Piotr MAĆKOWIAK

# „BARDZO SILNA" WERSJA TWIERDZENIA O MAGISTRALI W WIELOSEKTOROWYM MODELU WZROSTU OPTYMALNEGO TYPU LEONTIEFA-GALE'A

## Wprowadzenie

W artykule są kontynuowane rozpoczęte w pracach [3] i [4] badania własności optymalnych trajektorii wzrostu w wielosektorowym modelu wzrostu typu Leontiefa-Gale'a, z kapitałem trwałym, z liniową technologią produkcji dóbr kapitałowych. Wykazano tam, że – przy dostatecznie długim horyzoncie funkcjonowania gospodarki – optymalne trajektorie wzrostu przebiegają dowolnie blisko optymalnej stacjonarnej trajektorii wzrostu (magistrali) w „środkowej" części horyzontu. W tym opracowaniu wykazano, że – przy nieskończonym horyzoncie funkcjonowania gospodarki – istnieje optymalna trajektoria wzrostu i jest ona asymptotycznie zbieżna do magistrali, a następnie, że jeśli w pewnym okresie magistrala „zostaje osiągnięta" przez proces optymalny w nieskończonym horyzoncie, to pozostaje on na magistrali w każdym następnym okresie horyzontu[1].

W kolejnych punktach zostanie przedstawiony zestaw założeń nakładanych na przestrzeń technologiczną, układ równań dynamiki modelu, podstawowe własności zbiorów dopuszczalnych procesów wzostu, definicje optymalnych procesów wzrostu w horyzoncie skończonym i nieskończonym, seria lematów oraz, w przedostatnim punkcie, zostanie zaprezentowana „bardzo silna" wersja twierdzenia o magistrali.

Omówienie założeń i struktury dynamicznej modelu Czytelnik znajdzie w pracach [3] i [4].

---

[1] Jest to odpowiednikiem „późnego" efektu magistrali, zob. [6].

## 1. Przestrzeń technologiczna

Przestrzeń technologiczna $\bar{\mathbf{Z}}$ jest złożona ze wszystkich technologicznie dopuszczalnych procesów produkcji reprezentowanych przez pary nakłady-wyniki. Nakładami są praca, kapitał, a wynikami produkcja bieżąca. Zakładamy, że przestrzeń $\bar{\mathbf{Z}}$ jest podzbiorem $\mathbf{R}_+^{2n+1}$, dodatniego orthantu przestrzeni rzeczywistej $\mathbf{R}^{2n+1}$, a jej elementy są postaci $(z, \mathbf{k}, \mathbf{x}) = (z, k_1, ..., k_n, x_1, ..., x_n)$, gdzie nakłady pracy są reprezentowane przez $z \in \mathbf{R}_+$, kapitału przez $\mathbf{k} \in \mathbf{R}_+^n$ i produkcji przez $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^n$.

Zakładamy, że przestrzeń technologiczna $\bar{\mathbf{Z}}$ spełnia następujące warunki[2]:

1. $\forall (z^1, \mathbf{k}^1, \mathbf{x}^1), (z^2, \mathbf{k}^2, \mathbf{x}^2) \in \bar{\mathbf{Z}} \Rightarrow \forall \alpha, \beta \geqslant 0 : \alpha(z^1, \mathbf{k}^1, \mathbf{x}^1) + \beta(z^2, \mathbf{k}^2, \mathbf{x}^2) \in \bar{\mathbf{Z}}$.
2. $\bar{\mathbf{Z}}$ jest zbiorem domkniętym.
3. $(z^1, \mathbf{k}^1, \mathbf{x}^1) \in \bar{\mathbf{Z}} \wedge (z^2, \mathbf{k}^2, -\mathbf{x}^2) \geqslant (z^1, \mathbf{k}^1, -\mathbf{x}^1) \Rightarrow (z^2, \mathbf{k}^2, \mathbf{x}^2) \in \bar{\mathbf{Z}}$.
4. $(z, \mathbf{k}, \mathbf{x}) \in \bar{\mathbf{Z}} \wedge (z = \mathbf{0} \vee \mathbf{k} = \mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
5. $(z, \mathbf{k}^1, \mathbf{x}^1), (z, \mathbf{k}^2, \mathbf{x}^2) \in \bar{\mathbf{Z}} \wedge \mathbf{k}^1 \neq \mathbf{k}^2 \Rightarrow \forall t \in (0, 1) \exists \mathbf{x} > t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2$ takie, że $(z, t\mathbf{k}^1 + (1-t)\mathbf{k}^2, \mathbf{x}) \in \bar{\mathbf{Z}}$.
6. Niech $(z, \mathbf{k}^1, \mathbf{x}^1), (z, \mathbf{k}^2, \mathbf{x}^2) \in \bar{\mathbf{Z}} \wedge \mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$. $\forall t \in (0, 1) \exists \mathbf{k} \leqslant t\mathbf{k}^1 + (1-t)\mathbf{k}^2$ takie, że $(z, \mathbf{k}, t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2) \in \bar{\mathbf{Z}}$ i jeśli $t\mathbf{k}^1 + (1-t)\mathbf{k}^2 > \mathbf{0}$, to można założyć, że $\mathbf{k} < t\mathbf{k}^1 + (1-t)\mathbf{k}^2$.

