, generalnie w warunkach nierównowagi.
- Oprócz producentów i konsumentów wyodrębnia się właścicieli kapitału – kapitalistów. W zależności od definicji kapitału, powstaje on z podziału zysków lub przychodów przedsiębiorstw na konsumpcję kapitalistów i akumulację. Decyzje kapitalistów o alokacji kapitału w przedsiębiorstwach zależą z kolei od rentowności przedsiębiorstw i determinują ich zdolności produkcyjne.
- Udziały każdego kapitalisty w zyskach poszczególnych przedsiębiorstw zmieniają się w czasie, w zależności od tego, jak lokuje on swoje kapitały. (W modelach równowagi walrasowskiej właścicielami przedsiębiorstw są konsumenci o stałych udziałach w zyskach, którzy, inaczej niż kapitaliści, wydają je w całości na konsumpcję).
- Neoklasyczne założenie o maksymalizacji zysków przez przedsiębiorstwa zastąpione jest założeniem o ich adaptacyjnym zachowaniu, przejawiającym się dostosowywaniem cen i wielkości produkcji do różnicy między popytem i podażą (do zmian zapasów).
- Równowaga w obu modelach jest typem równowagi neumannowskiej, w której (przy stałych cenach i równych stopach zysku) wszystkie zmienne ilościowe rosną z jednakową stopą wzrostu. (Równowaga walrasowska jest stanem stacjonarnym gospodarki, w którym wszystkie zmienne są stałe).
- Inaczej niż w modelach walrasowskich, w obu modelach konkurencji klasycznej mamy do czynienia ze zbiorem różnych stanów równowagi mocy continuum.

Przedstawione powyżej cechy można zaliczyć do tych charakterystyk modeli konkurencji klasycznej, które pozytywnie odróżniają je od modeli równowagi walrasowskiej. Dla pełności obrazu należy jednak dodać, że w porównaniu z modelami równowagi walrasowskiej, modele te są uboższe przynajmniej pod trzema względami. Po pierwsze zakłada się, że każde przedsiębiorstwo wytwarza tylko jeden produkt (brak tzw. produkcji łącznej), po drugie rozpatruje się tylko liniową technologię produkcji, po trzecie pomija się rynek siły roboczej, przyjmując założenie, że płaca realna jest stała w czasie, a podaż siły roboczej zawsze przekracza popyt.

W artykule omawiamy kolejno poszczególne segmenty modelu, a następnie przedstawiamy twierdzenie o istnieniu zbioru stanów równowagi i prezentujemy jego podstawowe własności. Gotowa już analiza stabilności modelu, ze względu na ograniczone ramy artykułu, będzie przedmiotem odrębnej publikacji.

1. Model klasycznej alokacji kapitału

1.1. Bilans podaży i popytu

Model opisuje funkcjonowanie gospodarki, w której, w kolejnych okresach $t=0, 1, 2, \ldots$ nieskończonego horyzontu czasowego, działalność produkcyjną prowadzi n przedsiębiorstw. Każde przedsiębiorstwo wytwarza tylko jeden produkt, dlatego numeracja produktów pokrywa się z numeracją przedsiębiorstw. Przez Y_t^i oznaczamy produkcję produktu i w okresie t, a przez S_t^i – jego zapas na początek tego okresu, pozostały w przedsiębiorstwie i z okresu poprzedniego, $t-1$ [5]. Obie zmienne wyrażone są w jednostkach fizycznych. Suma $S_t^i+Y_t^i$ stanowi podaż produktu i. Produkt ten jest oferowany przez przedsiębiorstwo i, które ustala jego cenę p_t^i na podstawie relacji między popytem i podażą w okresie $t-1$. Cena ta, stała w okresie t, może ulec zmianie z początkiem okresu $t+1$.

Symbolami Z_t^i oraz I_t^i oznaczamy odpowiednio zużycie bieżące i nakłady inwestycyjne produktu i w jednostkach fizycznych w okresie t, a symbolami KP_t^i, KK_t^i – konsumpcję tego produktu, odpowiednio, przez pracowników najemnych i kapitalistów.

Zakładamy, że podaż każdego produktu jest zawsze wystarczająca dla zaspokojenia popytu. W każdym okresie t spełniony jest więc następujący układ równań bilansowych:

$$S_{t+1}^i=S_t^i+Y_t^i-D_t^i \qquad (i=1,\ldots,n), \tag{1}$$

w którym $D_t^i=Z_t^i+KP_t^i+KK_t^i$ przedstawia globalny popyt na produkt i [6].

1.2. Technologia produkcji i inwestowania

Zakładamy, że technologia produkcji charakteryzuje się brakiem substytucyjności nakładów oraz liniowymi zależnościami między nakładami czynników produkcji a wielkością produkcji (tzw. zjawisko proporcjonalnych przychodów). Wytworzenie każdej kolejnej jednostki dowolnego

[5] Zakładamy, że w każdym okresie producenci i konsumenci kupują tylko tyle produktów, ile w tym okresie zużywają czy konsumują. Tym samym, na początek okresu t wszystkie zapasy produktów znajdują się w rękach ich producentów.

[6] Czynniki determinujące poszczególne składniki popytu i podaży zostaną omówione później.

produktu wymaga stałych (minimalnych) nakładów materiałowych, nakładów pracy oraz nakładów (zasobów) dóbr majątkowych.

Bieżący nakład produktu i niezbędny do wytworzenia jednostki produktu j opisuje współczynnik materiałochłonności $a_{ij} \geqslant 0$, natomiast nakład pracy konieczny do wytworzenia jednostki tego produktu opisuje współczynnik pracochłonności $l_j > 0$.

Analogicznie $b_{ij} \geqslant 0$ przedstawia nakład (zasób) dobra majątkowego i niezbędny do wytworzenia jednostki produktu j. Współczynnik b_{ij} nazywamy współczynnikiem kapitałochłonności (majątkochłonności).

Oznaczmy przez A i B macierze współczynników materioło- i kapitałochłonności

$$A = [a_{ij}], \qquad B = [b_{ij}] \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

a przez A^j i B^j kolumny j tych macierzy. Trójka (A^j, B^j, l_j) opisuje wszystkie nakłady konieczne do wytworzenia jednostki produktu j.

Przyjmujemy, że produkcja każdego produktu, oprócz nakładu pracy, wymaga przynajmniej jednego bieżącego nakładu materiałowego i przynajmniej jednego nakładu majątkowego. Wszystkie kolumny macierzy A i B mają zatem przynajmniej jeden dodatni element.

Bieżące nakłady materiałowe a_{ij} oraz nakłady pracy l_j ulegają całkowitemu zużyciu (wyczerpaniu) w procesie wytwarzania jednostki produktu j. W tym samym procesie nakład majątkowy b_{ij} zużywa się tylko częściowo, w wysokości δb_{ij}, gdzie δ jest współczynnikiem deprecjacji majątku trwałego $(0 < \delta < 1)$, o którym zakładamy upraszczająco, że jest jednakowy dla wszystkich dóbr majątkowych.

W konsekwencji proces produkcyjny, w wyniku którego otrzymujemy jednostkę produktu j możemy traktować jako transformację wektora nakładów w wektor wyników przedstawioną w tabeli 1.

Tabela 1. Charakterystyka jednostkowego procesu produkcyjnego

	Nakłady	Wyniki
praca	l_j	0
produkt 1	$a_{1j} + b_{1j}$	$(1-\delta)b_{1j}$
⋮	⋮	⋮
produkt j	$a_{jj} + b_{jj}$	$(1-\delta)b_{jj} + 1$
⋮	⋮	⋮
produkt n	$a_{nj} + b_{nj}$	$(1-\delta)b_{nj}$

Zakładamy, że każde przedsiębiorstwo gromadzi poszczególne składniki swojego majątku trwałego w takich proporcjach, jakie wynikają z technologii produkcji. Pozwala to na wprowadzenie nowego pojęcia – jednostki majątku trwałego przedsiębiorstwa j. Definiujemy ją jako wiązkę (wektor kolumnowy) B^j, komplementarnych względem siebie, dóbr majątkowych, niezbędnych do wytworzenia jednostki produktu j. W konsekwencji zasób majątku trwałego w przedsiębiorstwie j możemy traktować jako pewną wielokrotność $K_t^j B^j$ wektora B^j, interpretując zmienną K_t^j jako liczbę jednostek majątku trwałego tego przedsiębiorstwa w okresie t.

Uwalniamy się w ten sposób od konieczności odrębnego rozpatrywania różnych dóbr majątkowych, składających się na majątek trwały poszczególnych przedsiębiorstw, co – jak zobaczymy dalej – okaże się bardzo wygodne.

Przedsiębiorstwo, dysponując K_t^j jednostkami majątku trwałego, może maksymalnie wytworzyć $Y_t^j = K_t^j$ jednostek produktu j, angażując $l^j K_t^j$ jednostek pracy i zużywając $a_{ij} K_t^j$ jednostek poszczególnych nakładów materiałowych. Zużycie (deprecjacja) jego majątku wyniesie wówczas δK_t^j jednostek.

Sytuacja taka występuje wówczas, gdy majątek trwały wykorzystany jest w 100%, co jest raczej rzadkością. W ogólnym przypadku stopień wykorzystania posiadanego majątku trwałego, decydujący o wielkości produkcji, jest przedmiotem decyzji przedsiębiorstwa. Decyzja taka sprowadza się do ustalenia wartości wskaźnika wykorzystania majątku trwałego (mocy produkcyjnych) u_t^j $(0 \leqslant u_t^j \leqslant 1)$. Jeżeli $u_t^j < 1$, to temu samemu majątkowi trwałemu K_t^j odpowiadają proporcjonalnie mniejsze nakłady bieżące, mniejsza produkcja oraz mniejszy stopień zużycia majątku, co przedstawia tabela 2.

Tabela 2. Charakterystyka procesu produkcyjnego z niepełnym wykorzystaniem majątku trwałego

	Nakłady	Wyniki
majątek trwały	K_t^j	$(1-\delta u_t^j) K_t^j$
praca	$l_j u_t^j K_t^j$	0
produkt 1	$a_{1j} u_t^j K_t^j$	0
⋮	⋮	⋮
produkt j	$a_{jj} u_t^j K_t^j$	$Y_t^j = u_t^j K_t^j$
⋮	⋮	⋮
produkt n	$a_{nj} u_t^j K_t^j$	0

Występujące w tabeli 2 równanie

$$Y_t^j = u_t^j K_t^j \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{2}$$

jest swoistą funkcją produkcji przedsiębiorstwa j. Jej nietypowość polega na tym, że za zmienną K_t^j, opisującą zasób majątku trwałego przedsiębiorstwa, kryje się wektor dóbr majątkowych $K_t^j B^j$, natomiast efektywność tego majątku, dla danego „technologicznego" wektora B^j, jest wielkością decyzyjną, wyrażoną wskaźnikiem u_t^j [7].

Majątek trwały przedsiębiorstw może być powiększany poprzez inwestycje. Ze względu na założenie o komplementarności nakładów, inwestycje w przedsiębiorstwie j polegają zawsze na zakupie pewnej wiązki dóbr majątkowych, będącej, podobnie jak już istniejący zasób majątku trwałego K_t^j, pewną wielokrotnością wektora B^j.

Ponieważ majątek trwały ulega zużyciu, przedsiębiorstwo, aby zwiększyć jego zasób z poziomu K_t^j w okresie t do poziomu K_{t+1}^j w okresie $t+1$, musi nabyć poszczególne dobra majątkowe w ilościach I_t^{ij} opisanych równaniem

$$I_t^{ij} = b_{ij}(K_{t+1}^j - (1-\delta u_t^j) K_t^j). \tag{3}$$

Nakład I_t^{ij} jest nakładem brutto, równym nakładowi netto $b_{ij}(K_{t+1}^j - K_t^j)$, powiększonemu o nakład odtworzeniowy $\delta b_{ij} u_t^j K_t^j$ [8].

Korzystając z (3) i tabeli 2, oraz uwzględniając, że $I_t^i = \sum_{i=1}^{n} I_t^{ij}$, otrzymujemy bilans produkcji (1) w rozwiniętej postaci

$$S_{t+1}^i = S_t^i + u_t^i K_t^i - \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \delta b_{ij}) u_t^j K_t^j - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(K_{t+1}^j - K_t^j) - KP_t^i - KK_t^i \tag{4}$$

$$(i=1,\ldots,n; \quad t=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

---

[7] Produkcja przedsiębiorstw nie podlega żadnym ograniczeniom finansowym, gdyż, jak zobaczymy później, w otoczeniu równowagi wpływy ze sprzedaży wytwarzanego produktu zawsze pokrywają koszty jego produkcji.

[8] Równanie (3) przedstawia jedynie technologiczny aspekt procesu inwestycyjnego. Formułując je, pomijamy na razie kluczowe dla całego modelu pytanie o finansowe i behawioralne czynniki, determinujące dynamikę inwestycji i majątku trwałego poszczególnych przedsiębiorstw. Wrócimy do niego w dalszych częściach artykułu.

