*Małgorzata Doman*

# *PROCESY CHAOTYCZNE W MODELU DUOPOLU COURNOTA*

Wspólną nazwą chaotyczne układy dynamiczne określa się modele deterministyczne opisywane układem nieliniowych równań różnicowych lub różniczkowych o nieskomplikowanej postaci analitycznej, ale bardzo złożonej dynamice. Charakteryzują się one dużą wrażliwością na zmianę warunków początkowych i parametrów. Wśród trajektorii chaotycznych układów dynamicznych występują zarówno trajektorie o dowolnym okresie, jak i nieokresowe trajektorie wykazujące duże podobieństwo do trajektorii procesów stochastycznych.

Celem niniejszego artykułu jest omówienie możliwości pojawienia się zachowań chaotycznych w procesie dochodzenia do równowagi w modelu duopolu Cournota, w zależności od rozważanych funkcji popytu.

Przedstawione obliczenia i wykresy zostały wykonane przez autora za pomocą programu DMC napisanego przez Giampaolo Gallo, dołączonego do książki [4].

## *1. Model duopolu Cournota*

W modelu duopolu przedstawionym przez Augusta Cournota w roku 1838 zasadniczą rolę odgrywają poziomy produkcji konkurujących ze sobą przedsiębiorstw. Zysk każdego przedsiębiorstwa zależy od decyzji produkcyjnych przeciwnika, gdyż uzyskiwana cena p jest funkcją ogólnej podaży gałęzi, tj.:

$$p = p(x+y), \quad \text{gdzie } x,\ y - \text{wielkości produkcji przedsiębiorstw.}$$

Zakładamy przy tym, że popyt jest równy podaży i, zgodnie z przyjętą w mikroekonomii konwencją, będziemy nazywać powyższą funkcję funkcją popytu.

Zyski firm wyrażają się odpowiednio wzorami:

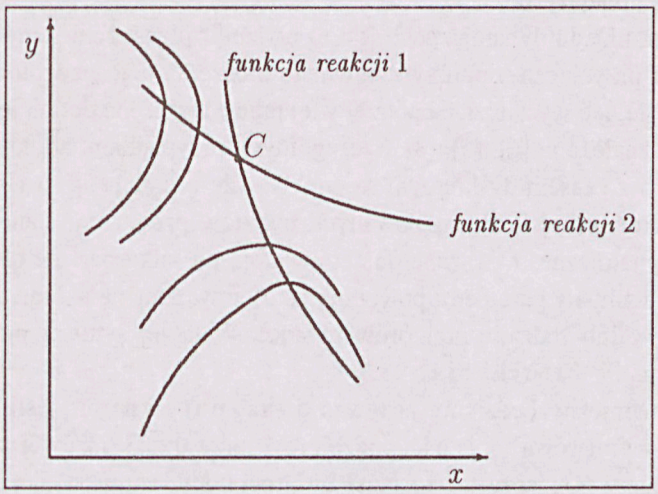
$$U(x,y)=xp(x+y)-C_1(x),\quad V(x,y)=yp(x+y)-C_2(y),$$

gdzie $C_1$, $C_2$ są funkcjami kosztów.

Każda krzywa jednakowego zysku przedsiębiorstwa jest wklęsła w stosunku do osi oznaczającej wielkość produkcji tego przedsiębiorstwa. Im wyżej położona jest krzywa, tym niższy poziom zysku oznacza. Każde przedsiębiorstwo wybiera swój poziom produkcji, przyjmując wielkość produkcji konkurenta za daną. Przy tym założeniu wzrost wielkości $y$ obniża cenę rynkową i utarg krańcowy pierwszego przedsiębiorstwa. To zaś przy danych kosztach krańcowych zmusza je do zredukowania produkcji. Każda firma stara się maksymalizować swój zysk przy danym poziomie produkcji konkurenta. Maksima funkcji zysku są osiągane przez pierwszą lub drugą firmę, gdy odpowiednio

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial V}{\partial y}=0.$$

Punkty maksymalnego zysku przy danej wielkości produkcji przeciwnika definiują funkcję reakcji. Punkt $C$ przecięcia się krzywych reakcji wyznacza poziomy produkcji określające równowagę Cournota. Osiągana jest ona wtedy, gdy oczekiwania każdej firmy dotyczące poziomu produkcji konkurenta okażą się trafne.




