Małgorzata DOMAN
Ryszard DOMAN

ANALIZA DYNAMICZNA POLSKIEGO RYNKU AKCJI NA PODSTAWIE NOTOWAŃ INDEKSU WIG

Badania nad rynkami kapitałowymi opierały się do niedawna głównie na **hipotezie rynku efektywnego** (EMH), tzn. na przekonaniu, że wszelkie dostępne publicznie informacje o akcjach znajdują odzwierciedlenie w ich bieżących cenach, a wszyscy inwestorzy działając racjonalnie, wyceniają akcje jednakowo. Hipoteza ta związana jest z założeniem, że zmiany cen akcji na rynku mają charakter błądzenia przypadkowego. Analizy danych empirycznych przeczą jednak temu założeniu.

W latach dziewięćdziesiątych pojawił się alternatywny pogląd na charakter rynku nazywany **hipotezą rynku fraktalnego** (FMH). Hipoteza ta stanowi wynik badań przeprowadzonych w Research Institute for Applied Economics Olsen & Associates w Zurychu. Szerzej została spopularyzowana przez E.E. Petersa w 1994 roku. Hipoteza rynku fraktalnego uwzględnia wpływ informacji i długość horyzontu czasowego na zachowanie inwestorów. Podstawowe założenia hipotezy FMH są następujące[1]:

- rynek składa się z dużej liczby uczestników o różnych horyzontach czasowych,
- informacja ma różny wpływ na decyzje inwestorów o różnych horyzontach czasowych (podejście spekulanta jest inne niż inwestora długoterminowego),
- stabilność rynku jest rezultatem jego płynności, rynek złożony z wielu inwestorów o różnych horyzontach czasowych gwarantuje płynność,
- ceny walorów są wynikiem zarówno handlu krótkoterminowego (opisywanego przez analizę techniczną), jak i długoterminowego (związanego raczej z analizą fundamentalną),

[1] A. Weron, R. Weron, *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1999.

– tylko notowania instrumentu powiązanego z cyklami ekonomicznymi mogą wykazywać długotrwały trend.

Modele oparte na hipotezie rynku fraktalnego mają tę przewagę, że nadają się do opisu zmian cen nie tylko w stanie równowagi, ale również podczas paniki czy innych zaburzeń rynku. Podstawą hipotezy FMH jest fakt, że rynek jest stabilny, jeśli nie ma jednego horyzontu czasowego dla wszystkich inwestorów. Informacja jest przez inwestora wartościowana zgodnie z długością horyzontu inwestycyjnego. Wynika stąd, że rynek ma fraktalną (samopodobną) strukturę statystyczną. Niestabilność pojawia się, gdy rynek traci swą fraktalną strukturę.

Konsekwencją powstania hipotezy FMH są próby stosowania nowych narzędzi matematycznych do opisu rynku, przede wszystkim dostarczanych przez teorię układów dynamicznych oraz teorię chaosu, a także teorię (α-stabilnych procesów stochastycznych.

Spojrzenie na rynek akcji jako na chaotyczny układ dynamiczny znajduje swoje uzasadnienie w implikowanej przez FMH tezie o wzajemnych powiązaniach czynników krótko- i długoterminowych, wpływających na zachowania tego rynku[2].

W niniejszej pracy podejmujemy próbę weryfikacji hipotezy rynku fraktalnego w odniesieniu do polskiego rynku akcji, stosując jako narzędzie analizę dynamiczną szeregu czasowego dziennych notowań indeksu WIG. Przedstawione obliczenia i wykresy zostały wykonane z wykorzystaniem programów DMC i Excel 97. Dla wygody czytelnika o mniejszym przygotowaniu matematycznym, formalne definicje niektórych stosowanych pojęć zebraliśmy w aneksie matematycznym.

1. Szereg czasowy jako funkcja generowana przez układ dynamiczny

Badając ewolucję rynku kapitałowego, zazwyczaj monitorujemy kilka zmieniających się w czasie wielkości skalarnych odzwierciedlających stan tego rynku. Oprócz notowań giełdowych są to na przykład aktualne wskaźniki makroekonomiczne. W rzeczywistości liczba zmiennych opisujących rynek może być bardzo duża, wiele z nich może nie poddawać się badaniu, a z istnienia innych możemy nie zdawać sobie sprawy. Wektory, których współrzędnymi są

[2] E. E. Peters, *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa 1997.

możliwe wartości tych zmiennych, możemy utożsamiać z punktami pewnej wielowymiarowej struktury geometrycznej M na ogół tylko lokalnie podobnej do przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$, w której uprawia się klasyczny rachunek różniczkowy i całkowy n zmiennych. Możliwe są bowiem różne zależności funkcyjne między współrzędnymi. Analitycznym modelem struktury tego typu jest **rozmaitość gładka**. (Aneks, def. A6).

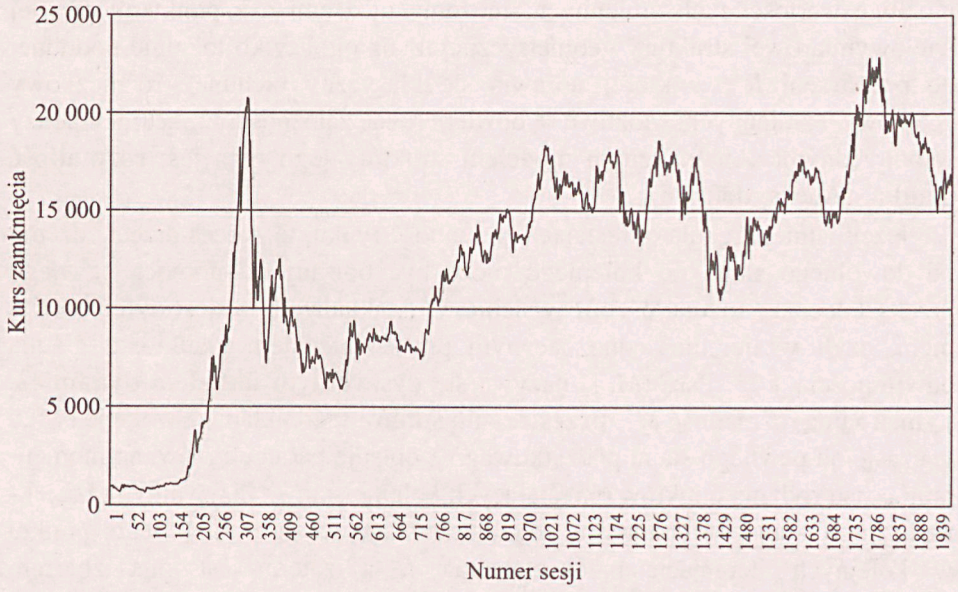
Jeżeli istnieje reguła określająca zmienność rynku, to proces przechodzenia od dowolnego stanu do kolejnego może być opisany za pomocą pewnego przekształcenia f rozmaitości M w siebie. O f zakłada się, że jest dyfeomorfizmem, czyli wzajemnie jednoznacznym przekształceniem gładkim z gładką odwrotnością f^{-1}. Parę (M, f) nazywa się **dyskretnym układem dynamicznym**, a samą rozmaitość M – **przestrzenią stanów** tego układu. Ewolucję rynku w czasie od pewnego stanu początkowego x opisuje parametryzowana momentami czasu rodzina punktów określających kolejne stany. Nazywamy ją **trajektorią** tego stanu. Elementami trajektorii stanu x są obrazy tego punktu w kolejnych iteracjach przekształcenia f, a zatem jest ona zbiorem $\{y \in M: y = f^n(x),\ n \geqslant 0\}$.