Oznaczając przez S_t i K_t wektory kolumnowe o składowych S_t^i oraz K_t^i, a przez $\hat{U}_t$ – macierz diagonalną $\hat{U}_t = \text{diag}(u_t^1, ..., u_t^n)$ wskaźników stopnia wykorzystania majątku trwałego, układ równań (4) możemy zapisać w prostszej postaci macierzowej:

$$S_{t+1} = S_t + (I - A - \delta B)\hat{U}_t K_t - B(K_{t+1} - K_t) - KP_t - KK_t, \qquad (5)$$

w której, zgodnie z (2), iloczyn $Y_t = \hat{U}_t K_t$ jest wektorem produkcji przedsiębiorstw.

Jak łatwo zauważyć, równanie macierzowe (5) jest pewnym rozwinięciem dynamicznego modelu Leontiefa z zapasami w wersji dyskretnej[9].

1.3. Koszty i zyski przedsiębiorstw

Na koszty przedsiębiorstw składają się koszty bieżących nakładów materiałowych, koszty zużycia majątku trwałego (amortyzacja) oraz koszty pracy. Oznaczmy przez $p_t = (p_t^1, ..., p_t^n)$ wektor wierszowy cen poszczególnych produktów w okresie t. Iloczyn $p_t A^j$ przedstawia koszt nakładów bieżących koniecznych do wytworzenia jednostki produktu j. Jeżeli przedsiębiorstwo w okresie t wytwarza Y_t^j jednostek produktu, to w tym samym okresie ponosi koszty materiałowe w wysokości $p_t A^j Y_t^j$. Koszty materiałowe w całej gospodarce przedstawia z kolei iloczyn $p_t A Y_t$.

Koszty amortyzacji majątku trwałego utożsamiamy z wartością faktycznego zużycia dóbr majątkowych. Zakładamy, że zużycie to zależy nie tylko od wielkości zasobu majątku trwałego, lecz także od intensywności jego wykorzystania. I tak, jeżeli przedsiębiorstwo, dysponując majątkiem trwałym K_t^j, wykorzystuje go w stopniu u_t^j $(0 < u_t^j < 1)$, wytwarzając produkcję $Y_t^j = u_t^j K_t^j$, to koszt amortyzacji (zużycia) majątku trwałego w tym przedsiębiorstwie wynosi $\delta p_t B^j u_t^j K_t^j$ i *de facto*, dla danej technologii i cen zależy od wielkości produkcji. Analogicznie, koszty amortyzacji w skali całej gospodarki przedstawia iloczyn $\delta p_t B \hat{U}_t K_t$.

Każdy pracownik najemny, zatrudniony w przedsiębiorstwie j w okresie t, otrzymuje wynagrodzenie nominalne w_t^j. Stawka w_t^j określana jest w taki sposób, aby stanowiła równowartość pewnej, stałej w czasie, wiązki dóbr konsumpcyjnych, opisanej półdodatnim wektorem kolumnowym G^j. Dla każdego okresu t spełnione jest więc równanie $w_t^j = p_t G^j$, będące swego

[9] Przyjmując, że $\delta = 0$ oraz że $\forall t\ \hat{U}_t = I$ (czyli $K_t = Y_t$), otrzymujemy dynamiczny model Leontiefa z zapasami postaci: $S_t + Y_t = AY_t + B(Y_{t+1} - Y_t) + KP_t + KK_t + S_{t+1}$.

rodzaju postulatem stałej płacy realnej. Koszty pracy są iloczynem stawki płac i wielkości zatrudnienia. Ponieważ przedsiębiorstwa zatrudniają tylko minimalną liczbę pracowników $l_j Y_t^j$, niezbędną do wytworzenia produkcji Y_t^j, zatem koszty pracy w przedsiębiorstwie j (równe wynagrodzeniom) wynoszą $W_t^j = p_t G^j l_j Y_t^j$ [10].

Wynagrodzenia w całej gospodarce przedstawia z kolei iloczyn

$$W_t = p_t G \hat{L} Y_t, \tag{6}$$

w którym G jest macierzą kwadratową, utworzoną z wektorów G^j, a $\hat{L}$ oznacza macierz diagonalną współczynników pracochłonności l_j.

Zysk kalkulacyjny (oczekiwany) przedsiębiorstwa j w okresie t oznaczamy symbolem π_t^j i definiujemy jako różnicę między wartością wytworzonej w tym okresie produkcji a kosztami jej wytworzenia. Tak więc

$$\pi_t^j = p_t^j Y_t^j - p_t (A^j + \delta B^j + G^j l_j) Y_t^j. \tag{7}$$

Jeżeli przez $(I - A - \delta B - G\hat{L})^j$ oznaczymy kolumnę j macierzy $(I - A - \delta B - G\hat{L})$, to zysk ten możemy zapisać w postaci

$$\pi_t^j = p_t (I - A - \delta B - G\hat{L})^j Y_t^j. \tag{8}$$

Sumując zyski wszystkich przedsiębiorstw, otrzymujemy globalny zysk kalkulacyjny π_t, spełniający równanie

$$\pi_t = p_t (I - A - \delta B - G\hat{L}) Y_t. \tag{9}$$

Oprócz zysku kalkulacyjnego π_t^j, rozpatrujemy też zysk zrealizowany przez przedsiębiorstwo j w okresie t, który oznaczamy symbolem χ_t^j i defi-

---

[10] Formułowany przez nas model jest modelem długookresowego wzrostu gospodarczego i z tego względu postulat stałej płacy realnej wynikający *explicite* z równania $w_t^j = p_t G^j$ może wydawać się zbyt restrykcyjny. Dlatego warto zauważyć, że wartości iloczynów $W_t^j = p_t G^j l_j Y_t^j$ można interpretować również jako wynagrodzenia wypłacane przez przedsiębiorstwo j w przypadku wzrostu jednostkowej płacy realnej, będącego wynikiem wzrostu wydajności pracy (spadku pracochłonności). Sytuacja taka jest wówczas, gdy spadek wartości współczynnika pracochłonności l_j jest „wynagradzany" takim zwielokrotnieniem wiązki towarów konsumpcyjnych G^j (będącej podstawą ustalania nominalnej stawki wynagrodzeń w_t^j), że iloczyn $G^j l_j$ nie ulegnie zmianie.

niujemy jako różnicę między wartością sprzedaży w okresie t (równą wartości globalnego popytu) a kosztami produkcji tego okresu:

$$\chi_t^j = p_t^j D_t^j - p_t(A^j + \delta B^j + G^j l_j) Y_t^j. \tag{10}$$

Zwróćmy uwagę, że zysk zrealizowany jest równy zyskowi kalkulacyjnemu jedynie wtedy, gdy wielkość sprzedaży D_t^j równa jest wielkości produkcji Y_t^j.

W ogólnym przypadku, jak wynika z (1), (7) i (10), zachodzi:

$$\pi_t^j - \chi_t^j = p_t^j (Y_t^j - D_t^j) = p_t^j \Delta S_t^j, \tag{11}$$

gdzie $\Delta S_t^j = S_{t+1}^j - S_t^j$.

Różnica $\pi_t^j - \chi_t^j > 0$ przedstawia niezrealizowaną część zysku kalkulacyjnego, zamrożoną w przyroście zapasów ΔS_t^j. Różnica $\chi_t^j - \pi_t^j > 0$ jest z kolei nadwyżką zysku zrealizowanego nad kalkulacyjnym, osiągniętą w wyniku sprzedaży części zapasu S_t^j.

W skali całej gospodarki odpowiednikiem równania (11) jest równość

$$\pi_t - \chi_t = p_t \Delta S_t, \tag{12}$$

gdzie $\chi_t = \sum_{j=1}^{n} \chi_t^j = p_t D_t - p_t(A + \delta B + G\hat{L}) Y_t$ jest globalnym zyskiem zrealizowanym.

Wszędzie dalej zakładamy, że pracownicy najemni całość swoich wynagrodzeń z okresu t wydają jeszcze w tym samym okresie w całości na konsumpcję. W konsekwencji ograniczenie budżetowe pracowników najemnych ma postać:

$$p_t KP_t = W_t. \tag{13}$$

Z (13) i równania bilansowego (5) otrzymujemy równość

$$p_t \Delta S_t = p_t(I - A - \delta B) Y_t - p_t(B \Delta K_t + KK_t) - W_t, \tag{14}$$

skąd, wobec (6), (9) i (12), wynika, że

$$\chi_t = p_t(B \Delta K_t + KK_t). \tag{15}$$

Jak widzimy, jeżeli tylko spełnione jest równanie (13), to w rozpatrywanej gospodarce globalny zysk zrealizowany jest zawsze równy sumie wartości inwestycji netto (nakładów na powiększenie majątku trwałego) i konsumpcji kapitalistów. Zależność ta, mająca charakter sprzężenia zwrotnego, zasługuje na szczególną uwagę. Z jednej strony, zysk zrealizowany χ_t, zgodnie z (15), wydawany jest przez kapitalistów na konsumpcję i inwestycje. Z drugiej strony, wydatki kapitalistów na konsumpcję i inwestycje, wpływając na wektor globalnego popytu D_t, umożliwiają przedsiębiorstwom osiągnięcie owego zysku. Tak więc, im więcej kapitaliści będą inwestować i konsumować, tym większe będą mieć zyski, które im to umożliwią. Oczywiście ograniczenie leży w sferze realnej. Zbyt wielki popyt inwestycyjny i konsumpcyjny, przy danych cenach p_t, może okazać się niemożliwy do zaspokojenia, (co ograniczy także wielkość zysków)[11].

1.4. Bilanse przedsiębiorstw i kapitalistów

Zakładamy, że na początek każdego okresu jedynymi rzeczowymi aktywami przedsiębiorstw są zasoby ich majątku trwałego oraz zapasy niesprzedanych produktów, jakie pozostały z poprzednich okresów. Kluczową rolę przy konstruowaniu bilansów zarówno przedsiębiorstw, jak i kapitalistów odgrywa porównanie rzeczywistego stanu tych zapasów z ich stanem normatywnym. Normatywny stan zapasu $\bar{S}_t^j$ przedsiębiorstwa j ustalany jest zgodnie z równaniem

$$\bar{S}_t^j = \bar{s}^j K_t^j, \tag{16}$$

w którym $\bar{s}^j$ $(0<\bar{s}^j<1)$ przedstawia normatywny (pożądany) wskaźnik zapasu produktu j, opisujący normatywny stosunek zapasu do maksymalnej produkcji (mocy produkcyjnych) $Y_t^j = K_t^j$, jaką, zgodnie z (2), można uzyskać przy pełnym wykorzystaniu majątku trwałego w przedsiębiorstwie j (tzn. gdy $u_t^j = 1$).

Jeżeli w pewnych przedsiębiorstwach rzeczywiste zapasy są większe od normatywnych, to przedsiębiorstwa te obniżają ceny wytwarzanych produktów oraz ograniczają ich produkcję (stopień wykorzystania majątku trwałego). Odwrotne działania podejmowane są, gdy zapasy spadają poniżej poziomu normatywnego (zob. punkt 1.10).

---

[11] Zakładamy, że reakcja cen na nierównowagę między popytem i podażą w okresie t następuje dopiero w okresie następnym, $t+1$.

Zakładamy, że przedsiębiorstwa same sprzedają swoje produkty finalnym odbiorcom, co powoduje, że normatywne (pożądane) wielkości zapasów wynikają z obiektywnych wymogów, związanych ze specyfiką handlu poszczególnymi produktami[12]. Obniżenie zapasów poniżej poziomu normatywnego może powodować trudności z zachowaniem ciągłości sprzedaży. Ponadto może okazać się nieopłacalne, gdyż osiągnięte w wyniku nadmiernej obniżki cen. Z kolei zbyt wysokie zapasy niepotrzebnie ograniczają zyski zrealizowane χ_t^j, dzielone między kapitalistów.

Mając na uwadze powyższe zasady kształtowania zapasów, wszędzie dalej przyjmujemy założenie, że kapitały, jakie kapitaliści lokują w przedsiębiorstwach, służą tylko finansowaniu ich majątku trwałego i normatywnych zapasów. Suma kapitałów przekazanych w tym celu przedsiębiorstwu j przez wszystkich jego udziałowców stanowi kapitał własny tego przedsiębiorstwa C_t^j, będący główną pozycją jego pasywów. Zgodnie z definicją,

$$C_t^j = p_t B^j K_t^j + p_t^j \bar{s}^j K_t^j. \tag{17}$$

Jeżeli przez $\hat{\bar{s}}$ oznaczymy macierz diagonalną $\hat{\bar{s}} = \mathrm{diag}(\bar{s}^1, \ldots, \bar{s}^n)$, a przez $(B + \hat{\bar{s}})^j$ – kolumnę j macierzy $(B + \hat{\bar{s}})$, to C_t^j możemy zapisać w prostszej postaci

$$C_t^j = p_t (B + \hat{\bar{s}})^j K_t^j. \tag{18}$$

Analogicznie, suma kapitałów własnych wszystkich przedsiębiorstw (kapitał globalny) spełnia równanie

$$C_t = \sum_{j=1}^{n} C_t^j = p_t (B + \hat{\bar{s}}) K_t. \tag{19}$$

Należy podkreślić, że kapitał C_t^j jest kategorią rachunkową, równą wartości rzeczowych aktywów przedsiębiorstwa jedynie w przypadku, gdy rzeczywisty zapas wytwarzanego w nim produktu S_t^j równy jest jego wielkości normatywnej $\bar{S}_t^j$.