## 2. Równania dynamiki

Dynamika modelu jest opisana układem

$$
\begin{aligned}
(z_t, \mathbf{k}_t, \mathbf{x}_{t+1}) &\in \bar{\mathbf{Z}}, \\
\mathbf{x}_t &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{t+1} + \mathbf{c}_t + \mathbf{S}\mathbf{i}_t, \\
\mathbf{k}_{t+1} &= (\mathbf{E} - \mathbf{Q})\mathbf{k}_t + \mathbf{D}\mathbf{i}_t, \\
\mathbf{c}_t &\geqslant l_t \bar{\mathbf{c}}, \\
l_t &= (1+\lambda)^t l_0, \\
z_t &= \sigma l_t, \\
\mathbf{i}_t \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0 &\geqslant \mathbf{0} - \text{dane}, \\
t &= 0, 1, ..., T,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

[2] Niech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. Zapis $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ oznacza, że $x_i \geqslant y_i$ po każdej współrzędnej; zapis $\mathbf{x} \gneqq \mathbf{y}$ oznacza, że $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$; zapis $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ oznacza, że $x_i > y_i$ po każdej współrzędnej. Pogrubioną czcionką oznaczone są macierze i wektory; skalary oznaczamy kursywą.

gdzie:

$T$ – długość horyzontu $T \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$,

$\mathbf{c}_t$ – $n$-wymiarowy wektor konsumpcji w okresie $[t, t+1)$,

$\mathbf{x}_t$ – $n$-wymiarowy wektor produkcji wytworzonej w okresie $[t-1, t)$ i dostępnej pod koniec tego okresu[3],

$\mathbf{k}_t$ – $n$-wymiarowy wektor kapitału dostępnego w momencie $t$ i wykorzystanego do produkcji w okresie $[t, t+1)$,

$\mathbf{i}_t$ – $n$-wymiarowy wektor inwestycji w okresie $[t, t+1)$ skutkujących w momencie $t+1$,

$l_t$ – populacja w momencie $t$, $l_t \in \mathbf{R}_+$,

$z_t$ – zatrudnienie w momencie $t$, $z_t \in \mathbf{R}_+$,

$\mathbf{A}$ – nierozkładalna i produktywna kwadratowa macierz nakładów bieżących stopnia $n$,

$\mathbf{S}$ – kwadratowa macierz stopnia $n$ struktury nakładów inwestycyjnych o współrzędnych nieujemnych taka, że $\sum_i s_{ij} = 1$,

$\mathbf{E}$ – macierz jednostkowa stopnia $n$,

$\mathbf{Q}$ – diagonalna macierz stopnia $n$ współczynników deprecjacji kapitału z elementami na przekątnej $q_i$ z przedziału (0, 1),

$\mathbf{D}$ – diagonalna macierz stopnia $n$ skutkowania inwestycji z elementami na przekątnej $d_i$ z przedziału (0, 1),

$\bar{\mathbf{c}}$ – $n$-wymiarowy wektor minimalnego poziomu konsumpcji, $\bar{\mathbf{c}} \geqslant \mathbf{0}$,

$\sigma$ – współczynnik aktywności zawodowej, $\sigma \in [0, 1]$,

$\lambda$ – egzogeniczna stopa wzrostu liczby ludności z przedziału (0, 1).

Dla ułatwienia, bez utraty ogólności rozważań, przyjmujemy dalej $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$, $l_0 = 1$, $\sigma = 1$. Ponadto niech $\beta = 1 + \lambda$.