Proces wybierania kolejnych poziomów produkcji w odpowiedzi na spodziewane wielkości produkcji przeciwnika nie musi prowadzić do równowagi stabilnej. W dalszej części pracy pokażemy, jak, w zależności od funkcji popytu gałęzi oraz funkcji kosztów, w procesie dostosowywania wielkości produkcji konkurentów może pojawić się zarówno stabilny punkt równowagi, jak i cykl oraz chaos.

## 2. *Chaotyczne układy dynamiczne z czasem dyskretnym*

Rozważane układy dynamiczne będziemy opisywać za pomocą równania rekurencyjnego

$$x_{t+1}=f(x_t),\ t=0,1,2,...,$$

gdzie $x_t$, $x_{t+1}$ są elementami przestrzeni stanów $X\subset R^m$ i oznaczają stan systemu odpowiednio w chwilach $t$ i $t+1$, $x_0$ jest dane, a $f$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym przestrzeni $X$ w siebie. Tak określony układ będziemy oznaczać przez $(X, f)$.

Punkt $x\in X$ nazywamy punktem stałym układu $(X,f)$, jeśli $f(x)=x$, a punktem okresowym o okresie $k(k\geq 2)$, jeśli $f^k(x)=x$ oraz $f^i(x)\neq x$ dla $i=1, 2, ..., k-1$.

Punkt $x$ przestrzeni fazowej $X$ nazywamy stabilnym w sensie Lapunowa punktem układu dynamicznego $(X, f)$, jeśli dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta$ takie, że dla każdego punktu $y\in X$, dla którego $\|x-y\|<\delta$, zachodzą nierówności $\|f^n(x)-f^n(y)\|<\varepsilon$, $n=1, 2, ...$ . Stabilny w sensie Lapunowa punkt nazywamy asymptotycznie stabilnym, jeżeli istnieje takie jego otoczenie, że dla wszystkich punktów $y$ z tego otoczenia $\|f^n(x)-f^n(y)\|\to 0$ dla $n\to\infty$.

Warunkiem dostatecznym asymptotycznej stabilności punktu stałego układu dynamicznego jest to, by wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego $Df(x)=[\partial f_i(x)/\partial x_j]$ miały moduł mniejszy od 1.

Atraktor układu dynamicznego jest to podzbiór przestrzeni stanów, do którego zmierzają (są przyciągane) punkty z pewnego otoczenia tego podzbioru. Określenie to nie jest ścisłe, ale wystarcza na potrzeby tej pracy. Dokładne definicje tego i innych pojęć można znaleźć w [6], [5], [3]. Szczególnymi przypadkami atraktorów układów dynamicznych z czasem dyskretnym są punkty stałe i cykle graniczne składające się ze skończonej liczby izolowanych punktów przestrzeni stanów.

Układy dynamiczne rozważane dalej zawierają po kilka parametrów. Pokażemy, jak niewielkie zmiany parametru powodują jakościową zmianę układu dynamicznego (zmianę liczby lub rodzaju atraktorów układu). W takiej sytuacji mówi się, że w układzie nastąpiła bifurkacja.

Układ dynamiczny będziemy nazywać dyssypatywnym, jeśli wskutek jego działania $m$-wymiarowa objętość podzbiorów przestrzeni fazowej zmniejsza się z upływem czasu. Oznacza to, że musi być spełniony warunek $|\det Df(x)|<1$.

W literaturze funkcjonuje równolegle kilka definicji chaotycznego układu dynamicznego. Większość autorów zgadza się jednak, że najważniejszymi atrybutami takiego układu są wrażliwość na zmianę warunków początkowych i posiadanie „dziwnego" atraktora. Przez „dziwny" atraktor zwykle rozumie się atraktor o skomplikowanej strukturze geometrycznej, np. fraktal, i taki, że układ jest w nim wrażliwy na zmia-

nę warunków początkowych. H.W. Lorenz uważa za „dziwny" każdy atraktor niebędący punktem stałym ani cyklem granicznym.