---

[12] W modelu nie wyodrębniamy przedsiębiorstw handlowych, co sprawia, że w rzeczywistości odpowiednikiem zapasów S_t^j są nie tylko zapasy wyrobów gotowych, znajdujące się w magazynach producentów, lecz także ich zapasy w centrach dystrybucji, hurtowniach i handlu detalicznym. Jest oczywiste, że utrzymywanie tych zapasów wymaga zaangażowania odpowiednio dużych kapitałów.

Załóżmy, że właścicielami (udziałowcami) przedsiębiorstw jest m kapitalistów. Oznaczmy symbolem C_t^{kj} kapitał kapitalisty k, stanowiący w okresie t część kapitału własnego przedsiębiorstwa j. Zdefiniujmy następnie wskaźnik udziału kapitalisty k w kapitale własnym przedsiębiorstwa j

$$\eta_t^{kj} = \frac{C_t^{kj}}{C_t^j} \qquad (k=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n). \tag{20}$$

Z definicji

$$\eta_t^{kj} \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{m} \eta_t^{kj} = 1 \qquad (j=1,\ldots,n). \tag{21}$$

Jeżeli zapas rzeczywisty pewnego produktu jest większy od normatywnego, to świadczy to o tym, że w minionych okresach przedsiębiorstwo sprzedało go mniej niż powinno, a to z kolei oznacza, że nie przekazało kapitalistom zrealizowanych zysków w wysokości adekwatnej do posiadanego majątku trwałego. Wartość nadwyżki zapasu ponad jego poziom normatywny $p_t^j(S_t^j - \bar{s}^j K_t^j) > 0$ stanowi zatem wartość zobowiązań przedsiębiorstwa j wobec jego udziałowców – kapitalistów i zarazem wartość należności ogółu kapitalistów od tego przedsiębiorstwa. Zakładamy, że zobowiązania przedsiębiorstwa rozkładają się między kapitalistów proporcjonalnie do ich udziałów w kapitale własnym tego przedsiębiorstwa. Bilans przedsiębiorstwa, na początek okresu t, przedstawia w takim przypadku tabela 3.

Tabela 3. Bilans przedsiębiorstwa j, gdy zapas rzeczywisty jest większy od normatywnego

Aktywa	Pasywa
Majątek trwały $p_t B^j K_t^j$	Kapitał własny $C_t^j = \sum_{k=1}^{m} C_t^{kj} = p_t(B+\hat{s})^j K_t^j$
Zapas rzeczywisty (większy od normatywnego) $p_t^j S_t^j$	Zobowiązania wobec kapitalistów $\sum_{k=1}^{m} \eta_t^{kj} p_t^j (S_t^j - \bar{s}^j K_t^j)$

Odwrotna sytuacja, gdy zapas rzeczywisty jest mniejszy od normatywnego, oznacza, że w minionym okresie (okresach) przedsiębiorstwo zrealizowało i przekazało kapitalistom zyski nadzwyczajne, uzyskane kosztem

obniżenia zapasu poniżej jego poziomu normatywnego. Przekazane zyski nadzwyczajne są swoistą pożyczką udzieloną kapitalistom, gdyż przedsiębiorstwo, które je osiągnęło, w przyszłych okresach, dążąc do osiągnięcia normatywnego poziomu zapasu, będzie więcej produkować niż sprzedawać, co będzie miało niekorzystny wpływ na jego zrealizowane zyski. Z tego względu różnicę $p_t^j(\bar{S}_t^j - S_t^j) > 0$ można traktować jako wartość należności przedsiębiorstwa j od kapitalistów (udziałowców). Z punktu widzenia ogółu kapitalistów, przedstawia ona z kolei ich zobowiązanie względem przedsiębiorstwa j do sfinansowania odbudowy jego normatywnego zapasu. W konsekwencji, przy założeniu, że należności przedsiębiorstwa od poszczególnych kapitalistów są proporcjonalne do ich udziałów własnościowych, bilans przedsiębiorstwa ma postać przedstawioną w tabeli 4.

Tabela 4. Bilans przedsiębiorstwa j, gdy zapas rzeczywisty jest mniejszy od normatywnego

<table>
<tr><th>Aktywa</th><th>Pasywa</th></tr>
<tr><td>Majątek trwały
$p_t B^j K_t^j$</td><td rowspan="3">Kapitał własny
$C_t^j = \sum_{k=1}^{m} C_t^{kj} = p_t(B+\hat{s})^j K_t^j$</td></tr>
<tr><td>Zapas rzeczywisty
(mniejszy od normatywnego)
$p_t^j S_t^j$</td></tr>
<tr><td>Należności od kapitalistów
$\sum_{k=1}^{m} \eta_t^{kj} p_t^j (\bar{s}^j K_t^j - S_t^j)$</td></tr>
</table>

Z bilansami przedsiębiorstw korespondują bilanse kapitalistów. W tabeli 5 przedstawiamy bilans kapitalisty k na początek okresu t. Zwróćmy uwagę, że udziały kapitalisty w kapitałach własnych przedsiębiorstw wykazywane są jako jego aktywa. Do aktywów należą też należności od przedsiębiorstw z tytułu ponadnormatywnych zapasów.

Aktywa kapitalisty mają swoje pokrycie w pasywach, wśród których wyróżniamy kapitał własny kapitalisty V_t^k oraz jego zobowiązania wobec

przedsiębiorstw do sfinansowania odbudowy zapasów do poziomu normatywnego[13].

Tabela 5. Bilans kapitalisty k

Aktywa	Pasywa
Udziały w kapitałach przedsiębiorstw $C_t^k = \sum_{j=1}^{n} C_t^{kj} = \sum_{j=1}^{n} \eta_t^{kj} C_t^j$	Kapitał własny kapitalisty V_t^k
Należności od przedsiębiorstw $\sum_j \eta_t^{kj} p_t^j (S_t^j - \bar{s}^j K_t^j)^+$	Zobowiązania wobec przedsiębiorstw $\sum_j \eta_t^{kj} p_t^j (\bar{s}^j K_t^j - S_t^j)^+$

Z definicyjnej równości aktywów i pasywów bilansu wynika równanie

$$V_t^k = \sum_{j=1}^{n} \eta_t^k p_t (B + \hat{\bar{s}})^j K_t^j + \sum_{j=1}^{n} \eta_t^{kj} p_t^j (S_t^j - \bar{s}^j K_t^j), \tag{22}$$

z którego otrzymujemy, że

$$V_t^k = \sum_{j=1}^{n} \eta_t^{kj} (p_t B^j K_t^j + p_t^j S_t^j). \tag{23}$$

Zgodnie z (23), kapitał własny kapitalisty k jest równy tej części wartości majątku trwałego i rzeczywistych zapasów przedsiębiorstw, która wynika z jego udziałów w kapitałach własnych tych przedsiębiorstw. Ponieważ $\sum_{k=1}^{m} \eta_t^{kj} = 1$, z (23) otrzymujemy ważną równość

$$\sum_{k=1}^{m} V_t^k = p_t (BK_t + S_t), \tag{24}$$

głoszącą, że suma kapitałów własnych wszystkich kapitalistów na początek okresu t równa jest wartości majątku trwałego przedsiębiorstw i wartości zapasów niesprzedanych wyrobów gotowych, a więc wartości wszystkich materialnych zasobów, jakie istnieją w gospodarce w tym momencie.

---

[13] Symbol $\sum \eta_t^{kj} p_t^j (S_t^j - \bar{s}^j K_t^j)^+$ oznacza, że sumowane są tylko dodatnie różnice.

Zwróćmy uwagę, że jeżeli zobowiązania kapitalisty wobec przedsiębiorstw przekraczają należności, to łączna wartość jego udziałów w kapitałach przedsiębiorstw C_t^k przekracza wartość jego kapitału własnego V_t^k. Sytuacja taka (przedstawiona w tabeli 5) oznacza, że część kapitału ulokowanego przez kapitalistę k wprzedsiębiorstwach nie ma pokrycia w jego kapitale własnym, lecz w jego zobowiązaniach wobec przedsiębiorstw (innych lub tych samych). W odwrotnej sytuacji, gdy należności kapitalisty są większe od zobowiązań, jego kapitał własny V_t^k jest większy od kapitału ulokowanego w kapitałach przedsiębiorstw C_t^k. W tym wypadku część kapitału własnego kapitalisty ma swoje pokrycie w nadwyżce jego należności od przedsiębiorstw nad zobowiązaniami.

Wszędzie dalej, pamiętając o powyższych różnicach między C_t^k i V_t^k, aby nie komplikować terminologii, składniki $C_t^{kj} = \eta_t^{kj} C_t^j$ będziemy nazywać krótko kapitałem kapitalisty k w przedsiębiorstwie j, a w konsekwencji sumę $C_t^k = \sum_{j=1}^{n} C_t^{kj}$ – kapitałem kapitalisty k (bez przymiotnika „własny").

1.5. Akumulacja kapitału

Z początkiem każdego okresu wszyscy kapitaliści podejmują indywidualne decyzje o wysokości środków, jakie w tym okresie przeznaczą na swoją konsumpcję oraz na akumulację kapitału w przedsiębiorstwach. Zakładamy, że podstawową wielkością, na której kapitalista k opiera swoje decyzje, jest jego zysk kalkulacyjny (oczekiwany), oznaczony symbolem π_t^k. Zysk ten jest sumą jego udziałów w zyskach kalkulacyjnych przedsiębiorstw π_t^j, odpowiadających jego udziałom w ich kapitałach własnych:

$$\pi_t^k = \sum_{j=1}^{n} \eta_t^{kj} \pi_t^j. \tag{25}$$

Każdy kapitalista ustala wysokość swoich wydatków konsumpcyjnych w okresie t w zależności od właściwej mu skłonności do konsumpcji, opisanej współczynnikiem α^k $(0 < \alpha^k < 1)$, przedstawiającym stały w czasie stosunek wydatków konsumpcyjnych do zysku kalkulacyjnego π_t^k. W konsekwencji równanie budżetowe kapitalisty k ma postać:

$$p_t KK_t^k = \alpha^k \pi_t^k, \tag{26}$$

gdzie KK_t^k jest wektorem jego popytu konsumpcyjnego.

Oznaczmy przez ΔC_t^k łączną wielkość akumulacji kapitału kapitalisty k we wszystkich przedsiębiorstwach między początkiem a końcem okresu t. Zakładamy, że kapitalista podejmuje najpierw decyzję o globalnej kwocie ΔC_t^k, a dopiero później dzieli ją między przedsiębiorstwa. Za punkt wyjścia do ustalenia ΔC_t^k przyjmuje pozostałą część zysku kalkulacyjnego $(1-\alpha^k)\pi_t^k$, którą następnie powiększa o planowany kredyt inwestycyjny lub planowaną redukcję swoich oszczędności bądź też pomniejsza o planowaną spłatę kredytu lub planowane powiększenie oszczędności. Tak więc

$$\Delta C_t^k = (1-\alpha^k)\pi_t^k + \Delta M_t^k, \tag{27}$$

gdzie ΔM_t^k oznacza planowaną zmianę (dodatnią lub ujemną) zadłużenia (oszczędności) kapitalisty k.

Należy podkreślić, że chociaż π_t^k i ΔM_t^k są jedynie wielkościami planowanymi, które mogą różnić się od swoich, zrealizowanych na koniec okresu odpowiedników, to wielkość akumulacji kapitału ΔC_t^k jest wielkością decyzyjną, która, jak zobaczymy później, zawsze zostaje zrealizowana[14].

Zakładamy, że kapitalista planuje zwiększoną akumulację kapitału o środki pochodzące z kredytu lub ze zlikwidowanych oszczędności $(\Delta M_t^k > 0)$, jeżeli:

- w przedsiębiorstwach, w których ma znaczące udziały własnościowe, moce produkcyjne (zasoby majątku trwałego) wykorzystane są w relatywnie wysokim stopniu,
- stopy oprocentowania depozytów i kredytów skorelowane ze stopą inflacji, są niskie[15].

Analogicznie kapitalista planuje przeznaczyć część zysków na spłatę kredytu lub powiększenie oszczędności $(\Delta M_t^k < 0)$, co ograniczy jego akumulację kapitału w stosunku do wielkości bazowej $(1-\alpha^k)\pi_t^k$, jeżeli:

- poziom wykorzystania mocy produkcyjnych przedsiębiorstw, w których ma znaczące udziały własnościowe jest relatywnie niski,
- stopy oprocentowania depozytów i kredytów są wysokie.

---

[14] Zwróćmy uwagę, że zgodnie z wcześniejszymi uwagami, ΔC_t^k może różnić się od przyrostu kapitału własnego k-tego kapitalisty ΔV_t^k. Poza tym generalnie $\Delta C_t^k \neq C_{t+1}^k - C_t^k$, gdyż ΔC_t^k jest przyrostem kapitału w cenach stałych (obowiązujących w okresie t), natomiast $C_{t+1}^k - C_t^k$ przedstawia różnicę między wartością kapitału kapitalisty k w okresie $t+1$ wycenionego po cenach p_{t+1} a wartością jego kapitału w okresie t, wycenionego po cenach p_t.

[15] Przyjmujemy, że w wyniku antyinflacyjnej polityki banku centralnego wraz ze wzrostem inflacji rośnie realne oprocentowanie kredytów i depozytów.