Jeśli dana jest rodzina $\{f_t\}$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}^+$, dyfeomorfizmów rozmaitości M taka, że $f_0 = \mathrm{id}_M$, $f_{t+s} = f_t f_s$ i odwzorowanie $\boldsymbol{R}^+ \times M \to M$, $(t, x) \mapsto f_t(x)$ jest gładkie, to parę $(M, \{f_t\})$ nazywamy **ciągłym układem dynamicznym**. W tym przypadku trajektorią punktu $x \in M$ nazywamy zbiór $\{y \in M: y = f_t(x),\ t \in \boldsymbol{R}^+\}$.

W dalszym ciągu tej pracy rozważamy jedynie dyskretne układy dynamiczne i nazywamy je krótko układami dynamicznymi.

Jak wspomnieliśmy wyżej, nie znamy wymiaru rozmaitości przedstawiającej przestrzeń stanów rynku, ani zmiennych opisujących poszczególne współrzędne punktów będących jej elementami. Tym bardziej nie mamy informacji o odwzorowaniu ani o realizowanej trajektorii. Zwykle możemy obserwować tylko pewien sygnał zależny od realizowanych stanów, który można traktować jako wartości obcięcia pewnej funkcji określonej na rozważanej rozmaitości do realizowanej trajektorii. Ponieważ punkty orbity parametryzowane są czasem, to w istocie otrzymujemy **szereg czasowy**. Przykładem takiego sygnału opisującego polski rynek akcji może być szereg czasowy dziennych notowań WIG.

W dalszej części pracy pokażemy, że nawet jeśli dysponujemy tylko pewnym szeregiem czasowym, generowanym w opisany wyżej sposób, to możemy ustalić podstawowe cechy jakościowe całego układu. Między innymi możemy oszacować wymiar jego przestrzeni stanów oraz zbadać, czy jego zmienność jest procesem losowym czy deterministycznym, czy też wykazuje cechy pierwszego i drugiego jednocześnie.



Rys. 1. Notowania WIG – od 16 kwietnia 1991 do 1 grudnia 2000 roku, 1955 sesji

Źródło: Opracowanie własne

Niniejsza praca jest próbą oceny, z powyższego punktu widzenia, polskiego rynku akcji na podstawie analizy szeregu czasowego dziennych notowań (kurs zamknięcia) indeksu WIG Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie, obejmującego okres od dnia 16 kwietnia 1991 (sesja nr 1) do dnia 1 grudnia 2000 roku (sesja nr 1955).

2. Rekonstrukcja przestrzeni stanów na podstawie szeregu czasowego

Rozważmy ciąg wszystkich możliwych układów n kolejnych elementów szeregu czasowego $\{Y(i)\}$ zawierającego N obserwacji:

$$[Y(1), Y(2), Y(3), \ldots, Y(n)],$$
$$[Y(2), Y(3), Y(4), \ldots, Y(n+1)],$$
$$[Y(3), Y(4), Y(5), \ldots, Y(n+2)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[Y(N-n+1), Y(N-n+2), Y(N-n+3), \ldots, Y(N)].$$

Możemy go traktować jako ciąg $N-n+1$ wektorów w R^n. Każdy taki wektor będziemy nazywać n-**historią** szeregu czasowego $\{Y(i)\}$.

Niech M będzie zwartą m-wymiarową rozmaitością gładką. Rozważmy zbiór X wszystkich par (f, y), gdzie $f: M \to M$ jest dyfeomorfizmem, a $y: M \to R$ jest funkcją gładką. Na zbiorze X daje się określić metrykę; poniżej będziemy więc uważać X za przestrzeń metryczną. Z następującego twierdzenia o zanurzeniu udowodnionego w roku 1981 przez F. Takensa[3] wynika, że ciąg n-historii szeregu czasowego można traktować jako rekonstrukcję trajektorii przestrzeni stanów układu dynamicznego, przez który rozważany szereg potencjalnie jest generowany.

Twierdzenie. *Przy powyższych założeniach i oznaczeniach zbiór tych par* $(f, y) \in X$, *dla których odwzorowanie* $F_{(f,y)}: M \to R^{2m+1}$ *określone wzorem*

$$F_{(f,y)}(x = \big(y(x), y(f(x)), \ldots, y(f^{2m}(x))\big)$$

jest zanurzeniem, jest otwarty i gęsty w przestrzeni X.

Teza twierdzenia Takensa oznacza, że każdy niepusty zbiór otwarty w X zawiera kulę otwartą, składającą się z par (f, y), dla których $F_{(f,y)}$ jest zanurzeniem. Jeśli przyjmiemy $Y(n) = y\big(f^{n-1}(x)\big)$, to twierdzenie Takensa mówi, że poza wyjątkowymi sytuacjami, jeśli n jest dostatecznie duże w stosunku do wymiaru przestrzeni stanów, tzn. $n \geqslant 2m+1$, to n-wymiarowy obraz przestrzeni stanów, którego częścią jest ciąg n-historii, oddaje w poprawny matematycznie sposób jej własności. W szczególności trajektoria w przestrzeni R^n skonstruowana za pomocą ciągu n-historii jest poprawną rekonstrukcją trajektorii, generującej badany szereg czasowy $\{Y(i)\}$.