Mówimy, że układ dynamiczny $(X, f)$ jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych, jeżeli istnieje $\varepsilon>0$ takie, że dla każdego $x\in X$ oraz każdego otoczenia $U$ punktu $x$ istnieją $y\in U$ oraz $n\geq 1$ takie, że $\|f^n(x)-f^n(y)\|>\varepsilon$. Oznacza to, że trajektorie punktów bardzo bliskich mogą z upływem czasu bardzo oddalać się od siebie. Miarę wrażliwości układu dynamicznego na zmianę warunków początkowych stanowią wykładniki Lapunowa. Opisują one również geometryczne własności „dziwnych" atraktorów polegające na jednoczesnym ściskaniu i rozciąganiu trajektorii układu w różnych kierunkach we wnętrzu atraktora. Określenie wykładników Lapunowa podajemy za [3].

Rozważmy układ dynamiczny $(X, f)$, $X\subset R^m$. Niech $x_0$, $x_0'$ będą położonymi blisko siebie punktami przestrzeni stanów $X$. Dla wektorów

$$\Delta_0=x_0-x_0' \quad \text{oraz} \quad \Delta_n=x_n-x_n'=f^n(x_0)-f^n(x_0')$$

zachodzi przybliżony związek

$$\Delta_n\approx Df^n(x_0)\Delta_0,$$

gdzie $Df^n(x_0)$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania $f^n$, czyli

$$Df^n(x_0)=Df^n(x_{n-1})\ \ldots\ Df^n(x_1)\ Df^n(x_0).$$

Uporządkujmy rosnąco wartości bezwzględne wartości własnych macierzy $Df^n(x_0)$ tak, że

$$\left|\Lambda_1^n\right|\geq\left|\Lambda_2^n\right|\geq\ldots\geq\left|\Lambda_m^n\right|.$$

Wykładniki Lapunowa układu $(X, f)$ zdefiniowane są jako granice

$$\lambda_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\Lambda_i^n\right|\ ,\quad i=1,\ldots,m.$$

Powyższe granice istnieją i nie zależą od wyboru punktu $x_0$ prawie wszędzie w obszarze przyciągania atraktora. Jeżeli wszystkie wykładniki Lapunowa są w obszarze przyciągania atraktora ujemne, to atraktor jest punktem stałym asymptotycznie stabilnym. W przypadku cyklu granicznego jeden z wykładników Lapunowa jest równy 0.

W dalszej części przyjmujemy następującą definicję pochodzącą od H.-W. Lorenza [3]: Dyssypatywny układ dynamiczny nazywamy chaotycznym, jeśli największy wykładnik Lapunowa jest dodatni w obszarze przyciągania pewnego jego atraktora.

### *3. Przykład modelu Cournota z chaosem*

Rozważmy teraz za [5] model Cournota z funkcją popytu $p = \frac{1}{x+y+r}$, $r \geq 0$, gdzie $x$, $y$ oznaczają wielkości produkcji przedsiębiorstw konkurujących w danej gałęzi. Zakładamy przy tym, że popyt jest równy podaży. Dla ułatwienia rachunków przyjmiemy $r = 0$. Nie zmienia to dynamiki układu, a znacznie upraszcza wzory. Założymy również, że duopoliści produkują przy stałych kosztach marginalnych równych odpowiednio $a > 0$ i $b > 0$. Funkcje zysku konkurujących firm wyrażają się wzorami

$$U(x,y) = \frac{x}{x+y} - ax ,$$

$$V(x,y) = \frac{y}{x+y} - by .$$

Pierwsza firma maksymalizuje funkcję $U$ względem zmiennej $x$, a druga $V$ względem $y$. Z warunków

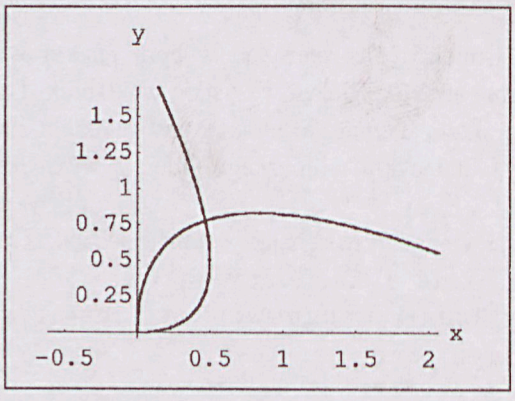
$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

otrzymujemy równania krzywych reakcji

$$x = \sqrt{\frac{y}{a}} - y ,$$

$$y = \sqrt{\frac{x}{b}} - x .$$

Poniższy rysunek przedstawia wykresy tych krzywych dla $a=0{,}5$ i $b=0{,}3$.