Założenia powyższe odzwierciedla równanie behawioralne

$$\Delta M_t^k = (\beta_0^k v_t^k - \beta_1^k j_t) C_t^k, \tag{28}$$

w którym v_t^k jest wskaźnikiem wykorzystania kapitału kapitalisty k, j_t jest wskaźnikiem inflacji, natomiast β_0^k, $\beta_1^k > 0$ są parametrami reakcji (wrażliwości) kapitalisty na określone wartości wskaźników v_t^k i j_t.

Wskaźnik v_t^k zdefiniowany jest jako ułamek

$$v_t^k = \frac{\sum_{j=1}^{n} \eta_t^{kj} p_t^j (u_t^j - \bar{u}^j) K_t^j}{\sum_{j=1}^{n} \eta_t^{kj} p_t^j \bar{u}^j K_t^j}, \tag{29}$$

którego licznik przedstawia, ważoną udziałami własnościowymi η_t^{kj} kapitalisty k, sumę różnic między wartością faktycznej produkcji przedsiębiorstw $p_t^j u_t^j K_t^j$ a wartością ich normatywnej produkcji $p_t^j \bar{u}^j K_t^j$ [16]. Wprowadzając macierz diagonalną

$$\hat{\eta}_t^k = \operatorname{diag}(\eta_t^{k1}, \ldots, \eta_t^{kn}) \tag{30}$$

wskaźnik v_t^k możemy przedstawić w prostszej postaci:

$$v_t^k = \frac{p_t \hat{\eta}_t^k (\hat{U}_t - \hat{\bar{U}}) K_t}{p_t \hat{\eta}_t^k \hat{\bar{U}} K_t}. \tag{31}$$

Wskaźnik inflacji zdefiniowany jest z kolei wzorem

$$j_t = \frac{p_t \hat{U}_t K_t}{p_{t-1} \hat{U}_t K_t} - 1, \tag{32}$$

przedstawiającym (pomniejszony o jeden) stosunek wartości produkcji wszystkich przedsiębiorstw, $Y_t = \hat{U}_t K_t$ liczonej w cenach p_t, do wartości tej samej produkcji, wyrażonej w cenach p_{t-1}.

Zwróćmy uwagę, że z równania (28) wynika dodatkowo, że dla ustalonych wartości wskaźników v_t^k i j_t oraz parametrów reakcji β_0^k i β_1^k,

[16] Symbol $\bar{u}^j$ przedstawia normatywną (pożądaną) wartość wskaźnika wykorzystania majątku trwałego w j-tym przedsiębiorstwie, wynikającą ze względów technologicznych bądź ekonomicznych. Zakładamy, że $\forall j \ (0 < \bar{u}^j < 1)$.

planowana zmiana zadłużenia (oszczędności) ΔM_t^k kapitalisty k jest proporcjonalna do wielkości jego kapitału C_t^k. W rezultacie z (27) i (28) otrzymujemy, że stopa wzrostu kapitału kapitalisty k

$$\rho_t^k = \frac{\Delta C_t^k}{C_t^k} \tag{33}$$

kształtuje się zgodnie z równaniem

$$\rho_t^k = (1-\alpha^k) r_t^k + \beta_0^k v_t^k - \beta_1^k j_t, \tag{34}$$

w którym r_t^k jest stopą zysku tego kapitalisty, spełniającą równanie:

$$r_t^k = \frac{\pi_t^k}{C_t^k} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \eta_t^{kj} \pi_t^j}{\sum_{j=1}^{n} \eta_t^{kj} C_t^j}. \tag{35}$$

1.6. Alokacja kapitału w przedsiębiorstwach

Każdy kapitalista po ustaleniu wielkości swojego funduszu akumulacji kapitału ΔC_t^k staje przed problemem jego podziału między przedsiębiorstwa. Swoją decyzję o alokacji kapitału podejmuje autonomicznie, nie znając ani wielkości akumulacji pozostałych kapitalistów, ani sposobu jej rozdysponowania. Zgodnie z teorią klasyczną przyjmujemy, że wszyscy kapitaliści dążą do ulokowania swojego kapitału przede wszystkim w tych przedsiębiorstwach, które cechują się wysokimi stopami zysku

$$r_t^j = \frac{\pi_t^j}{C_t^j} = \frac{p_t (I - A - \delta B - G\hat{L})^j u_t^j}{p_t (B + \hat{s})^j} \tag{36}$$

na tle średniej stopy zysku w całej gospodarce, określonej równaniem

$$r_t = \frac{\pi_t}{C_t} = \frac{p_t (I - A - \delta B - G\hat{L}) \hat{U}_t K_t}{p_t (B + \hat{s}) K_t}. \tag{37}$$

W konsekwencji zakładamy, że przyrost kapitału ΔC_t^{kj} kapitalisty k w przedsiębiorstwie j opisuje równanie behawioralne

$$\Delta C_t^{kj} = C_t^{kj} (\varphi_t^k + \gamma^k (r_t^j - r_t)), \tag{38}$$

w którym $\gamma^k > 0$ jest współczynnikiem wrażliwości kapitalisty k na odchylenia stóp zysku przedsiębiorstw r_t^j od średniej stopy zysku r_t, natomiast φ_t^k jest zmienną bilansującą fundusz akumulacji kapitału ΔC_t^k kapitalisty k z przyrostami jego udziałów w kapitałach przedsiębiorstw ΔC_t^{kj}.

Zgodnie ze swoją definicją, zmienna φ_t^k spełnia równanie

$$\Delta C_t^k = \rho_t^k C_t^k = \sum_{j=1}^{n} \Delta C_t^{kj} = \sum_{j=1}^{n} C_t^{kj}(\varphi_t^k + \gamma^k(r_t^j - r^t)), \tag{39}$$

z którego wynika, że

$$\varphi_t^k = \rho_t^k - \frac{\gamma^k}{C_t^k} \sum_{j=1}^{n} C_t^{kj}(r_t^j - r_t). \tag{40}$$

Z definicji wskaźnika η_t^{kj} oraz z definicji stóp zysku r_t^j i r_t^k otrzymujemy, że

$$\varphi_t^k = \rho_t^k - \gamma^k(r_t^k - r_t). \tag{41}$$

Zakładamy, że w każdym okresie poszczególni kapitaliści partycypują w kosztach powiększenia majątku trwałego danego przedsiębiorstwa w zależności od wielkości nowo wniesionego kapitału. Zgodnie z (18), kapitał własny przedsiębiorstwa j spełnia równanie $C_t^j = p_t(B + \hat{s})^j K_t^j$, przyjmujemy więc, że zwiększenie tego kapitału przez kapitalistę k o ΔC_t^{kj} pociąga za sobą sfinansowanie przez niego takiego przyrostu majątku trwałego tego przedsiębiorstwa ΔK_t^{kj}, że spełnione jest równanie

$$\Delta C_t^{kj} = p_t(B + \hat{s})^j \Delta K_t^{kj}. \tag{42}$$

Tak więc, kapitalista k lokując w przedsiębiorstwie j kapitał w wysokości ΔC_t^{kj}, musi przekazać temu przedsiębiorstwu $p_t B^j \Delta K_t^{kj}$ jednostek pieniężnych na inwestycje. Pozostała część przyrostu kapitału ΔC_t^{kj}, równa przyrostowi normatywnego zapasu w ujęciu wartościowym $p_t^j \bar{s}^j \Delta K_t^{kj}$, przyjmuje jedynie postać zapisu księgowego i nie jest związana z żadnym przepływem pieniężnym[17].

[17] Z równania (42) wynika, że kapitały wszystkich kapitalistów kierowane do danego przedsiębiorstwa rozkładają się według identycznych proporcji na część służącą finansowaniu inwestycji i część służącą finansowaniu przyrostu normatywnych zapasów.

Korzystając z (38), (42) i równości $C_t^{kj}=\eta_t^{kj}C_t^j=\eta_t^{kj}p_t(B+\hat{s})^jK_t^j$, otrzymujemy:

$$\Delta K_t^{kj}=\eta_t^{kj}K_t^j(\varphi_t^k+\gamma^k(r_t^j-r_t)), \tag{43}$$

skąd wynika, że dynamikę zasobów majątku trwałego przedsiębiorstwa j opisuje równanie:

$$\Delta K_t^j=K_t^j\sum_{k=1}^{m}\eta_t^{kj}(\varphi_t^k+\gamma^k(r_t^j-r_t)). \tag{44}$$

Ponieważ zmienna K_t^j przedstawia wielokrotność wiązki dóbr inwestycyjnych, opisanych kolumną j macierzy nakładów inwestycyjnych B (zob. punkt 1.2), zatem z (44) wynika, że globalna funkcja popytu inwestycyjnego na dobro majątkowe i (zgłaszanego łącznie przez wszystkie przedsiębiorstwa) ma postać:

$$I_t^i=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}K_t^j\sum_{k=1}^{m}\eta_t^{kj}(\varphi_t^k+\gamma^k(r_t^j-r_t))+\delta\sum_{j=1}^{n}b_{ij}u_t^jK_t^j. \tag{45}$$

Pierwszy składnik prawej strony równania (45) przedstawia popyt inwestycyjny netto (związany z nowymi inwestycjami, zwiększającymi majątek trwały przedsiębiorstw), a drugi składnik opisuje popyt odtworzeniowy, finansowany z funduszu amortyzacji.

Jeżeli przez ΔK_t oznaczymy wektor kolumnowy o składowych ΔK_t^j, spełniających równania (44), to układ równań (45) możemy zapisać w prostszej postaci macierzowej:

$$I_t=B\Delta K_t+\delta B\hat{U}_tK_t. \tag{46}$$

1.7. Dynamika udziałów własnościowych

Z (38) i równości $C_t^{kj}=\eta_t^{kj}C_t^j=\eta_t^{kj}p_t(B+\hat{s})^jK_t^j$ wynika, że kapitał kapitalisty k w przedsiębiorstwie j na koniec okresu t wynosi

$$C_t^{kj}+\Delta C_t^{kj}=\eta_t^{kj}p_t(B+\hat{s})^jK_t^j(1+\varphi_t^k+\gamma^k(r_t^j-r_t)). \tag{47}$$

Z początkiem okresu $t+1$ pojawiają się nowe ceny p_{t+1} i kapitał ten ulega przeszacowaniu. Jego nową wartość, na początek okresu $t+1$, opisuje równanie

$$C_{t+1}^{kj} = \eta_t^{kj} p_{t+1} (B + \hat{s})^j K_t^j (1 + \varphi_t^k + \gamma^k (r_t^j - r_t)). \tag{48}$$

Ponieważ identycznemu przeszacowaniu podlegają kapitały wszystkich kapitalistów, udział kapitalisty k w kapitale własnym tego przedsiębiorstwa w okresie $t+1$ wynosi

$$\eta_{t+1}^{kj} = \frac{C_{t+1}^{kj}}{C_{t+1}^{j}} = \frac{C_{t+1}^{kj}}{\sum_{k=1}^{m} C_{t+1}^{kj}}. \tag{49}$$

Ostatecznie z (48) i (49) otrzymujemy następujące równanie dynamiki udziałów własnościowych

$$\eta_{t+1}^{kj} = \eta_t^{kj} \frac{1 + \varphi_t^k + \gamma^k (r_t^j - r_t)}{\sum_{k=1}^{m} \eta_t^{kj} (1 + \varphi_t^k + \gamma^k (r_t^j - r_t))}. \tag{50}$$

1.8. Kredyty i oszczędności kapitalistów

W punkcie 1.3 stwierdziliśmy, że zgodnie z równaniem (15), w skali całej gospodarki, w każdym okresie suma wydatków ogółu kapitalistów na konsumpcję i inwestycje netto $p_t(B\Delta K_t + KK_t)$ równa jest sumie zysków zrealizowanych χ_t, jaką kapitaliści otrzymują od przedsiębiorstw. Analogiczna równość nie musi jednak być spełniona w przypadku pojedynczego kapitalisty. Zysk zrealizowany kapitalisty k, będący sumą jego udziałów w zyskach przedsiębiorstw, $\chi_t^k = \sum_{j=1}^{n} \eta_t^{kj} \chi_t^j$ może być mniejszy lub większy od sumy jego wydatków inwestycyjnych i konsumpcyjnych, równej $p_t \sum_{j=1}^{n} B^j \Delta K_t^{kj} + p_t KK_t^k$.

Zdefiniujmy różnicę

$$\Delta Z_t^k = p_t \sum_{j=1}^{n} B^j \Delta K_t^{kj} + p_t KK_t^k p_t - \chi_t^k. \tag{51}$$

Zmienna ΔZ_t^k opisuje rzeczywiste zmiany zadłużenia (oszczędności) kapitalisty k. Jej dodatnia wartość pokazuje o ile kapitalista k musi zwiększyć swoje zadłużenie lub zmniejszyć oszczędności, aby pokryć nadwyżkę swoich wydatków nad zyskiem zrealizowanym χ_t^k. Ujemna wartość ΔZ_t^k

informuje z kolei o nadwyżce zysku zrealizowanego nad wydatkami, która może posłużyć bądź to spłacie zadłużenia, bądź powiększeniu oszczędności kapitalisty.

Zwróćmy uwagę, że zmienna ΔZ_t^k jest odpowiednikiem zmiennej ΔM_t^k, przedstawiającej planowaną zmianę zadłużenia (oszczędności) kapitalisty k, ustalanej na etapie decydowania o wielkości jego akumulacji (zob. (27)-(28)).