3. Chaotyczne układy dynamiczne a układy losowe

Szeregi czasowe opisujące rynek kapitałowy z reguły wyglądają tak, jakby były generowane przez układ ewoluujący w czasie losowo. Zupełnie podobnie mogą wyglądać jednak również szeregi złożone z sygnałów generowanych przez pewne układy deterministyczne.

Przez **układ losowy** rozumiemy tutaj taki układ, dla którego w danym momencie czasu wartości współrzędnych wektora stanu określone są jedynie

---

[3] F. Takens, *Detecting strange atractors in turbulence*, w: *Dynamical systems and turbulence*, Lecture Notes in Mathematics 898, Springer, Berlin 1981, s. 366-381.

przez rozkład prawdopodobieństwa, a zatem wektor ten jest wektorem losowym.

Deterministyczne układy generujące sygnały podobne do tych generowanych przez układy losowe będziemy nazywać, niezbyt formalnie, **chaotycznymi układami dynamicznymi**. Według jednej z istniejących definicji nazywa się tak układy dynamiczne, w których zachowanie trajektorii jest bardzo wrażliwe na niewielkie nawet zmiany punktu początkowego, tzn. że bliskie na początku trajektorie odchodzą od siebie na daną odległość po pewnej skończonej liczbie kroków. Inną z charakterystyk chaotycznego układu dynamicznego jest posiadanie tzw. dziwnego atraktora.

Zbiór zwarty $A \subset M$ nazywamy **atraktorem** układu dynamicznego (M, f) jeśli:

1) dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 0$, $f^n(A) \subset A$,
2) istnieje otoczenie U zbioru A takie, że dla każdego $x \in U$ i $n \geqslant 0$, $f^n(x) \in U$ oraz $\lim_{n \to \infty} f^n(x) \in A$,
3) dla dowolnych zbiorów otwartych U i V zawartych w A istnieje $n \geqslant 0$ takie, że $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$.

Z określenia atraktora wynika, że jeśli trajektoria punktu wejdzie do atraktora, to już go nigdy nie opuści oraz że atraktor ma własność „przyciągania" punktów znajdujących się w pewnym jego otoczeniu nazywanym **obszarem przyciągania atraktora**. Własność 3 oznacza, że atraktor nie jest sumą dwóch rozłącznych atraktorów, a w przypadku gdy przestrzeń stanów jest zwarta, własność ta jest równoważna istnieniu **trajektorii gęstej** w A (Aneks, def. A2).

Atraktor A układu dynamicznego (M, f) nazywa się **dziwnym**, jeżeli układ jest w zbiorze A **wrażliwy na zmianę warunków początkowych** (Aneks, def. A10) oraz zbiór A ma skomplikowaną strukturę geometryczną (np. jest fraktalem).

Jednym ze wskaźników złożoności struktury geometrycznej atraktora jest jego **wymiar pojemnościowy** Kołmogorowa. Mówimy, że zbiór ograniczony $S \subset R^p$ ma wymiar pojemnościowy Kołmogorowa D, jeśli

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}},$$

gdzie $N(\varepsilon)$ jest minimalną liczbą kul o promieniu ε w R^p potrzebną do pokrycia zbioru S. Dla „regularnych" obiektów geometrycznych wymiar pojemnościowy pokrywa się ze zwykłym wymiarem euklidesowym, w szczególności jest liczbą całkowitą. Ogólnie jednak nie musi być liczbą całkowitą i na przykład dla

zbioru Cantora jest równy $\log 2/\log 3 \approx 0{,}63$. Wymiar pojemnościowy niebędący liczbą całkowitą, wskazuje na skomplikowaną strukturę geometryczną obiektu.

Wyliczenie zdefiniowanego powyżej wymiaru pojemnościowego jest zazwyczaj trudne. W związku z tym Grassberger i Procaccia zaproponowali w roku 1983[4] inne podejście do badania wymiaru atraktora. Wyznaczanie liczby $N(\varepsilon)$ zastąpili mierzeniem odległości pomiędzy punktami pewnej zawartej w atraktorze trajektorii. Zmiana ta prowadzi do pojęcia tzw. wymiaru korelacyjnego D_C.

Załóżmy, że atraktor zanurzony jest w przestrzeni euklidesowej skończonego wymiaru i niech $\{x_i\}$ będzie trajektorią gęstą w atraktorze. Dla każdego $r>0$ możemy zdefiniować **całkę korelacyjną** $C(r)$ wzorem:

$$C(r)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1\,i\neq j}^{N}\theta(r-|x_i-x_j|),$$

gdzie $||$ oznacza długość wektora, a $\theta=\begin{cases}1, & s\geqslant 0,\\ 0, & s<0.\end{cases}$

Jak twierdzą Grassberger i Procaccia, dla małych wartości r, $C(r)$ zachowuje się jak potęga r, tzn.

$$C(r)\propto r^{D_C}.$$

Występujący tu wykładnik D_C nazywa się **wymiarem korelacyjnym**.

Wymiar korelacyjny D_C jest wymiarem probabilistycznym, tzn. $C(r)$ można interpretować jako prawdopodobieństwo tego, że odległość dwóch punktów trajektorii nie jest większa od r. Jeśli punkty x_i pokrywają atraktor równomiernie, to $D_C=D$. W ogólnym przypadku prawdziwa jest nierówność $D_C\leqslant D$. Dla wielu znanych atraktorów, nawet jeśli wyliczone dla nich wymiary D i D_C nie są równe, to różnią się nieznacznie, zatem wymiar korelacyjny jest dobrym oszacowaniem wymiaru Kołmogorowa.

Niech dany będzie szereg czasowy $\{Y(i)\}$, o którym zakładamy, że jest sygnałem, pochodzącym z trajektorii gęstej w pewnym atraktorze deterministycznego układu dynamicznego. Korzystając z twierdzenia Takensa, rekonstruujemy ten atraktor w pewnej przestrzeni zanurzenia R^n. Gdy nie znamy wymiaru oryginalnej przestrzeni fazowej układu, wtedy odpowiednią wartość wymiaru

---

[4] P. Grassberger, I. Procaccia, *Measuring the strangeness of strange arrractors*, Physica 9D, 1983, s. 189-208.

przestrzeni zanurzenia znajdujemy, obliczając wymiar korelacyjny dla coraz większych wartości n, aż do jego ewentualnej stabilizacji.