W punkcie równowagi Cournota wielkości produkcji wynoszą

$$x_c = \frac{b}{(a+b)^2} \ , \ y_c = \frac{a}{(a+b)^2} \ .$$

W [5] autor rozważa proces dochodzenia do punktu równowagi Cournota określony przez układ dynamiczny

$$x_{t+1} = \sqrt{\frac{y_t}{a}} - y_t \ ,$$
$$y_{t+1} = \sqrt{\frac{x_t}{b}} - x_t \ .$$

Wówczas punkt równowagi $(x_c, y_c)$ traci stabilność, gdy wartość bezwzględna jakobianu

$$\det Df(x_c, y_c) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{ay_c}} - 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{bx_c}} - 1 & 0 \end{vmatrix}$$

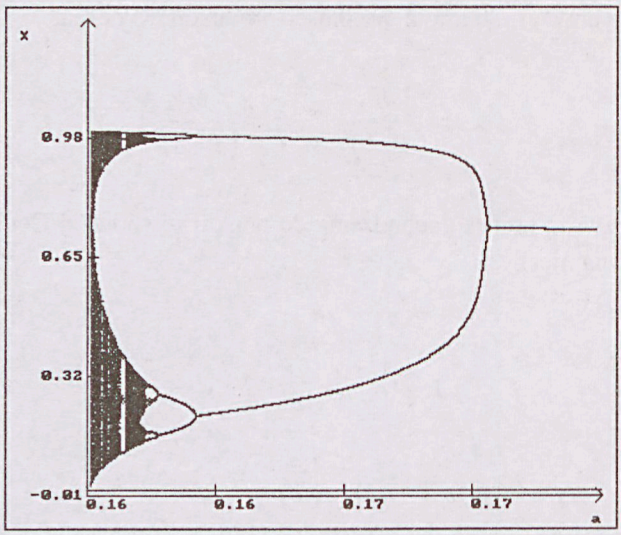
przestaje być mniejsza od 1. Wykorzystując wzory wyrażające współrzędne punktu równowagi, dochodzimy do warunku utraty stabilności

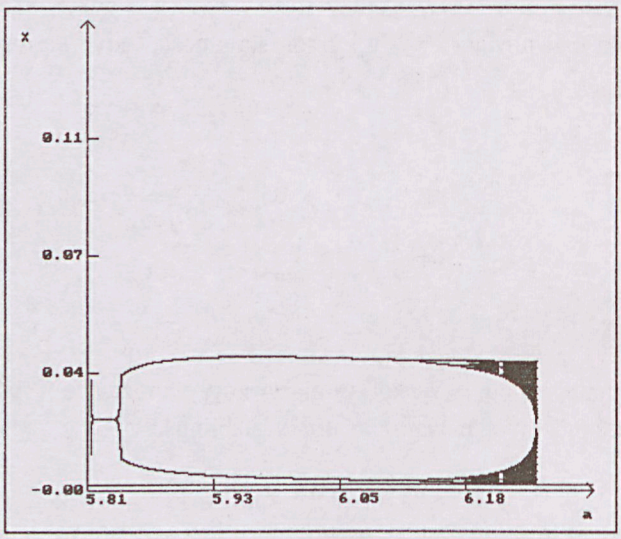
$$(a-b)^2 = 4ab \ ,$$

który po prostych przekształceniach sprowadza się do warunku

$$\frac{a}{b} = 3 \pm 2\sqrt{2} \ .$$

Przyjmując $b = 1$, prześledzimy diagramy bifurkacji dla zmiennej $x$ w zależności od parametru $a$. Zachowanie zmiennej $y$ jest analogiczne.