W celu ustalenia związku między ΔZ_t^k i ΔM_t^k rozpatrzmy, wynikające z (26) i (27), równanie

$$\Delta C_t^k + p_t K K_t^k = \pi_t^k + \Delta M_t^k. \tag{52}$$

Ponieważ, zgodnie z (11), $\pi_t^j = \chi_t^j + p_t^j \Delta S_t^j$, z definicji zysków π_t^k i χ_t^k wynika, że

$$\pi_t^k = \chi_t^k + \sum_{j=1}^{n} \eta^{kj} p_t^j \Delta S_t^j. \tag{53}$$

Korzystając z (39), (42) oraz (52) i (53), otrzymujemy

$$\Delta Z_t^k = \sum_{j=1}^{n} p_t^j (\eta_t^{kj} \Delta S_t^j - \bar{s}^j \Delta K_t^{kj}) + \Delta M_t^k. \tag{54}$$

Jak widzimy, kapitalista musi wydać więcej pieniędzy, pochodzących z kredytu lub oszczędności niż pierwotnie planował, jeżeli w przedsiębiorstwach, w których ma znaczące udziały własnościowe, doszło do dużych przyrostów zapasów ΔS_t^j (co zmniejszyło jego zysk zrealizowany χ_t^k). Do powstania nadwyżki $\Delta Z_t^k - \Delta M_t^k > 0$ przyczynia się też alokacja kapitału w przedsiębiorstwach, w których normatywne wskaźniki zapasów $\bar{s}^j$ są niskie. Wówczas bowiem rośnie udział wydatków inwestycyjnych $p_t \sum_j B^j \Delta K_t^{kj}$ w funduszu akumulacji kapitału ΔC_t^k, a maleje równowartość przyrostu normatywnych zapasów $\sum_j p_t^j \bar{s}^j \Delta K_t^{kj}$, która to wielkość, odnotowywana w bilansach przedsiębiorstw i kapitalisty, nie pociąga za sobą wydatków pieniężnych.

Zmienne ΔZ_t^k są zmiennymi rezydualnymi – zależne od innych zmiennych, same nie wpływają na żadną ze zmiennych modelu[18]. Samo ich

[18] Jednym z możliwych dalszych uogólnień rozpatrywanego modelu jest uzależnienie decyzji kapitalistów od ich skumulowanych oszczędności lub skumulowanego zadłużenia.

zdefiniowanie prowadzi jednak do ciekawego spostrzeżenia, wynikającego z faktu, że, zgodnie z (51), równanie (15) możemy obecnie zapisać w postaci:

$$\sum_{k=1}^{m} \Delta Z_t^k = 0. \tag{55}$$

W świetle przedstawionej interpretacji zmiennych ΔZ_t^k, z równania (55) wynika, że suma pieniędzy pochodzących z oszczędności lub kredytów, jaką kapitaliści przekazują przedsiębiorstwom na inwestycje, równa jest sumie pieniędzy, jaką inni kapitaliści wycofują z obiegu, przeznaczając nadwyżkę swoich zysków nad wydatkami na powiększenie oszczędności lub spłatę kredytów[19]. W rezultacie poziom oszczędności netto ogółu kapitalistów (różnica między oszczędnościami a zadłużeniem) nie ulega zmianom. Przykład takich kompensacyjnych zmian stanów oszczędności i stanów zadłużenia kapitalistów przedstawia tabela 6.

Tabela 6. Zmiany oszczędności i zadłużenia kapitalistów

Oszczędności na koniec okresu 300	Spadek oszczędności 50	Wzrost oszczędności 150	Oszczędności na koniec okresu 400
Zadłużenie na początek okresu 200	Wzrost zadłużenia 120	Spadek zadłużenia 20	Zadłużenie na koniec okresu 300
Oszczędności netto na początek okresu 100	Uzupełnienie zysków 170	Uszczuplenie zysków 170	Oszczędności netto na koniec okresu 100

Zwróćmy uwagę, że jeżeli podaż (zasób) pieniądza na początek (koniec) okresu zdefiniujemy jako sumę oszczędności kapitalistów oraz pieniędzy posiadanych przez przedsiębiorstwa i pracowników najemnych, to możemy zakładać, że wzrost podaży pieniądza równy jest przyrostowi oszczędności

[19] Warto dodać, że równość $\sum_k \Delta Z_t^k = 0$ realizuje się *ex post* w sposób przez nikogo nieplanowany, gdyż w przypadku planowanych zmian zadłużenia (oszczędności), generalnie $\sum_k \Delta M_t^k \neq 0$.

jednych kapitalistów i analogicznemu przyrostowi zadłużenia drugich z tytułu zaciągniętych kredytów inwestycyjnych. Jeżeli natomiast w definicji podaży pieniądza pominiemy pieniądze zamrożone w postaci oszczędności kapitalistów, to pojęcie podaży pieniądza zredukuje się do środków pieniężnych służących przedsiębiorstwom do regulowania wzajemnych zobowiązań za zakupione surowce, materiały i dobra inwestycyjne oraz środków na wypłaty wynagrodzeń (wracających na koniec okresu w całości do przedsiębiorstw w zamian za zakupione przez pracowników najemnych towary konsumpcyjne)[20].

1.9. Popyt konsumpcyjny

Zakładamy, że popyt konsumpcyjny każdego kapitalisty KK_t^k opisuje, właściwa mu, wektorowa funkcja popytu $d^k(p_t, \alpha^k \pi_t^k)$, $k=1,\ldots,m$, której argumentami są ceny towarów oraz, ustalany zgodnie z (26), jego fundusz konsumpcji $\alpha^k \pi_t^k$. Inaczej niż w przypadku popytu kapitalistów, popyt konsumpcyjny wszystkich pracowników najemnych KP_t rozpatrujemy zbiorczo, opisując go jedną, zagregowaną funkcją popytu $d^w(p_t, W_t)$, gdzie $W_t = p_t G\hat{L}\hat{U}_t K_t$ (zob. (6)) i przedstawia sumę wynagrodzeń wszystkich zatrudnionych[21]. W konsekwencji wektor globalnego popytu konsumpcyjnego w okresie t ma postać:

$$KO_t = KP_t + \sum_{k=1}^{m} KK_t^k = d^w(p_t, W_t) + \sum_{k=1}^{m} d^k(p_t, \alpha^k \pi_t^k). \tag{56}$$

***Założenie* 1.** Funkcje popytu $d^w(p_t, W_t)$ oraz $d^k(p_t, \alpha^k \pi_t^k)$, $k=1,\ldots,m$, są:

[20] Alternatywnie możemy przyjmować, że tak rozumiana podaż pieniądza, równa popytowi transakcyjnemu na pieniądz, jest stała lub proporcjonalna do wolumenu obrotów. Przyjęcie takiej lub innej definicji pieniądza w prezentowanej wersji modelu nie ma praktycznego znaczenia, gdyż zasoby pieniądza w rozpatrywanej gospodarce nie odgrywają aktywnej roli.

[21] W modelu możliwa jest dezagragacja pracowników według wysokości ich realnych wynagrodzeń, zależnych od posiadanych kwalifikacji i miejsca pracy (przedsiębiorstwa), połączona z założeniem, że pracownicy o różnej wysokości płacy realnej mają różne funkcje popytu. Dezagregacja taka byłaby jednak zabiegiem w dużej mierze technicznym, niewiele wnoszącym do opisu interesującego nas procesu konkurencji klasycznej, w którym koncentrujemy się na zagadnieniach związanych z alokacją kapitału.

a) dodatnio jednorodne stopnia 1 względem dochodu, tzn. $\forall \lambda > 0$

$$d^w(p_t, \lambda W_t) = \lambda\, d^w(p_t, W_t),$$

$$d^k(p_t, \lambda \alpha^k \pi_t^k) = \lambda\, d^k(p_t, \alpha^k \pi_t^k),$$

b) dodatnio jednorodne stopnia -1 względem cen, tzn. $\forall \lambda > 0$

$$d^w(\lambda p_t, W_t) = \lambda^{-1}\, d^w(p_t, W_t),$$

$$d^k(\lambda p_t, \alpha^k \pi_t^k) = \lambda^{-1}\, d^k(p_t, \alpha^k \pi_t^k).$$

Z założenia 1 otrzymujemy w szczególności, że

$$KO_t = W_t d^w(p_t) + \sum_{k=1}^{m} \alpha^k \pi_t^k d^k(p_t), \tag{57}$$

gdzie $d^w(p_t) = d^w(p_t, 1)$ i $d^k(p_t) = d^k(p_t, 1)$, $k = 1, \ldots, m$.

Z definicji π_t^k i π_t^j wynika, że $\pi_t^k = p_t \sum_{j=1}^{n} \eta_t^{kj} (I - A - \delta B - G\hat{L})^j u_t^j K_t^j$. Równanie (57) możemy więc przedstawić w postaci[22]:

$$KO_t = W_t d^w(p_t) + \sum_{k=1}^{m} \alpha^k d^k(p_t) p_t \sum_{j=1}^{n} \eta_t^{kj} (I - A - \delta B - G\hat{L})^j u_t^j K_t^j. \tag{58}$$

Przedstawiając (58) w zapisie macierzowym i korzystając z definicji W_t, otrzymujemy:

$$KO_t = d^w(p_t) p_t G\hat{L}\hat{U}_t K_t + \sum_{k=1}^{m} \alpha^k d^k(p_t) p_t (I - A - \delta B - G\hat{L}) \hat{\eta}_t^k \hat{U}_t K_t, \tag{59}$$

gdzie, podobnie jak wcześniej, $\hat{\eta}_t^k = \operatorname{diag}(\eta_t^{k1}, \ldots, \eta_t^{kn})$.

---

[22] Jak wynika z (58), struktura popytu pracowników najemnych lub struktura popytu indywidualnego kapitalisty mogą ulec zmianie jedynie wówczas, gdy zmienią się ceny produktów. Zmiana samych wynagrodzeń lub samego zysku kalkulacyjnego kapitalisty (przy stałym poziomie cen) powoduje bowiem proporcjonalny wzrost lub spadek popytu na wszystkie produkty i w konsekwencji nie zmienia struktury popytu. Własność taką posiadają m.in. funkcje popytu, odpowiadające potęgowej funkcji użyteczności lub funkcji użyteczności CES.

Rozpatrując w (59) tylko składowe i wektorowych funkcji popytu $d^w(p_t)$ i $d^k(p_t)$, otrzymamy oczywiście globalny popyt konsumpcyjny na towar i. W dalszej analizie, wygodnie nam jednak będzie popyt konsumpcyjny na towar i przedstawiać w innej, równoważnej postaci.

$$KO_t^i = (d^w(p_t)p_t G\hat{L})_i \hat{U}_t K_t + \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha^k d^k(p_t) p_t (I - A - \delta B - G\hat{L}) \hat{\eta}_t^k \right)_i \hat{U}_t K_t, \quad (60)$$

gdzie symbole $(\cdot)_i$ przedstawiają wiersze i odpowiednich macierzy z równania (59). W szczególności pozwoli to później na wykorzystanie tożsamości:

$$\forall p_t > 0 \qquad p_t d^w(p_t) = p_t d^k(p) = 1 \qquad (k = 1, \ldots, m), \quad (61)$$

wynikających, w świetle założenia 1, z ograniczeń budżetowych pracowników najemnych i kapitalistów (zob. (13) i (26)).

1.10. Decyzje przedsiębiorstw o cenach i produkcji

Kapitaliści, oprócz decyzji o swojej konsumpcji, podejmują decyzje charakterystyczne dla właścicieli kapitału – decydują o wielkości swojego funduszu akumulacji i o sposobie jego alokacji w przedsiębiorstwach. Nie zarządzają jednak bezpośrednio przedsiębiorstwami, zlecając tę czynność wynajętym menedżerom. W konsekwencji decyzje o wielkości produkcji oraz o cenach sprzedawanych produktów podejmowane są autonomicznie na szczeblu przedsiębiorstw.

Zakładamy, że z początkiem okresu $t+1$ przedsiębiorstwo podejmuje decyzję o cenie p_{t+1}^j, po której będzie sprzedawało w tym okresie wytwarzany przez siebie produkt. Swoją decyzję uzależnia od wskaźnika zapasów

$$s_{t+1}^j = \frac{S_{t+1}^j}{K_{t+1}^j}, \quad (62)$$

którego wartość znana jest już na początku okresu $t+1$, gdyż zarówno zapas S_{t+1}^j, jak i zasób majątku trwałego $K_{t+1}^j = K_t^j + \Delta K_t^j$ powstają w okresie t.

Jak już stwierdziliśmy w punkcie 1.4, przedsiębiorstwo obniża cenę produktu j, jeżeli wskaźnik s_{t+1}^j jest większy od wskaźnika normatywnego $\overline{s^j}$ i podnosi cenę w sytuacji przeciwnej. Regułę tę wyraża równanie

$$p_{t+1}^j = p_t^j (1 - \beta^j (s_{t+1}^j - \overline{s^j})), \quad (63)$$

w którym $\beta^j > 0$ jest współczynnikiem wrażliwości ceny produktu j na nierównowagę między popytem i podażą.