Ponieważ punkty atraktora są silnie powiązane i zagęszczają się w określonych miejscach niezależnie od wymiaru przestrzeni zanurzenia, więc jeśli wymiar korelacyjny atraktora rekonstruowanego osiągnie wymiar atraktora „prawdziwego", to dalsze zwiększanie wymiaru przestrzeni zanurzenia nie powinno zwiększać wymiaru atraktora rekonstruowanego.

Jeśli teza o deterministycznym charakterze układu nie jest uzasadniona, czyli jeśli układ jest losowy, to punkty rekonstruowanej trajektorii wypełniają przestrzeń zanurzenia we wszystkich kierunkach i wymiar korelacyjny rośnie nieograniczenie ze wzrostem wymiaru przestrzeni zanurzenia.

Zatem gdy szereg czasowy generowany jest przez układ deterministyczny, wymiar korelacyjny stabilizuje się, począwszy od pewnego wymiaru przestrzeni zanurzenia.

W przypadku gdy sygnał pochodzi od układu losowego i jest realizacją ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, otrzymywany dla kolejnych wartości n wymiar korelacyjny w praktyce powinien być bliski n.

4. Charakterystyka zmienności w czasie polskiego rynku akcji

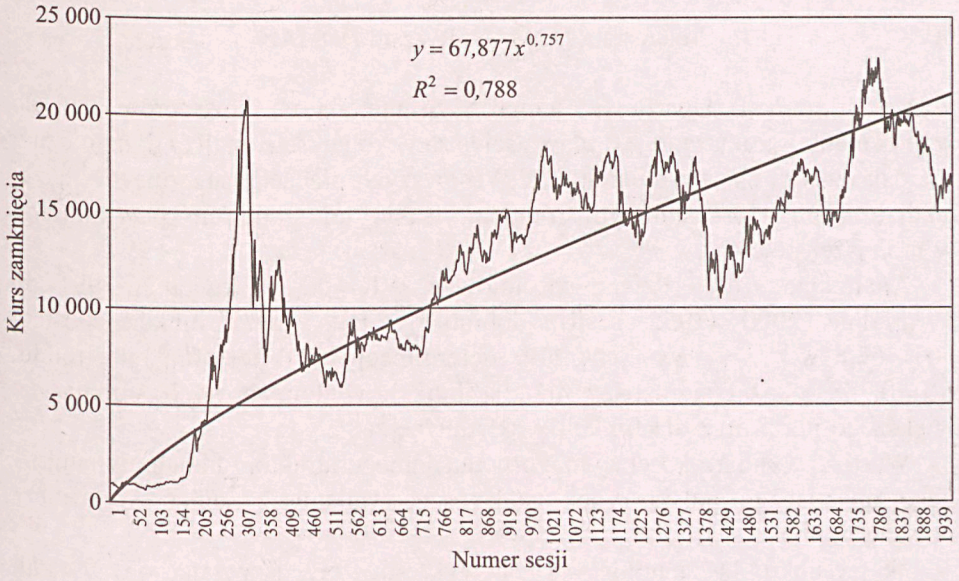
Zajmiemy się obecnie oceną charakteru zmienności w czasie polskiego rynku akcji. Spróbujemy mianowicie zbadać, czy zmiany na nim występujące, są procesem losowym czy deterministycznym. Analizy podobnego typu przeprowadzone dla rynku amerykańskiego i rynków zachodnioeuropejskich[5], wydają się wskazywać na istnienie istotnej składowej deterministycznej ich zmienności.

Obserwacje poczynione w trakcie tamtych badań pokazują, że sam szereg notowań indeksu giełdowego, ze względu na jego silną autokorelację, nie jest adekwatnym wskaźnikiem oceny przyczyn interesujących nas zachowań rynku.

Istnieją różne metody postępowania w takiej sytuacji. Tradycyjne podejście Boxa-Jenkinsa sprowadza się do zastosowania operatora różnicowego lub jego

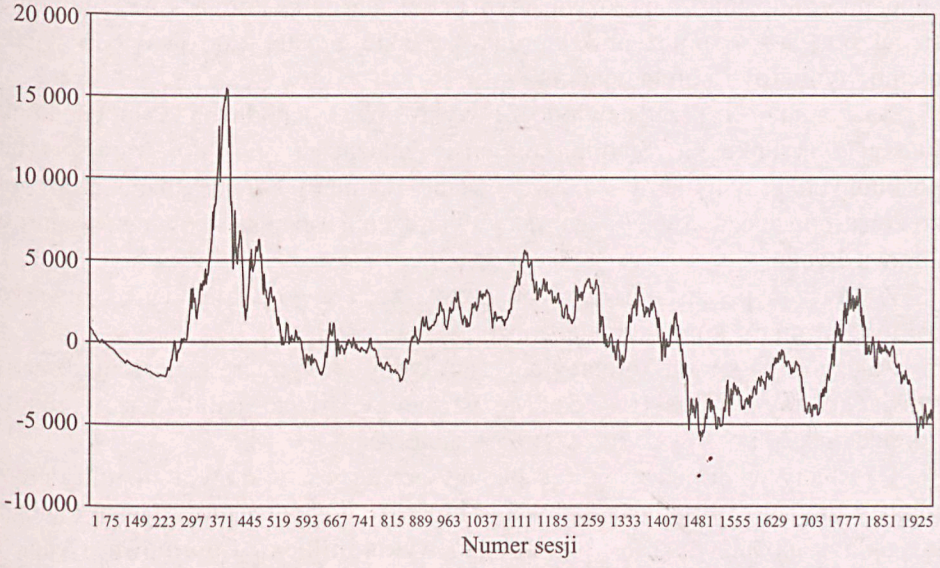
---

[5] E. E. Peters, op. cit., A. Medio, *Chaotic dynamics. Theory and applications to economics*, Cambridge University Press, Cambridge 1992.



Rys. 2. Notowania WIG – od 16 kwietnia 1991 do 1 grudnia 2000 roku z naniesionym trendem

Źródło: Opracowanie własne



Rys. 3. Notowania WIG – od 16 kwietnia 1991 do 1 grudnia 2000 roku z usuniętym trendem potęgowym

Źródło: Opracowanie własne

wyższych iteracji. Uważa się jednak[6], że metoda ta może prowadzić do wzmocnienia szumu i nie jest najwłaściwsza w kontekście analizy dynamicznej szeregu danych eksperymentalnych. W nowszych pracach[7] sugeruje się raczej analizę szeregu z usuniętym trendem. Takie też podejście przyjmujemy w niniejszej pracy.