Korzystając z własności przestrzeni technologicznej $\bar{\mathbf{Z}}$ układ (1) można przedstawić równoważnie jako

$$\left(1, \frac{\mathbf{k}_t}{\beta^t}, \beta \frac{\mathbf{x}_{t+1}}{\beta^{t+1}}\right) \in \bar{\mathbf{Z}},$$

$$\beta \frac{\mathbf{x}_{t+1}}{\beta^{t+1}} - (\mathbf{E} - \mathbf{Q}) \frac{\mathbf{k}_t}{\beta^t} \geqslant \mathbf{0},$$

$$\frac{\mathbf{x}_t}{\beta^t} + \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{Q}) \frac{\mathbf{k}_t}{\beta^t} - \beta\left(\mathbf{A} \frac{\mathbf{x}_{t+1}}{\beta^{t+1}} + \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1} \frac{\mathbf{k}_{t+1}}{\beta^{t+1}}\right) \geqslant \mathbf{0},$$

$$\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0 \geqslant \mathbf{0} \text{ - dane}, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1,$$

[3] W zależności od kontekstu traktujemy ten wektor jako wierszowy lub kolumnowy.

a wartości konsumpcji i inwestycji w poszczególnych okresach horyzontu można obliczyć z zależności

$$\frac{\mathbf{c}_t}{\beta^t}=\frac{\mathbf{x}_t}{\beta^t}+\mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{Q})\frac{\mathbf{k}_t}{\beta^t}-\beta\left(\mathbf{A}\frac{\mathbf{x}_{t+1}}{\beta^{t+1}}+\mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}\frac{\mathbf{k}_{t+1}}{\beta^{t+1}}\right),$$

$$\frac{\mathbf{i}_t}{\beta^t}=\mathbf{D}^{-1}\left(\beta\frac{\mathbf{k}_{t+1}}{\beta^{t+1}}-(\mathbf{E}-\mathbf{Q})\frac{\mathbf{k}_t}{\beta^t}\right).$$

Dla uproszczenia zapisu, w dalszej części opracowania przez $\mathbf{k}_t$, $\mathbf{x}_t$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{x}$ będziemy oznaczać wektory zmiennych *per capita* (p.c.), tj. jeśli na przykład mamy dany wektor kapitału p.c. $\mathbf{k}_t$, to poziom kapitału w gospodarce wynosi $\beta^t\mathbf{k}_t$. W związku z tym będziemy dalej interesować się następującym układem równań dynamiki, w którym wszystkie nakłady są już wyrażone w wartościach *per capita*

$$\begin{aligned}(1, \mathbf{k}_t, \beta\mathbf{x}_{t+1})&\in\bar{\mathbf{Z}},\\ \beta\mathbf{k}_{t+1}-(\mathbf{E}-\mathbf{Q})\mathbf{k}_t&\geqslant\mathbf{0},\\ \mathbf{x}_t+\mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{Q})\mathbf{k}_t-\beta(\mathbf{A}\mathbf{x}_{t+1}+\mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{k}_{t+1})&\geqslant\mathbf{0},\\ \mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0\geqslant\mathbf{0}\text{ - dane},\quad t=0, 1, \ldots, T-1.&\end{aligned}\tag{2}$$

## 3. Dopuszczalne procesy wzrostu i procesy wzrostu zrównoważonego

**Definicja 1.** Niech $T\in\mathbf{N}\cup\{+\infty\}$, $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)\in\mathbf{R}^n_+\times\mathbf{R}^n_+$ będą ustalone. Ciąg wektorów $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^T$ spełniających dla każdego $t=0, 1, \ldots, T$ układ (2) nazywamy $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0, T)$-dopuszczalnym procesem wzrostu. Zbiór wszystkich procesów $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0, T)$-dopuszczalnych oznaczamy przez $\Gamma_F^T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$.

Dla wszystkich długości horyzontu $T$ i dowolnych nakładów początkowych $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$, zbiory $\Gamma_F^T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ są wypukłe i niepuste. Ponadto dla $T\in\mathbf{N}$ zbiory $\Gamma_F^T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ są zbiorami zwartymi jako podzbiory $\prod_{t=0}^{T}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$. Zwartość zbioru $\Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ zostanie wykazana dalej w tym punkcie[4].

[4] Zob. [3]. W całym opracowaniu ilekroć jest mowa o iloczynach kartezjańskich zbiorów, to rozpatrujemy je jako przestrzenie topologiczne z topologią produktową.

Każdemu $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0, T)$-dopuszczalnemu procesowi wzrostu odpowiada taki strumień konsumpcji $\{\mathbf{c}_t\}_{t=0}^{T}$, że $\forall t=0, 1, \ldots, T: \mathbf{c}_t=\mathbf{h}^1(\mathbf{k}_t, \mathbf{k}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1})$, gdzie $\mathbf{h}^1: \mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}_+^n \to \mathbf{R}_+^n$ jest funkcją określoną wzorem

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{k}_t, \mathbf{k}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1})=\mathbf{x}_t+\mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{Q})\mathbf{k}_t-\beta(\mathbf{A}\mathbf{x}_{t+1}+\mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{k}_{t+1}). \quad (3)$$

Istotną rolę w dalszej części opracowania będą odgrywać procesy wzrostu zrównoważonego.