Cena p^j_{t+1} pozostaje stała do końca okresu $t+1$, gdyż ewentualne rozbieżności między popytem i podażą, jakie mogą pojawić się w tym okresie, wpłyną dopiero na cenę p^j_{t+2}, zależną od zapasu S^j_{t+2} i majątku K^j_{t+2}.

Nieco inaczej niż decyzje o cenach zapadają decyzje o wielkości produkcji. Zgodnie z równaniem (2), wielkość produkcji przedsiębiorstwa j w okresie $t+1$ wynosi $Y^j_{t+1} = u^j_{t+1} K^j_{t+1}$ i zależy od majątku trwałego K^j_{t+1} oraz stopnia jego wykorzystania, opisanego wskaźnikiem u^j_{t+1}. Ponieważ wielkość majątku trwałego K^j_{t+1} jest na początku okresu $t+1$ już przesądzona wcześniejszymi decyzjami kapitalistów o alokacji kapitału, decyzja o wielkości produkcji Y^j_{t+1} sprowadza się do decyzji o stopniu wykorzystania posiadanego majątku trwałego K^j_{t+1}, czyli do określenia wartości wskaźnika u^j_{t+1}. Zakładamy, że decyzja ta podejmowana jest w sposób opisany równaniem

$$u^j_{t+1} - \bar{u}^j = \sigma^j (u^j_t - \bar{u}^j) - \varepsilon^j (s^j_t - \bar{s}^j), \tag{64}$$

w którym $\bar{u}^j$ $(0 < \bar{u}^j < 1)$ jest normatywnym wskaźnikiem wykorzystania majątku trwałego, natomiast σ^j $(0 < \sigma^j < 1)$ oraz $\varepsilon^j > 0$ są parametrami reakcji przedstawiającymi wrażliwość przedsiębiorstwa na nadmierne bądź niedostateczne wykorzystanie majątku trwałego oraz jego wrażliwość na zbyt małe lub zbyt duże zapasy wytwarzanego produktu[23].

Jak wynika z (64), stopień wykorzystania majątku trwałego jest w każdym okresie wypadkową działań przedsiębiorstwa zmierzających, z jednej strony do osiągnięcia normatywnego poziomu wskaźnika u^j_t, a z drugiej – do osiągnięcia normatywnej wartości wskaźnika s^j_t.

Warto również zauważyć, że o ile cena p^j_{t+1} obowiązuje od momentu jej ustalenia z początkiem okresu $t+1$, o tyle decyzja o produkcji Y^j_{t+1}, uruchamianej z początkiem okresu $t+1$, może zostać podjęta już na początku okresu t. Z początkiem tego okresu znane są już bowiem wszystkie informacje, niezbędne zarówno do określenia przez kapitalistów przyrostu majątku ΔK^j_t (a w konsekwencji zasobu K^j_{t+1}), jak też do określenia przez przedsiębiorstwo wskaźnika u^j_{t+1}. W ten sposób przedsiębiorstwo może zyskać czas na poczynienie odpowiednich przygotowań do zmiany wielkości produkcji (np. w wielkości zatrudnienia).

[23] Identyczne równania behawioralne znaleźć można m.in. w: ([7], [8], [10, rozdz. 3]).

1.11. Kompletny model

Przedstawiony dotąd szczegółowy opis poszczególnych segmentów modelu podsumujemy zwięzłą prezentacją kompletu opisujących go równań, co pozwoli na lepsze uchwycenie wszystkich powiązań między jego zmiennymi. Model obejmuje pięć bloków równań różnicowych, opisujących dynamikę cen, majątku trwałego, produkcji, zapasów i udziałów własnościowych. Zwróćmy uwagę, że łatwo można sprowadzić go do układu nieliniowych, rekurencyjnych równań różnicowych pierwszego stopnia, w którym wartości zmiennych z okresu determinują wartości wszystkich zmiennych w okresie $t+1$[24].

Minimalna liczba zmiennych za pomocą których można wyrazić wszystkie zależności modelu (w trakcie jednego okresu) jest równa liczbie równań opisujących jego dynamikę i wynosi $4n+n\times m$. Zmiennymi tymi są ceny wytwarzanych produktów p_t^i, wskaźniki wykorzystania majątku trwałego u_t^i, zasoby majątku trwałego przedsiębiorstw K_t^i, zapasy produktów S_t^i oraz wskaźniki udziałów własnościowych η_t^{ki}. Prezentacja modelu tylko za pomocą wymienionych wyżej zmiennych, prowadziłaby jednak do skomplikowanych wzorów matematycznych, zamazujących jego treść ekonomiczną. Z tego względu, w trosce o przejrzystość i czytelność modelu, posługujemy się zestawem zmiennych pomocniczych. Zmienne te, o wyrazistej interpretacji ekonomicznej, pełnią kluczową rolę w opisie funkcjonowania modelowanej gospodarki. Ułatwiają ponadto matematyczną analizę własności modelu.

Równania dynamiki

– dynamika cen

$$p_{t+1}^i = p_t^i(1-\beta^i(s_{t+1}^i-\bar{s}^i)), \tag{65}$$

– dynamika majątku trwałego

$$K_{t+1}^i = K_t^i\left(1+\sum_{k=1}^{m}\eta_t^{ki}((\varphi_t^k+\gamma^k(r_t^i-r_t))\right), \tag{66}$$

---

[24] Jedynym równaniem modelu, w którym występują zmienne z indeksem czasu $t-1$ jest równanie definiujące wskaźnik inflacji j_t. Korzystając z odwróconego równania dynamiki cen: $p_{t-1}^i = p_t^i(1-\beta^i(s_t^i-\bar{s}^i))^{-1}$, wskaźnik ten można jednak przedstawić jako funkcję zmiennych wyłącznie z okresu t.

– dynamika produkcji (wykorzystania majątku trwałego)

$$u_{t+1}^i = \bar{u}^i + \sigma^i(u_t^i - \bar{u}^i) - \varepsilon^i(s_t^i - \bar{s}^i), \tag{67}$$

– dynamika zapasów

$$S_{t+1}^i = S_t^i + (I - A - \delta B)_i \hat{U}_t K_t - B_i(K_{t+1} - K_t) - (d^w(p_t) p_t G\hat{L})_i \hat{U}_t K_t -$$

$$- \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha^k d^k(p_t) p_t (I - A - \delta B - G\hat{L}) \hat{\eta}_t^k \right)_i \hat{U}_t K_t, \tag{68}$$

– dynamika udziałów własnościowych

$$\eta_{t+1}^{ki} = \eta_t^{ki} \frac{1 + \varphi_t^k + \gamma^k(r_t^i - r_t)}{\sum_{k=1}^{m} \eta_t^{ki}(1 + \varphi_t^k + \gamma^k(r_t^i - r_t))}. \tag{69}$$

Zmienne pomocnicze

– zmienna bilansująca fundusz akumulacji kapitału ΔC_t^k kapitalisty k z przyrostami jego udziałów w kapitałach przedsiębiorstw ΔC_t^{kj}

$$\varphi_t^k = \rho_t^k - \gamma^k(r_t^k - r_t), \tag{70}$$

– stopa wzrostu kapitału kapitalisty k

$$\rho_t^k = (1 - \alpha^k) r_t^k + \beta_0^k v_t^k - \beta_1^k j_t, \tag{71}$$

– stopa zysku kalkulacyjnego kapitalisty k

$$r_t^k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_t^{ki} r_t^i p_t (B + \hat{\bar{s}})^i K_t^i}{\sum_{i=1}^{n} \eta_t^{ki} p_t (B + \hat{\bar{s}})^i K_t^i}, \tag{72}$$

– stopa zysku przedsiębiorstwa i

$$r_t^i = \frac{\pi_t^i}{C_t^i} = \frac{p_t (I - A - \delta B - G\hat{L})^i u_t^i}{p_t (B + \hat{\bar{s}})^i}, \tag{73}$$

– średnia stopa zysku (w całej gospodarce)

$$r_t = = \frac{p_t(I - A - \delta B - G\hat{L})\hat{U}_t K_t}{p_t(B + \hat{s})K_t}, \tag{74}$$

– wskaźnik wykorzystania kapitału kapitalisty k

$$v_t^k = \frac{p_t \hat{\eta}_t^k (\hat{U}_t - \hat{\bar{U}}) K_t}{p_t \hat{\eta}_t^k \hat{\bar{U}} K_t}, \tag{75}$$

– wskaźnik inflacji

$$j_t = \frac{(p_t - p_{t-1})\hat{U}_t K_t}{p_{t-1}\hat{U}_t K_t}, \tag{76}$$

– wskaźnik zapasów

$$s_t^i = \frac{S_t^i}{K_t^i}. \tag{77}$$

Inne oznaczenia

$$p_t = (p_t^1, \ldots, p_t^n), \qquad K_t = (K_t^1, \ldots, K_t^n),$$

$$\hat{U}_t = \operatorname{diag}(u_t^1, \ldots, u_t^n), \qquad \hat{\eta}_t^k = \operatorname{diag}(\eta_t^{k1}, \ldots, \eta_t^{kn}).$$

2. Długookresowa równowaga klasyczna

Podstawowym pytaniem, jakie można sformułować w odniesieniu do prezentowanego modelu, jest pytanie o to, czy gospodarka, którą opisuje, skazana jest na nieustanne fluktuacje cen, produkcji, zapasów, rentowności kapitału itd., czy też, zgodnie z poglądami klasyków, mechanizm jej funkcjonowania prowadzi do osiągnięcia równowagi, czyli do wyrównania się stóp zysku, pociągającego za sobą równomierny wzrost gospodarczy. Aby odpowiedzieć na to pytanie, trzeba po pierwsze udowodnić, że tak rozumiana równowaga w ogóle istnieje, a po drugie, że jest to równowaga asymptotycznie stabilna. Ze względu na ograniczone ramy artykułu, dalej

pokażemy jedynie, że w analizowanym modelu rzeczywiście istnieje stan równowagi klasycznej, a ściślej, że istnieje zbiór takich stanów mocy continuum.

2.1. Definicja równowagi i jej podstawowe własności

Nawiązując do klasycznej koncepcji równowagi, będziemy przyjmować następującą definicję[25].

Definicja. Gospodarka opisana równaniami (65)-(77) pozostaje w stanie długookresowej równowagi klasycznej, jeżeli w kolejnych okresach t spełnione są następujące warunki:

– ceny wszystkich produktów są dodatnie i nie ulegają zmianom:

$$\forall i \quad p_t^i = \bar{p}^i > 0, \tag{78}$$

– stopy zysku kalkulacyjnego wszystkich przedsiębiorstw są jednakowe, dodatnie i stałe:

$$\forall i \quad r_t^i = \bar{r} > 0, \tag{79}$$

– majątek trwały wszystkich przedsiębiorstw wykorzystany jest w stopniu normatywnym:

$$\forall i \quad u_t^i = \bar{u}^i \qquad (0 < \bar{u}^i < 1), \tag{80}$$

– udziały poszczególnych kapitalistów w kapitałach przedsiębiorstw są stałe:

$$\forall k, \ \forall i \quad \eta_t^{ki} = \bar{\eta}^{ki} \geqslant 0. \tag{81}$$

Odnotujmy, że nie jest wymagane, aby w równowadze każdy kapitalista posiadał udziały własnościowe przynajmniej w jednym przedsiębiorstwie.

---

[25] Prezentowana definicja równowagi generalnie podobna jest do definicji formułowanych w pracach Duménila-Lévy'ego. Różnica polega jedynie na tym, że równowaga nie jest definiowana wprost jako proces równomiernego wzrostu, lecz ów równomierny wzrost jest implikacją przyjętej definicji. Takie zdefiniowanie równowagi jest bliższe oryginalnym pracom klasyków, którzy równowagę kojarzyli bardziej z równością stóp zysku niż z równomiernym wzrostem.

Możliwe są takie stany równowagi, w których pewni kapitaliści nie mają żadnych udziałów, czyli:

$$\exists k \ \forall i \quad \bar{\eta}^{ki} = 0. \tag{82}$$

Ich stopy zysku z kapitału $\bar{r}^k$ oraz stopy wzrostu kapitału $\bar{\rho}^k$ są wówczas wielkościami nieokreślonymi (por. (72) i (71)).

Poza tym szczególnym przypadkiem, w równowadze, jak wynika z (72) i (79), stopy zysku wszystkich kapitalistów są identyczne:

$$\forall k \quad (\exists i \ \bar{\eta}^{ki} > 0) \Rightarrow (\bar{r}^k = \bar{r} > 0). \tag{83}$$

Z (83) oraz (70), (71), (75) i (76) wynika ponadto, że w równowadze

$$\forall k \quad (\exists i \ \bar{\eta}^{ki} > 0) \Rightarrow (\bar{\varphi}^k = \bar{\rho}^k = (1 - \alpha^k)\bar{r}). \tag{84}$$

Równocześnie z (69) i definicji równowagi otrzymujemy, że

$$\forall k \quad (\exists i \ \bar{\eta}^{ki} > 0) \Rightarrow \left(1 + \bar{\rho}^k = \sum_{k=1}^{m} \bar{\eta}^{ki}(1 + \bar{\rho}^k)\right), \tag{85}$$

a w konsekwencji:

$$\forall k \quad (\exists i \ \bar{\eta}^{ki} > 0) \Rightarrow (\bar{\rho}^k = \bar{\rho} > 0). \tag{86}$$

Zgodnie z (86) w stanie równowagi identyczne są nie tylko stopy zysku wszystkich przedsiębiorstw, lecz także stopy wzrostu kapitału wszystkich kapitalistów, mających jakiekolwiek dodatnie udziały w kapitałach przedsiębiorstw.