Analizując szereg dziennych notowań WIG od 16 kwietnia 1991 do 1 grudnia 2000 (1955 sesji), dobraliśmy jako trend funkcję postaci $f(t)=67{,}877\,t^{0{,}757}$. Współczynnik determinacji dla tej funkcji trendu, $R^2=0{,}788$, okazał się lepszy niż dla funkcji wielomianowych stopnia nie większego niż 5 oraz dla funkcji wykładniczej.

Wartość wymiaru korelacyjnego potencjalnego atraktora układu dynamicznego opisującego polski rynek akcji oszacowaliśmy zgodnie z procedurą opisaną w punkcie 3.

Na rysunku 4a znajduje się 21 wykresów przedstawiających w skali logarytmicznej (podstawą logarytmu jest 2) zależność całki korelacyjnej $C(r)$ od r dla zanurzeń trajektorii generującej badany szereg czasowy w przestrzenie R^n, $n=5, 6, \ldots, 25$.

Dla każdej z 21 krzywych można dobrać metodą regresji liniowej prostą przybliżającą ją na pewnym przedziale. W myśl definicji wymiaru korelacyjnego, przy założeniu że na rozważanym przedziale całka korelacyjna zachowuje się jak potęga r, współczynnik kierunkowy takiej prostej jest równy odpowiedniemu wymiarowi korelacyjnemu.

Na rysunku 4b przedstawiono 21 wykresów „pochodnych" odpowiednich funkcji z rysunku 4a. Stabilną w sensie zależności od r i n wartość tych pochodnych przyjmujemy za oszacowanie wymiaru korelacyjnego atraktora zrekonstruowanego, a więc – na mocy twierdzenia Takensa – również atraktora „prawdziwego".

Z obliczeń przedstawionych na powyższych wykresach wynika, że jako wartość wymiaru korelacyjnego możemy przyjąć $D_C \approx 2{,}7$.

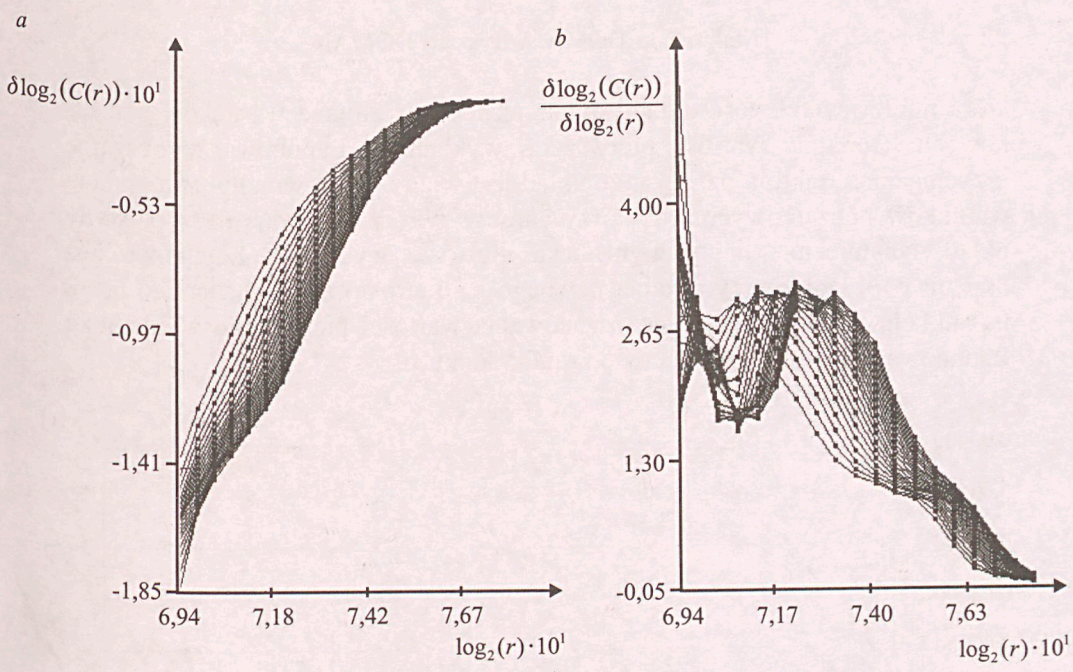
Zależność wymiaru korelacyjnego atraktora od wymiaru zanurzenia przedstawia kolejny wykres (rys. 5). Można zaobserwować stabilizację wymiaru korelacyjnego, począwszy od wymiaru zanurzenia $n=18$.

Uzyskany wynik sugeruje, że badany szereg jest w dużym stopniu deterministyczny. W celu przeanalizowania hipotezy o chaotyczności generującego go układu posłużymy się **pierwszym wykładnikiem Lapunowa** (Aneks, def. A11). Jest to liczba (łatwa do wyliczenia dla danych eksperymentalnych),

---

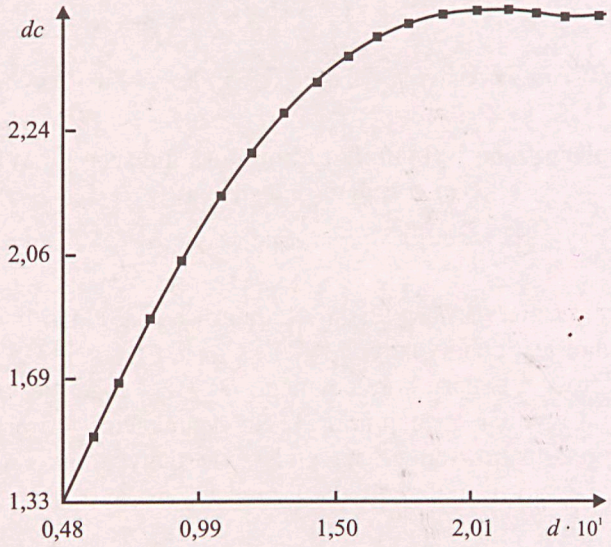
[6] A. Medio, op. cit.

[7] D. S. Broomhed, G. P. King, *Extracting qualitative dynamics from experimental data*, Physica 20D, 1986, s. 217-236.