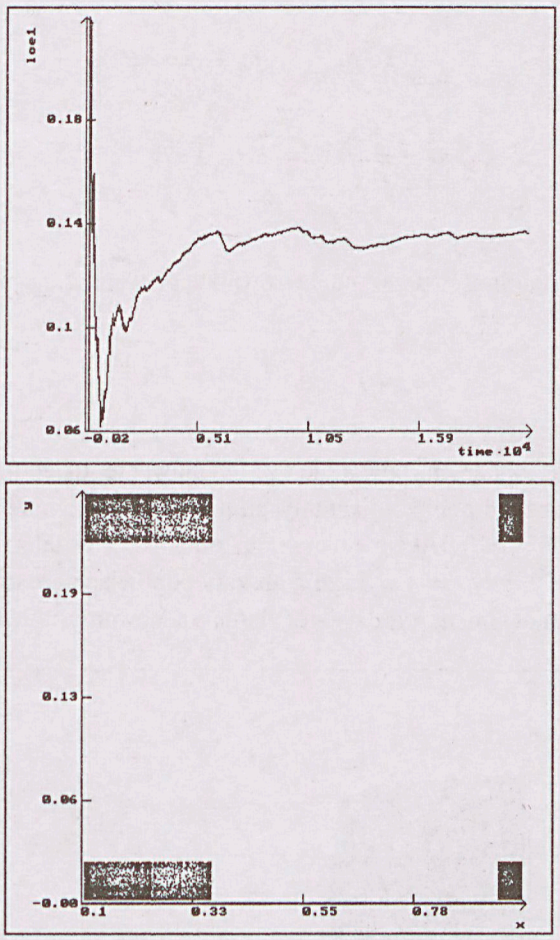



Jeżeli $a/b \in (3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2})$, to w rozważanym modelu istnieje stabilny punkt równowagi Cournota. Dla parametrów o ilorazie spoza tego przedziału zachowanie układu dynamicznego staje się bardziej skomplikowane. Pojawiają się bifurkacje prowadzące do cykli granicznych, a następnie do chaosu.

Zaczernione obszary diagramu bifurkacji wyznaczają zakresy parametru, dla których w układzie pojawia się chaos. Widoczne białe „okna" na ciemnym obszarze oznaczają, że dla pewnych wartości parametru układ przestaje być chaotyczny, by po małej zmianie powrócić do zachowania chaotycznego. Zakresy parametru, przy których występuje chaos, są bardzo wąskie. Z diagramów bifurkacji można odczytać, że układ jest chaotyczny dla $0{,}16 < a < 0{,}162$ oraz $6{,}16 < a < 6{,}25$ (końce przedziałów

podane są oczywiście w przybliżeniu). Dla $a<0{,}16$ i $a>6{,}25$ iteracja nie daje się dobrze określić. Pierwszy z poniższych rysunków przedstawia wykres największego wykładnika Lapunowa dla $a=0{,}161017$ i $b=1$. Jest on dodatni, co oznacza, że układ jest rzeczywiście chaotyczny. Odpowiadający podanym wartościom parametru atraktor pokazany jest poniżej.




## *4. Chaos w modelu Cournota z opóźnieniami*

W [5] autor rozważa również model sytuacji, gdy duopoliści nie mogą natychmiast osiągać swoich nowych optymalnych pozycji, ale muszą stopniowo dostosowywać poziomy produkcji, tak aby kierować się w stronę nowego optimum. Oznaczmy prędkości dostosowywania się przedsiębiorstw odpowiednio przez $m$ i $n$ ($0\leq m, n\leq 1$). Wtedy rozważany układ dynamiczny uzyskuje postać

$$x_{t+1} = x_t + m\left(\sqrt{\frac{y_t}{a}} - y_t - x_t\right) \quad , \qquad y_{t+1} = y_t + n\left(\sqrt{\frac{x_t}{b}} - x_t - y_t\right) \quad .$$

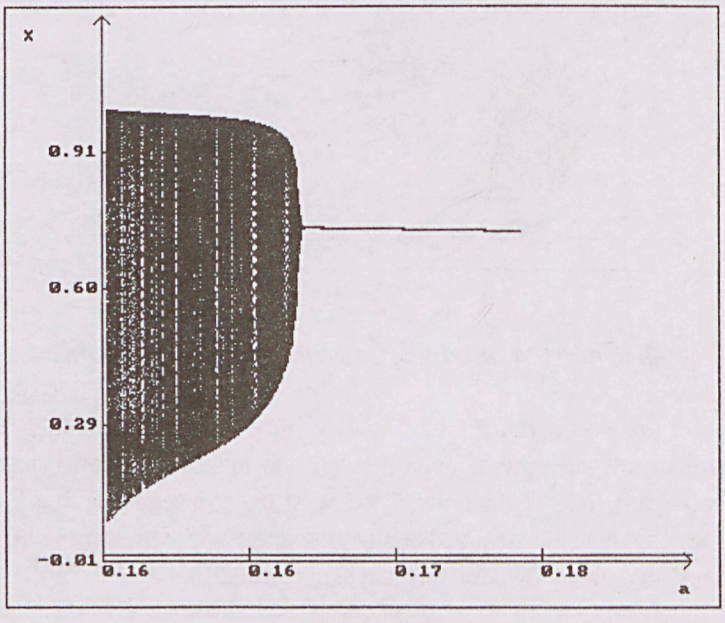
Jakobian układu w punkcie równowagi $(x_c, y_c)$ jest równy