Z (84) i (86) dostajemy dodatkową implikację:

$$\forall k \quad (\exists i \ \bar{\eta}^{ki} > 0) \Rightarrow (\alpha^k = \alpha > 0), \tag{87}$$

z której wynika ważny wniosek, że koniecznym warunkiem osiągnięcia przez gospodarkę stanu równowagi jest to, aby jedynymi udziałowcami przedsiębiorstw byli kapitaliści o tej samej skłonności do konsumpcji[26].

---

[26] Nie oznacza to, że do stanu równowagi nie może zmierzać gospodarka, w której udziałowcami przedsiębiorstw są kapitaliści o różnych skłonnościach do konsumpcji. Można wykazać, że zbieżności gospodarki do stanu równowagi towarzyszy w takim

Ponieważ, z definicji, $\forall i \sum_{k=1}^{m} \bar{\eta}^{ki}=1$, z (66) oraz (84), (86) i (87) otrzymujemy, że

$$\forall i \quad \bar{K}^i_{t+1}=(1+\bar{\rho})\bar{K}^i_t>0, \tag{88}$$

gdzie

$$\bar{\rho}=(1-\alpha)\bar{r}>0. \tag{89}$$

Warto podkreślić, że, wynikający z przyjętej definicji równowagi klasycznej, warunek równomiernego wzrostu majątku trwałego przedsiębiorstw (88) równoważny jest warunkowi (79) równości stóp zysku. Gdybyśmy bowiem w definicji równowagi zamiast warunku (79) wstawili postulat (88) równomiernego wzrostu majątku trwałego z pewną stopą wzrostu $\bar{\rho}>0$, wówczas z tak zmienionej definicji równowagi wynikałyby obecny warunek (79) oraz równanie (89). Tak więc, przy założeniu stałych cen, pełnego wykorzystania majątku trwałego i stałych udziałów własnościowych, równość stóp zysku implikuje równomierny wzrost i na odwrót[27].

Występujący w definicji równowagi postulat stałych cen (78), ze względu na (65), równoważny jest warunkowi

$$\forall i \quad s^i_t=\bar{s}^i>0, \tag{90}$$

z którego, wobec (77) i (88) otrzymujemy, że w równowadze zapasy każdego produktu kształtują się na poziomie normatywnym i rosną z równomierną stopą wzrostu $\bar{\rho}>0$:

$$\forall i \quad \bar{S}^i_{t+1}=(1+\bar{\rho})\bar{S}^i_t>0. \tag{91}$$

---

przypadku stopniowa eliminacja kapitalistów o skłonności do konsumpcji większej niż minimalna. (Stany równowagi z udziałowcami o skłonności do konsumpcji większej niż minimalna są niestabilne).

[27] W celu wykazania, że postulat równomiernego wzrostu implikuje równość stóp zysku, ze względu na (66) wystarczy założyć, że w równowadze

$$\forall i \quad \sum_{k=1}^{m} \bar{\eta}^{ki}(\bar{\varphi}^k+\gamma^k(\bar{r}^i-\bar{r}))=\bar{\rho}>0,$$

a następnie zauważyć, iż zgodnie z (69), w równowadze spełniony jest warunek:

$$\forall i, \forall k \quad \bar{\rho}=\bar{\varphi}^k+\gamma^k(\bar{r}^i-\bar{r}),$$

z którego, wobec (83)-(87), wynika, że $\forall i, \forall k \quad \bar{\rho}=(1-\alpha)\bar{r}+\gamma^k(\bar{r}^i-\bar{r})$, a więc w konsekwencji $\forall i \; \bar{r}^i=\bar{r}$.

Zgodnie z (91) i (77), $\Delta \bar{S}_t^i = \bar{p}\bar{s}^i \bar{K}_t^i$. Równocześnie, jak wynika z (88) i (43), w równowadze $\Delta \bar{K}_t^{ki} = \bar{p}\bar{\eta}^{ki} \bar{K}_t^i$. Podstawiając powyższe równania do (54) i uwzględniając dodatkowo, że w stanie równowagi, zgodnie z (28) oraz (31) i (32), spełniona jest równość $\Delta \bar{M}_t^k = 0$, dochodzimy do wniosku, że

$$\forall k \quad \Delta \bar{Z}_t^k = 0. \tag{92}$$

Ze względu na (51), warunek (92) równoważny jest warunkowi

$$\forall k \quad \bar{p} \sum_{i=1}^{n} B^j \Delta \bar{K}_t^i + \bar{p}\, \overline{KK}_t^k = \bar{\chi}_t^k, \tag{93}$$

z którego wynika, że w stanie równowagi[28] każdy kapitalista na inwestycje i konsumpcję wydaje dokładnie tyle, ile wynosi jego zysk zrealizowany $\bar{\chi}_t^k$. W rezultacie stan jego zadłużenia bądź oszczędności pozostaje stały. W zależności od przyjętej definicji pieniądza, jego podaż jest również stała bądź też (w przypadku uwzględnienia pieniądza transakcyjnego) rośnie proporcjonalnie do wolumenu obrotów, ze stopą $\bar{p}$. W obu wypadkach rola pieniądza w procesie równomiernego wzrostu jest neutralna.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że podstawiając (88), (89) i (91) do (68), otrzymujemy następujące równanie macierzowe dynamiki zapasów (bilansu produkcji), jakie muszą spełniać wartości zmiennych w stanie równowagi:

$$\hat{\bar{U}}\bar{K}_t = (1-\alpha)\bar{r}(B+\hat{\bar{s}})\bar{K}_t + (A+\delta B+d^w(\bar{p})\bar{p}G\hat{L})\hat{\bar{U}}\bar{K}_t +$$

$$+\alpha \sum_{k=1}^{m} d^k(\bar{p})\bar{p}(I-A-\delta B-G\hat{L})\hat{\bar{\eta}}^k \hat{\bar{U}}\bar{K}_t. \tag{94}$$

Jak wynika z (94), gospodarkę w równowadze cechuje nie tylko równomierny wzrost majątku trwałego i zapasów, lecz także analogiczny wzrost produkcji oraz popytu zaopatrzeniowego, inwestycyjnego i konsumpcyjnego.

Równanie (94) opisuje gospodarkę w kategoriach ilościowych (fizycznych). Jego dopełnieniem jest równanie, jakie w stanie równowagi muszą spełniać ceny, aby spełniony był postulat (79) równości stóp zysku przedsiębiorstw. Ze względu na (73) ma ono postać:

$$\bar{r}\bar{p}(B+\hat{\bar{s}}) = \bar{p}(I-A-\delta B-G\hat{L})\hat{\bar{U}}. \tag{95}$$

---

[28] Przypomnijmy, że poza równowagą spełniona jest zawsze tylko równość globalna $\sum_{k=1}^{m} \Delta Z_k^t = 0$ (por. (55)).

Ponieważ, zgodnie z założeniem 1, funkcje popytu konsumpcyjnego $d^w(p)$ i $d^k(p)$ są dodatnio jednorodne stopnia minus jeden względem cen, wektory $\bar{p}$ i $\bar{K}_t$, spełniające układ równań (94)-(95) określone są z dokładnością do struktury. Z tego względu dalej rozpatrywać będziemy unormowane wektory cen i zasobów majątku trwałego w równowadze (pomijając, w przypadku wektora $\bar{K}_t$, nieistotny w tym momencie indeks czasu t):

$$\bar{x}=\frac{1}{\bar{p}^n}\bar{p}=(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^{n-1},1)>0, \tag{96}$$

$$\bar{k}=\frac{1}{\bar{K}_t^n}\bar{K}_t=(\bar{k}^1,\ldots,\bar{k}^{n-1},1)>0. \tag{97}$$

2.2. Zbiór stanów równowagi

Oznaczmy przez η $(n\times m)$-wymiarowy wektor utworzony ze wskaźników udziału poszczególnych kapitalistów w kapitałach własnych przedsiębiorstw:

$$\eta=(\eta^{11},\ldots,\eta^{1n};\eta^{21},\ldots,\eta^{2n},\ldots,\eta^{m1},\ldots,\eta^{mn}), \tag{98}$$

spełniający standardowe warunki:

$$0\leqslant\eta^{ki}\leqslant 1,\qquad \sum_{k=1}^{m}\eta^{ki}=1\qquad (k=1,\ldots,m;\ i=1,\ldots,n). \tag{99}$$

O wektorze η będziemy mówić, że opisuje strukturę (rozkład) własności.

Z rozważań przedstawionych w poprzednim punkcie wynika, że w modelu (65)-(77) istnieje stan równowagi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją wektory η, $\bar{x}>0$, $\bar{k}>0$ oraz liczba $\bar{r}>0$, spełniające równania (94)-(95). W punkcie tym pokazaliśmy także, że równowaga możliwa jest tylko wtedy, gdy jedynymi udziałowcami przedsiębiorstw są kapitaliści o takiej samej skłonności do konsumpcji. Ponieważ, jak zobaczymy za chwilę, w rozważaniach nad istnieniem równowagi nie ma znaczenia, jaką (wspólną dla pewnej grupy kapitalistów) skłonność do konsumpcji bierzemy pod uwagę, w szczególności możemy zająć się kapitalistami o minimalnej skłonności do konsumpcji

$$\bar{\alpha}=\min_k \alpha^k. \tag{100}$$

Zmieniając w razie potrzeby numerację kapitalistów, przyjmijmy, że skłonność do konsumpcji równą $\bar{\alpha}$ wykazuje ostatnich $\bar{m}$ $(1 \leqslant \bar{m} \leqslant m)$ kapitalistów. Założenie, że kapitaliści ci są w stanie równowagi jedynymi udziałowcami przedsiębiorstw, oznacza, że wektor $\bar{\eta}$ opisujący strukturę własności w równowadze, oprócz warunków (99), spełnia dodatkowy warunek:

$$\bar{\eta}^{ki} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m - \bar{m};\ i = 1, \ldots, n). \tag{101}$$

Oczywiście wektorów $\bar{\eta}$ spełniających (99) i (101) jest nieskończenie wiele. Wykażemy, że stan równowagi istnieje dla każdego z nich, czyli dla dowolnego rozkładu własności przedsiębiorstw pomiędzy kapitalistów o skłonności do konsumpcji $\bar{\alpha}$. W tym celu, zanim sformułujemy i udowodnimy odpowiednie twierdzenie, wprowadzimy dwa założenia, charakteryzujące technologię produkcji.

***Założenie* 2.** Macierz $(A + \delta B)$ jest nierozkładalna, tzn. nie istnieje taki podzbiór właściwy $J \neq \emptyset$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że $\forall i \notin J,\ \forall j \in J\ a_{ij} + \delta b_{ij} = 0$.

Założenie nierozkładalności oznacza, że nie istnieje żadna podgrupa produktów, do wytworzenia których potrzebne są, jako nakłady bieżące lub majątkowe, wyłącznie produkty należące do tej podgrupy. W przypadku gdy każde przedsiębiorstwo wytwarza tylko jeden produkt, jest to równoznaczne z tym, że żaden właściwy podzbiór przedsiębiorstw nie jest samowystarczalny.

***Założenie* 3.** Istnieje taki wektor cen $p > 0$, że $p > p(A + \delta B + G\hat{L})$.

Nierówność powyższa jest wariantem tzw. założenia o produktywności gospodarki (macierzy). Oznacza ona, że możliwy jest taki układ cen $p > 0$, że cena każdego produktu p^j jest większa od jednostkowych kosztów jego wytworzenia, obejmujących koszty nakładów bezpośrednich pA^j, koszty amortyzacji majątku trwałego δpB^j oraz koszty pracy $p(G\hat{L})^j$. Innymi słowy, zakładamy, że istnieją ceny, które wszystkim przedsiębiorstwom jednocześnie zapewniają dodatnie zyski kalkulacyjne.