Rys. 4. Wykresy Grassbergera-Procacci dla szeregów WIG z usuniętym trendem potęgowym

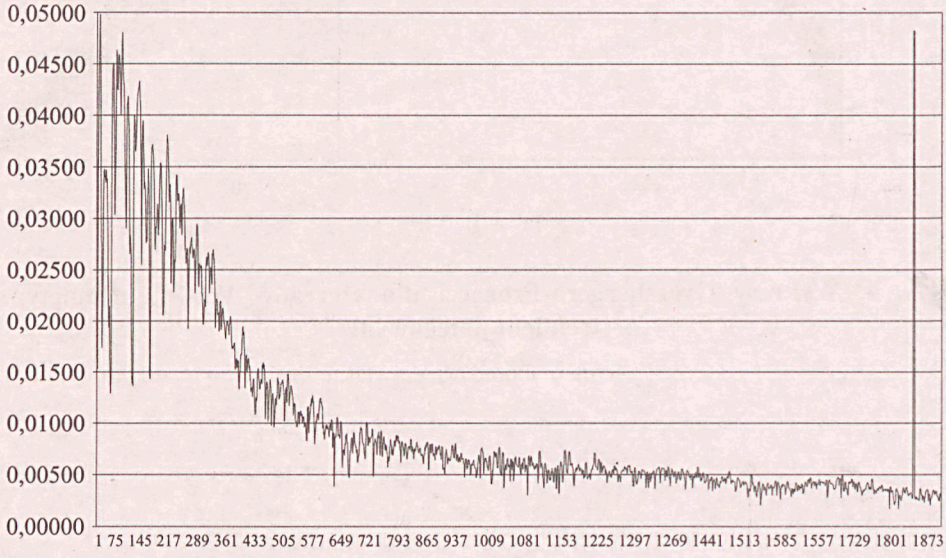
Źródło: Opracowanie własne



Rys. 5. Zależność wymiaru korelacyjnego (*dc*) od wymiaru zanurzenia (*d*)

Źródło: Opracowanie własne

która mierzy wrażliwość układu dynamicznego na zmianę warunków początkowych. Dodatnia wartość pierwszego wykładnika Lapunowa w obszarze przyciągania atraktora oznacza, że układ jest w atraktorze wrażliwy na zmianę warunków początkowych. Niektórzy autorzy[8] wręcz nazywają dyssypatywny układ dynamiczny chaotycznym, jeśli pierwszy wykładnik Lapunowa jest dodatni w obszarze przyciągania pewnego jego atraktora. Dla badanego przez nas układu wykres służący do oszacowania wartości pierwszego wykładnika Lapunowa ma postać przedstawioną na rysunku 6.



Rys. 6. Wykres pierwszego wykładnika Lapunowa dla szeregu WIG z usuniętym trendem potęgowym

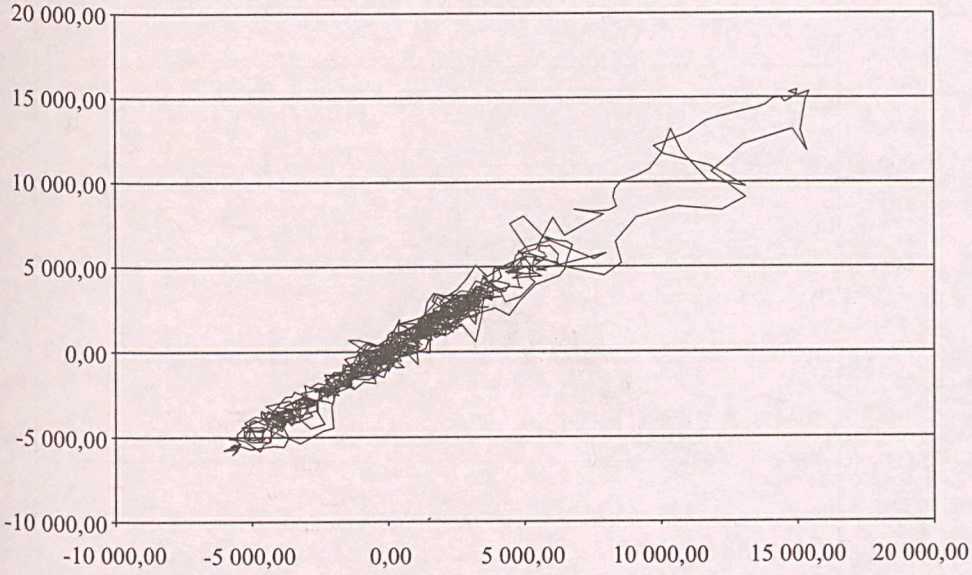
Źródło: Opracowanie własne

Wynika z niej, że pierwszy wykładnik Lapunowa jest dodatni. Oznaczałoby to, że badany układ jest chaotyczny.

Uzyskana wartość wymiaru korelacyjnego $D_C = 2{,}7$ sugeruje, że przestrzeń stanów układu ma wymiar co najmniej 3. Na rysunkach 7-10 przedstawiono rzuty atraktora zrekonstruowanego na podstawie danych, na wybrane dwuwymiarowe płaszczyzny współrzędnych w przestrzeni R^{20}.

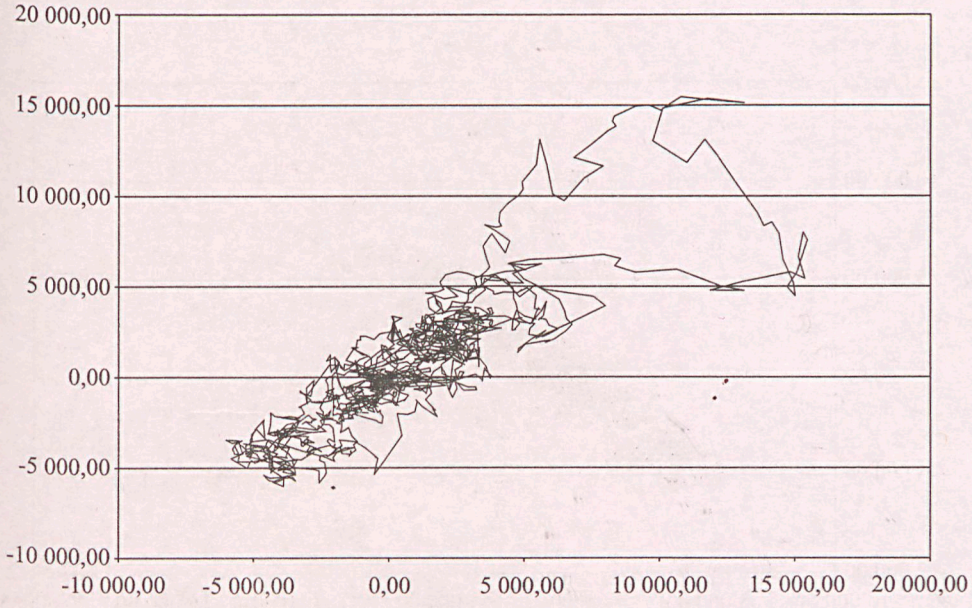
---

[8] H.-W. Lorenz, *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*, Springer, Berlin 1997.