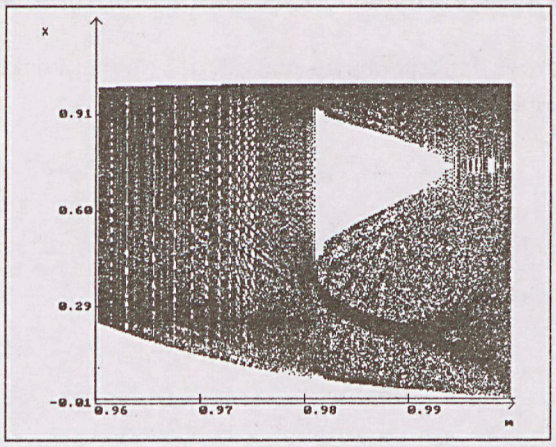
$$\begin{vmatrix} 1-m & m\left(\frac{1}{2\sqrt{ay_c}} - 1\right) \\ n\left(\frac{1}{2\sqrt{bx_c}} - 1\right) & 1-n \end{vmatrix}$$

Warunek utraty stabilności przez punkt równowagi wyraża się równością

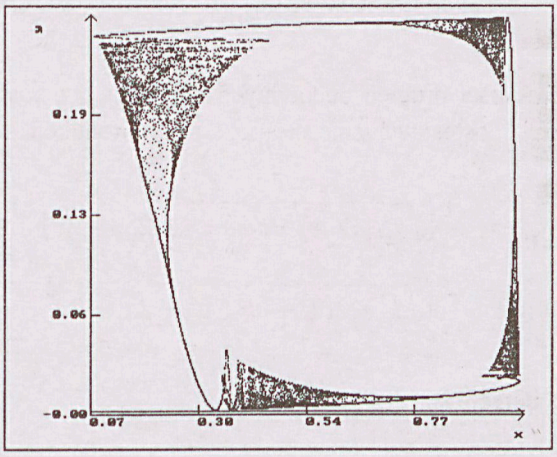
$$(a-b)^2 = 4ab\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1\right) \quad .$$

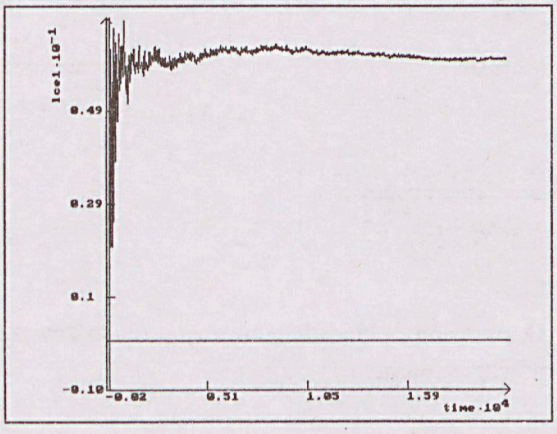
Wprowadzenie opóźnień powoduje, że zachowanie układu staje się bardziej złożone. Zamieszczone poniżej diagramy bifurkacji dla zmiennej $x$ w zależności od parametru $a$ dla $m=n=0{,}979$ i $b=1$ oraz dla zmiennej $x$ w zależności od parametru $m$ dla $a=0{,}16$, $b=1$, gdy $m=n$ wykazują obszary odpowiadające chaosowi z licznymi „oknami" wskazującymi na bardziej regularne zachowanie układu.