Twierdzenie. *Jeżeli spełnione są założenia* 1-3, *to w modelu* (65)-(77) *dla każdego wektora* $\bar{\eta}$ *spełniającego warunki* (99) *i* (101) *istnieje stan długookresowej równowagi klasycznej.*

Dowód[29]: Z (94)-(95) wynika, że aby udowodnić powyższe twierdzenie, wystarczy wykazać, że dla dowolnego wektora $\bar{\eta}$ spełniającego warunki (99) i (101) istnieją wektory $\bar{x}>0$ i $\bar{k}>0$ oraz liczba $\bar{r}>0$, spełniające równania

$$\bar{x}(I-A-\delta B-G\hat{L})\hat{\bar{U}}=\bar{r}\bar{x}(B+\hat{\bar{s}}), \tag{102}$$

$$\hat{\bar{U}}\bar{k}=(1-\alpha)\bar{r}(B+\hat{\bar{s}})\bar{k}+(A+\delta B+d^{w}(\bar{x})\bar{x}\hat{G}L)\hat{\bar{U}}\bar{k}+$$

$$+\bar{\alpha}\sum_{k=1}^{m}d^{k}(\bar{x})\bar{x}(I-A-\delta B-G\hat{L})\hat{\bar{\eta}}^{k}\hat{\bar{U}}\bar{k}. \tag{103}$$

1. Rozpatrzmy najpierw równanie (102). W tym celu zwróćmy uwagę, że założenie 3 można zapisać w postaci: $\exists p>0$, $p^{T}>(A+\delta B+G\hat{L})^{T}p^{T}$, co jest równoważne temu, że macierz $I-(A+\delta B+G\hat{L})^{T}$ jest nieosobliwa, a macierz do niej odwrotna jest półdodatnia (zob. [31, s. 282-289]):

$$((I-A-\delta B-G\hat{L})^{T})^{-1}\gneq 0^{30}. \tag{104}$$

Ponieważ $((I-A-\delta B-G\hat{L})^{T})^{-1}=((I-A-\delta B-G\hat{L})^{-1})^{T}$, ze (104) otrzymujemy, że $(I-A-\delta B-G\hat{L})^{-1}\gneq 0$. Równocześnie, jak wynika z założenia 2, macierz $A+\delta B+G\hat{L}$ jest nierozkładalna. Ostatecznie dostajemy stąd (zob. [21, s. 156]):

$$(I-A-\delta B-G\hat{L})^{-1}>0. \tag{105}$$

Ponieważ z założenia $\forall i\ \bar{s}^{i}>0$ oraz $\bar{u}^{i}>0$, równanie (102) można zatem przedstawić w równoważnej postaci

$$\bar{x}=\bar{r}\bar{x}Q, \tag{106}$$

gdzie $Q=(B+\hat{\bar{s}})\hat{\bar{U}}^{-1}(I-A-\delta B-G\hat{L})^{-1}>0$.

Na mocy twierdzenia Perrona-Frobeniusa [17, rozdz. 13] wnioskujemy, że równanie (106) ma dokładnie jedno rozwiązanie $(\bar{r},\bar{x})>0$, gdzie $1/\bar{r}>0$ jest pierwiastkiem Frobeniusa macierzy $Q>0$, natomiast $\bar{x}>0$ jest odpowiadającym mu wektorem własnym.

---

[29] Dowód podobnego twierdzenia (przy silniejszych założeniach) przedstawiony jest w pracach [6] i [9].

[30] Symbol $A\gneq 0$ oznacza, że żaden element macierzy A nie jest ujemny, a przynajmniej jeden jest dodatni.

2. Przejdźmy do równania (103), zapisując je w postaci

$$\bar{k} = E\bar{k}, \tag{107}$$

gdzie E jest macierzą, zależną od rozwiązania $(\bar{r}, \bar{x}) > 0$ równania (106), daną wzorem:

$$E = (1-\bar{\alpha})\bar{r}\hat{U}(B+\hat{s}) + \hat{U}^{-1}(A+\delta B+d^w(\bar{x})\bar{x}G\hat{L})\hat{U} +$$

$$+\bar{\alpha}\hat{U}^{-1}\sum_{k=1}^{m} d^k(\bar{x})\bar{x}(I-A-\delta B-G\hat{L})\hat{\eta}^k\hat{U}.$$

Macierz E jest macierzą półdodatnią, gdyż jak wynika z równania (102)

$$\bar{x}(I-A-\delta B-G\hat{L}) = \bar{r}\bar{x}(B+\hat{s})\hat{U}^{-1} \gneqq 0. \tag{108}$$

Wobec założenia o nierozkładalności macierzy $A+\delta B$ i warunku (108), macierz E jest również nierozkładalna. Wynika stąd, że na mocy twierdzenia Perrona-Frobeniusa macierz E ma dodatni pierwiastek charakterystyczny (pierwiastek Frobeniusa), większy od modułu każdego innego pierwiastka tej macierzy. Pierwiastkowi temu odpowiada dodatni wektor własny, będący jej jedynym nieujemnym wektorem własnym. W celu udowodnienia, że istnieje wektor $\bar{k} > 0$ spełniający (107), wystarczy zatem wykazać, że pierwiastek Frobeniusa macierzy E jest równy jedności. W tym celu rozpatrzmy macierz $F = \hat{U}E\hat{U}^{-1}$ oraz iloczyn $\bar{x}F$. Macierz F ma postać

$$F = (1-\bar{\alpha})\bar{r}(B+\hat{s})\hat{U}^{-1} + A + \delta B + d^w(\bar{x})\bar{x}G\hat{L} +$$

$$+\bar{\alpha}\sum_{k=1}^{m} d^k(\bar{x})\bar{x}(I-A-\delta B-G\hat{L})\hat{\eta}^k. \tag{109}$$

Ponieważ, zgodnie z (61), $\bar{x}d^w(\bar{x}) = \bar{x}d^k(\bar{x}) = 1$ $(k = 1, \ldots, m)$, zatem

$$\bar{x}F = (1-\bar{\alpha})\bar{r}\bar{x}(B+\hat{s})\hat{U}^{-1} + \bar{x}(A+\delta B+G\hat{L}) +$$

$$+\bar{\alpha}\sum_{k=1}^{m} \bar{x}(I-A-\delta B-G\hat{L})\hat{\eta}^k. \tag{110}$$

Z definicji $\hat{\eta}^k$ wynika, że $\sum_{k=1}^{m} \hat{\eta}^k = I$. Równanie (110) redukuje się więc do postaci:

$$\bar{x}F = (1-\bar{\alpha})\bar{r}\bar{x}(B+\hat{s})\hat{U}^{-1} + (1-\bar{\alpha})\bar{x}(A+\delta B+G\hat{L}) + \bar{\alpha}\bar{x}. \quad (111)$$

Ostatecznie z warunków (111) i (108) otrzymujemy

$$\bar{x}F = \bar{x}. \quad (112)$$

Macierz F, podobnie jak E, jest półdodatnia i nierozkładalna. Ponieważ $\bar{x} > 0$, zatem pierwiastek Frobeniusa macierzy F jest równy jedności. Równy jedności jest także pierwiastek Frobeniusa macierzy E, gdyż macierze F i E, będąc macierzami podobnymi, mają te same pierwiastki charakterystyczne. Stąd z kolei wynika, że istnieje wektor $\bar{k} > 0$, zależny od $\bar{\eta}$, spełniający (107), co kończy dowód twierdzenia. ■

Uwzględniając wnioski płynące z przeprowadzonego dowodu, podsumujmy wyniki przeprowadzonych rozważań nad równowagą klasyczną.

- W rozpatrywanym modelu istnieje nieskończenie wiele różnych stanów równowagi.
- Każdy stan równowagi generowany jest przez pewien wektor $\bar{\eta}$ rozkładu własności przedsiębiorstw pomiędzy kapitalistów o takiej samej skłonności do konsumpcji $\bar{\alpha}$.
- Każdemu wektorowi $\bar{\eta}$ odpowiada właściwy mu wektor $\bar{k} = \bar{k}(\bar{\eta})$ struktury majątku trwałego, odtwarzanej z okresu na okres w procesie równomiernego wzrostu.
- Bez względu na rozkład własności $\bar{\eta}$ oraz analityczną postać funkcji popytu $d^w(x)$ i $d^k(x)$ $(k = 1, \ldots, m)$, ceny równowagi $\bar{x}$, odpowiadająca im równomierna stopa zysku $\bar{r}$ oraz stopa równomiernego wzrostu $\bar{\rho} = (1-\bar{\alpha})\bar{r}$ są zawsze takie same.

Literatura

[1] Arrow K.J., Hahn F.H., *General Competitive Analysis*, Holden-Day, San Francisco 1971.

[2] Boggio L., *On the Stability of Production Prices*, Metroeconomica vol. 37, 1985, no. 3, s. 241-267.

[3] Boggio L., *The Dynamic Stability of Production Prices: A Synthetic Discussion of Models and Results*, Political Economy, Studies in the Surplus Approach, vol. 6, no. (1-2), s. 47-58.
[4] Czeremnych J.N., *Analiz powiedienija trajektorij dinamiki narodno-choziajstwiennych modielej*, Nauka, Moskwa 1982.
[5] Debreu G., *Theory of Value*, John Wiley and Sons, New York 1959.
[6] Duménil G., Lévy D., *The Stability of Long-Term Equilibrium in a General Disequilibrium Model*, CEPREMAP Working Paper 8717, Paryż 1987.
[7] Duménil G., Lévy D., *The Dynamics of Competition: A Restoration of the Classical Analysis*, Cambridge Journal of Economics vol. 11, 1987, no. 2, s. 133-164.
[8] Duménil G., Lévy D., *The Competitive Process in a Fixed Capital Environment: A Classical View*, The Manchester School vol. 57, 1989, no. 1, s. 34-57.
[9] Duménil G., Lévy D., *Micro Adjustment Toward Long-Term Equilibrium*, Journal of Economic Theory vol. 53, 1991, no. 2, s. 369-395.
[10] Duménil G., Lévy D., *The Economics of the Profit Rate*, Edward Elgar Publishing Company, Londyn 1993.
[11] Duménil G., Lévy D., *Being Keynesian in the Short Term and Classical in the Long Term: The Traverse to Classical Long Term Equilibrium*, The Manchester School vol. 67, 1999, no. 6, s. 684-716.
[12] Ellickson B., *Competitive Equilibrium*, Cambridge University Press, Cambridge 1993.
[13] Fisher F.M., *A Non-Tâtonnement Model with Production and Consumption*, Econometrica 1976, no. 44, s. 907-938.
[14] Fisher F.M., *Disequilibrium Foundations of Equilibrium Economics*, Cambridge University Press, Cambridge 1983.
[15] Flaschel P., Semmler W., *Classical and Neoclassical Competitive Adjustment Processes*, The Manchester School vol. 55, 1987, no. 1, s. 13-37.
[16] Frois G.A., Berrebi E., *Theory of Value, Prices and Accumulation. A Mathematical Integration of Marx, von Neumann and Sraffa* (tłum. z j. francuskiego), Cambridge University Press, Cambridge 1976.
[17] Gantmacher F.R., *Theory of Matrices*, Chelsea, New York 1959.
[18] Hahn F., *Stability*, w: *Handbook of Mathematical Economics*, red. K.J. Arrow, M.D. Intriligator, North-Holland Publishing Company 1982.
[19] Hahn F., Negishi T., *A Theorem on Non-Tâtonnement Stability*, Econometrica 1962, no. 30, s. 463-469.
[20] Hosoda E., *On the Classical Convergence Theorem*, Metroeconomica vol. 37, 1985, no. 2, s. 157-174.
[21] Koehler G.J., Whinston A.B., Wrihgt G.P. *Optimization over Leontief Substitution Systems*, North Holland Publishing Company, American Elsevier Publishing Company 1975.

[22] Kornai J., *Anti-Equilibrium*, PWN, Warszawa 1977.
[23] Makarow W.L., Rubinow A.M., *Matiematiczeskaja tieorija ekonomiczeskoj dynamiki i rawnowiesija*, Nauka, Moskwa 1973.
[24] Malawski A., *Wprowadzenie do ekonomii matematycznej*, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków 1995.
[25] McKenzie L., *Classical General Equilibrium Theory*, The MIT Press, 2002.
[26] Morishima M., *Equilibrium, Stability and Growth*, Clarendon Press, Oxford 1964.
[27] Mukherji A., *The Edgeworth-Uzawa Barter Stabilizes Prices*, International Economic Review vol. 15, 1974, s. 236-241.
[28] von Neumann J., *A Model of General Economic Equilibrium* (tłum. z j. niemieckiego), Review of Economic Studies, 1945-1946, XIII (I), s. 1-9.
[29] Nikaido H., *Marx on Competition*, Zeitschrift für Nationalökonomie vol. 43, 1983, no. 4, s. 337-362.
[30] Nikaido H., *Dynamics of Growth and Capital Mobility in Marx's Scheme of Reproduction*, Zeitschrift für Nationalökonomie vol. 45, 1985, no. 3, s. 197-218.
[31] Panek E., *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2000.
[32] Sraffa P., *Production of Commodities by Means of Commodities*, Cambridge University Press, Cambridge 1960.
[33] Starr R.M., *General Equilibrium Theory. An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.
[34] Takayama A., *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge 1985.
[35] Uzawa H., *On the Stability of Edgeworth's Barter Process*, International Economic Review vol. 3, 1962, s. 218-232.

LONG-RUN EQUILIBRIUM IN A GENERAL MODEL OF CLASSICAL COMPETITION

Summary

The purpose of the paper is to build and investigate a decentralized dynamic model of classical inspiration thought of as an alternative to the neoclassical (walrasian) general equilibrium models. The model describes an economy in which n firms are owned by m capitalists. Every single agent (firm or capitalist) takes his decisions autonomously, generally in disequilibrium. According to the classical theory,

capitalists allocate their capital in the firms in response to profitability differentials. Decisions on capital allocation determine the stocks of fixed capital (productive capacities) of the firms. Firms themselves decide on prices and production levels (capacity utilization) on the basis of the stocks of unsold commodities.

A long-run classical equilibrium of the model is defined as a process of homothetic growth with equal profit rates. Next it is shown that a set of a continuum of equilibria exists, each of which characterized by the same uniform interest rate and the same balanced growth rate. The features which differentiate individual equilibria are the structure of fixed capital and the structure of ownership of the firms by capitalists.

BIBLIOTEKA AE w Poznaniu