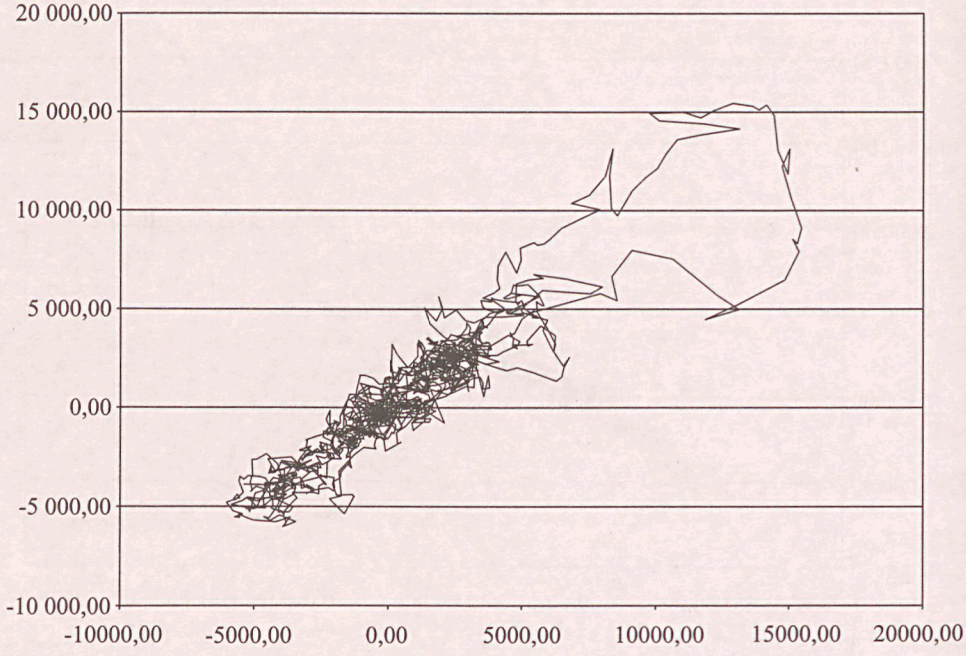
Rys. 7. Rzut zrekonstruowanego atraktora na płaszczyznę X_1X_2

Źródło: Opracowanie własne



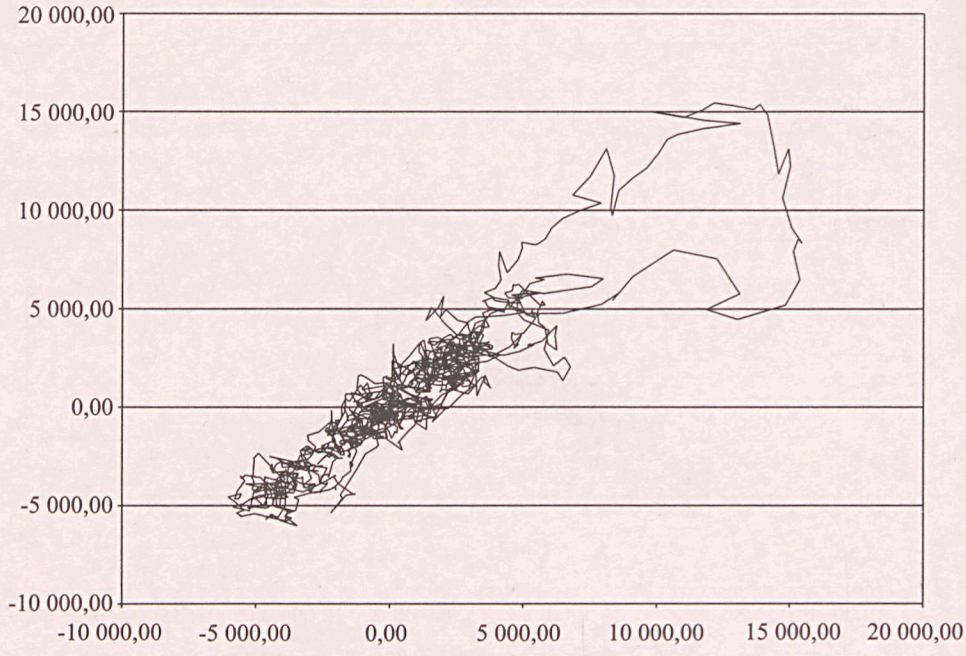
Rys. 8. Rzut zrekonstruowanego atraktora na płaszczyznę X_1X_{20}

Źródło: Opracowanie własne



Rys. 9. Rzut zrekonstruowanego atraktora na płaszczyznę X_5X_{16}

Źródło: Opracowanie własne



Rys. 10. Rzut zrekonstruowanego atraktora na płaszczyznę X_7X_{17}

Źródło: Opracowanie własne

Podsumowanie

Przeprowadzona analiza dynamiczna polskiego rynku akcji na podstawie 1955 notowań dziennych indeksu WIG wykazuje, że hipoteza o deterministycznym charakterze tego rynku nie może być sfalsyfikowana. Wyliczona wartość wymiaru korelacyjnego oznacza, że modele tego rynku powinny zawierać co najmniej trzy zmienne dynamiczne. Identyfikacja tych zmiennych nie okaże się z pewnością zadaniem łatwym.

Uzyskane przez nas wyniki nie różnią się w zasadzie od uzyskanych przez Petersa[9]. W swoich badaniach dotyczących rynku amerykańskiego, niemieckiego i brytyjskiego uzyskał on wymiar korelacyjny mieszczący się między 2 a 3. Jedynie w przypadku Japonii wielkość wymiaru nieznacznie przekroczyła 3.

Wykryty składnik chaotyczny, pojawiający się również w zmienności rynków badanych przez Petersa, powoduje, że ewentualne zbudowanie adekwatnego niskowymiarowego modelu niekoniecznie będzie równoznaczne z możliwością prognozowania w dłuższej perspektywie.