Efektem opóźnień jest również bardziej złożona geometria chaotycznego atraktora. Poniższe rysunki przedstawiają atraktor układu i wykres pierwszego wykładnika Lapunowa dla $a=0{,}16$, $b=1$ oraz $m=n=0{,}979$.



## 5. *Model Cournota z kwadratową funkcją popytu*

Przyjmijmy teraz, że funkcja popytu dla gałęzi, w której konkurują dwa przedsiębiorstwa, ma postać

$$p=(x+y-c)^2, \text{ gdzie } x, y, c>0 \text{ i } x+y<c$$

Funkcje zysku duopolistów przy stałych kosztach marginalnych $a$, $b>0$ dane są wtedy wzorami

$$U(x,y)=x(x+y-c)^2-ax,$$

$$V(x,y)=y(x+y-c)^2-by.$$

Analogicznie jak w poprzednich przypadkach z układu równań

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial V}{\partial y}=0.$$

po uwzględnieniu wartości drugich pochodnych otrzymujemy postać układu dynamicznego opisującego dostosowywanie się poziomów produkcji konkurentów

$$x_{t+1}=-\frac{1}{3}\left(\sqrt{y_t^2-2cy_t+ca+c^2}+2y_t-2c\right),$$
$$y_{t+1}=-\frac{1}{3}\left(\sqrt{x_t^2-2cx_t+cb+c^2}+2x_t-2c\right).$$

Macierz Jacobiego iteracji jest następująca

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3}\left(\frac{y_t-c}{\sqrt{y_t^2-2y_t+ca+c^2}}+2\right) \\ -\frac{1}{3}\left(\frac{x_t-c}{\sqrt{x_t^2-2cx_t+cb+c^2}}+2\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Wykażemy, że tak określony układ dynamiczny posiada zawsze asymptotycznie stabilny punkt równowagi Cournota $(x_c, y_c)$.

Macierz Jacobiego ma w tym przypadku szczególną postać

$$A=\begin{bmatrix}0 & \alpha\\ \beta & 0\end{bmatrix}$$

Wartości własne macierzy stanowią rozwiązania równania $\det(A-\lambda I)=0$, tzn. w tym przypadku $\lambda^2-ab=0$. Dla takiej macierzy warunek, że wartości własne są co do modułu mniejsze od 1 jest równoważny warunkowi $|\det A|<1$.

Jakobian iteracji jest równy

$$\frac{1}{9}\left(\frac{y_t-c}{\sqrt{(y_t-c)^2+ca}}+2\right)\left(\frac{x_t-c}{\sqrt{(x_t-c)^2+cb}}+2\right)$$

i wobec tego jego wartość bezwzględna jest zawsze mniejsza od 1. Zatem na podstawie podanego w paragrafie 2 warunku dostatecznego asymptotycznej stabilności punktu stałego układu dynamicznego w rozważanym modelu istnieje stabilna równowaga Cournota.

Analiza modeli duopolu Cournota z różnymi wielomianowymi funkcjami popytu niezmiennie doprowadzała do stwierdzenia istnienia stabilnej równowagi. W takich przypadkach dynamika układu jest więc nieskomplikowana. Obliczenia, natomiast są znacznie bardziej złożone niż dla wykazujących zachowania chaotyczne modeli wprowadzonych przez Puu. Wprowadzenie opóźnień również nie prowadzi w przypadku obecnie rozważanego modelu do utraty stabilności.

Należy podkreślić, że przypadek dwóch konkurujących firm jest w pewien sposób wyróżniony. Dla większej liczby przedsiębiorstw w jednej gałęzi model Cournota nie musi posiadać stabilnej równowagi nawet dla liniowej funkcji popytu i stałych kosztów marginalnych [1].

## *Literatura*

[1] G. Gandolfo, *Economic dynamics*, Springer, Berlin 1997

[2] D. Laidler, S. Estrin, *Wstęp do mikroekonomii*, Gebethner i Ska, Warszawa 1991

[3] H.-W. Lorenz, *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*, Springer, Berlin 1997

[4] A. Medio, *Chaotic dynamics. Theory and applications to economics*, Cambridge University Press, Cambridge 1992

[5] T. Puu, *Nonlinear economic dynamics*, Springer, Berlin 1997

[6] H. Zawadzki, *Chaotyczne systemy dynamiczne*, Wydawnictwo AE w Katowicach, Katowice 1996