Aneks

W niniejszym aneksie zakładamy, że czytelnikowi znane są pojęcia przestrzeni metrycznej i odwzorowania ciągłego między takimi przestrzeniami. Definicje, które tu przytaczamy, są zawężeniami do zakresu przestrzeni metrycznych określeń funkcjonujących ogólnie w kontekście przestrzeni topologicznych[10]. Przyjęty na użytek tej pracy stopień ogólności wydaje się jednak całkowicie wystarczający.

A1. Przestrzeń metryczną X nazywamy **zwartą**, jeśli z każdego ciągu nieskończonego jej punktów można wybrać podciąg zbieżny.

A2. Podzbiór A przestrzeni metrycznej X nazywamy **gęstym** w X, jeśli każdy niepusty zbiór otwarty w X zawiera punkty zbioru A.

A3. Odwzorowanie ciągłe $f: X \to Y$ przestrzeni metrycznych nazywamy **homeomorfizmem**, jeśli istnieje ciągłe odwzorowanie odwrotne $f^{-1}: Y \to X$.

A4. Przestrzeń metryczną X nazywamy **rozmaitością** m-**wymiarową**, jeśli dla każdego punktu $x \in X$ istnieje otwarte otoczenie $U \ni x$ oraz homeomorfizm $\varphi: U \to V$, gdzie V jest zbiorem otwartym w $\boldsymbol{R}^m$. Parę (U, φ) nazywamy **mapą** wokół x.

---

[9] E. E. Peters, op. cit.

[10] R. Duda, *Wprowadzenie do topologii*, cz. 1, 2, PWN, Warszawa 1986.

A5. Jeśli $U_1 \subset R^m$, $U_2 \subset R^n$ są niepustymi zbiorami otwartymi, to odwzorowanie $g: U_1 \to U_2$ nazywamy **gładkim** klasy C^k, jeśli każda jego składowa ma ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe do rzędu k włącznie. W dalszym ciągu przez „gładkość" będziemy rozumieli gładkość ustalonej klasy co najmniej C^2.

A6. Dwie mapy (U, φ), (V, ψ) rozmaitości X nazywamy zgodnymi, jeśli $U \cap V = \emptyset$ albo jeśli obcięcie odwzorowania $\varphi\psi^{-1}$ do $\psi(U \cap V)$ jest gładkie. Jeśli dowolne dwie mapy rozmaitości X są zgodne, to X nazywamy **rozmaitością gładką**.

A7. Odwzorowanie $f: X \to Y$ rozmaitości gładkiej X w gładką rozmaitość n-wymiarową Y nazywamy **gładkim**, jeśli dla każdego $x \in X$ oraz map (U, φ) wokół x i (V, ψ) wokół $f(x)$ takich, że $f(U) \subset V$, odwzorowanie $\psi f \varphi^{-1}: \varphi(U) \to R^n$ jest gładkie.

A8. Odwzorowanie gładkie $f: X \to Y$ dwóch rozmaitości gładkich nazywamy **dyfeomorfizmem**, jeśli f jest homeomorfizmem oraz f^{-1} jest odwzorowaniem gładkim. Odwzorowanie f nazywamy **zanurzeniem**, jeśli $f: X \to f(X)$ jest dyfeomorfizmem.

A9. Dwa układy dynamiczne (M, f) i (X, g) nazywamy **sprzężonymi**, jeśli istnieje dyfeomorfizm $F: M \to X$ taki, że $Ff = gF$. W takim przypadku dyfeomorfizm F przeprowadza trajektorie układu (M, f) w trajektorie układu (X, g), a zatem jakościowo dynamiki obu układów są równoważne. Sprzężonymi układami dynamicznymi są na przykład (M, f) i $(F_{(f,y)}(M), F_{(f,y)} f F^{-1}_{(f,y)})$ gdzie $F_{(f,y)}$ jest dyfeomorfizmem indukowanym przez zanurzenie, o którym mowa w twierdzeniu Takensa (zob. pkt 2).

A10. Mówimy, że dyfeomorfizm $f: M \to M$ jest **wrażliwy na zmianę warunków początkowych**, jeśli istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $x \in M$ oraz dla każdego otoczenia U punktu x istnieją $y \in U$ oraz $n \geqslant 1$ takie, że

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geqslant \delta,$$

gdzie d jest metryką na M.

A11. Podamy teraz definicję pierwszego wykładnika Lapunowa. W związku z definicją A10, w naszym przypadku wystarczy ograniczyć się do układu dynamicznego (X, f), gdzie $X \subset R^m$. Niech x_0, x_0' będą położonymi blisko siebie punktami przestrzeni stanów X. Dla wektorów $\Delta_0 = x_0 - x_0'$ oraz $\Delta_n = x_n - x_n' = f^n(x_0) - f^n(x_0')$ zachodzi przybliżony związek $\Delta_n \approx Df^n(x_0)\Delta_0$, gdzie $Df^n(x_0)$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania f^n, czyli

$$Df^n(x_0) = Df(x_{n-1}) \ldots Df(x_1) Df(x_0).$$

Uporządkujmy niemalejąco wartości bezwzględne wartości własnych macierzy $Df^n(x_0)$: $|\Lambda_1^n| \geq |\Lambda_2^n| \geq \ldots \geq |\Lambda_m^n|$. **Wykładniki Lapunowa** układu (X, f) zdefiniowane są jako granice $\lambda_i = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_i^n|$. Powyższe granice istnieją i nie zależą od wyboru punktu x_0 prawie wszędzie w obszarze przyciągania atraktora. Wykładnik λ_1 nazywamy **pierwszym wykładnikiem Lapunowa**.

Literatura

Broomhead D. S., King G. P., *Extracting qualitative dynamics from experimental data*, Physica 20D, 1986

Duda R., *Wprowadzenie do topologii*, cz. 1, 2, PWN, Warszawa 1986

Grassberger P., Procaccia I., *Measuring the strangeness of strange attractors*, Physica 9D, 1983

Lorenz H.-W., *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*, Springer, Berlin 1997

Medio A., *Chaotic dynamics. Theory and applications to economics*, Cambridge University Press, Cambridge 1992

Peters E. E., *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa 1997

Takens F., *Detecting strange atractors in turbulence*, Dynamical systems and turbulence, Lecture Notes in Mathematics 898, Springer, Berlin 1981

Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa, WNT*, Warszawa 1999

Zawadzki H., *Chaotyczne systemy dynamiczne*, Wydawnictwo AE w Katowicach, Katowice 1996