**Definicja 2.** Ciąg par wektorów $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty}$, spełniających dla każdego $t=0, 1, \ldots, T$ układ (2), nazywamy procesem wzrostu zrównoważonego (stacjonarnego), gdy $\forall t=0, 1, \ldots$ zachodzi

$$(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t)=(\mathbf{k}_{t+1}, \mathbf{x}_{t+1}).$$

Wprost z definicji 2 wynika, że każdy proces wzrostu zrównoważonego jest jednoznacznie identyfikowany przez parę $(\mathbf{k}, \mathbf{x})=(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$, która spełnia układ

$$\begin{gathered}(1, \mathbf{k}, \beta\mathbf{x}) \in \bar{\mathbf{Z}}, \\ (\mathbf{E}-\beta\mathbf{A})\mathbf{x}-\mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}(\lambda\mathbf{E}+\mathbf{Q})\mathbf{k} \geqslant \mathbf{0}.\end{gathered} \quad (4)$$

Na odwrót: każda para $(\mathbf{k}, \mathbf{x})$, która spełnia układ (4), wyznacza proces wzrostu stacjonarnego po przyjęciu $(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t)=(\mathbf{k}, \mathbf{x})$, dla $t=0, 1, \ldots$ Z tych względów będziemy identyfikować zbiór procesów wzrostu zrównoważonego ze zbiorem par wektorów spełniających układ (4). Można wykazać, że zbiór par spełniających układ (4) jest zwarty i wypukły [3]. Procesowi wzrostu stacjonarnego, wyznaczonemu przez parę $(\mathbf{k}, \mathbf{x})$, odpowiada w każdym okresie konsumpcja p.c. $\mathbf{h}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{x}, \mathbf{x})=(\mathbf{E}-\beta\mathbf{A})\mathbf{x}-\mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}(\lambda\mathbf{E}+\mathbf{Q})\mathbf{k}$.

## 4. Optymalne procesy wzrostu

Wprowadźmy teraz społeczną funkcję użyteczności konsumpcji $U: \mathbf{R}_+^n \to \mathbf{R}_+$. O funkcji $U$ zakładamy dalej, że jest wklęsła, ciągła oraz rosnąca.

**Definicja 3.** Niech $T \in \mathbf{N}$. Procesem $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0, T)$-optymalnym nazywamy taki proces $\{\bar{\mathbf{k}}_t, \bar{\mathbf{x}}_t\}_{t=0}^{T} \in \Gamma_F^T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$, który maksymalizuje sumę

$$\sum_{t=0}^{T-1} U(\mathbf{h}^1(\mathbf{k}_t, \mathbf{k}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1})),$$

na zbiorze wszystkich $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0, T)$-dopuszczalnych procesów wzrostu. Funkcja $\mathbf{h}^1$ jest dana wzorem (3).

Ponieważ skończona suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą, $\mathbf{h}^1$ jest funkcją ciągłą, a $\Gamma_F^T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ jest zbiorem zwartym, więc istnieje proces $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0, T)$-optymalny. Z założenia wklęsłości funkcji $U$, wobec liniowości funkcji $\mathbf{h}^1$ oraz wypukłości zbioru $\Gamma_F^T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ wynika, że zbiór $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0, T)$-optymalnych procesów wzrostu jest wypukły.

Powyższa definicja na ogół nie ma sensu dla $T=+\infty$, gdyż granica

$$\lim_T \sum_{t=0}^{T} U(\mathbf{h}^1(\mathbf{k}_t, \mathbf{k}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1})) \quad \text{przy} \quad T \to +\infty$$

może nie istnieć. Dlatego dla $T=+\infty$ posłużymy się inną definicją optymalności (zob. [1] i [2]).

**Definicja 4.** Niech $T=+\infty$. Ustalmy $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) \geqslant \mathbf{0}$. Proces $\{\bar{\mathbf{k}}_t, \bar{\mathbf{x}}_t\}_{t=0}^T \in \Gamma_F^T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ nazywamy $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0, \infty)$-optymalnym, gdy dla każdego procesu $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^T \in \Gamma_F^T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ dla każdej ustalonej liczby $\varepsilon > 0$, istnieje taka liczba $T_\varepsilon \in \mathbf{N}$, że

$$\forall T' \geqslant T_\varepsilon : \sum_{t=0}^{T'} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}}_t)) \leqslant \varepsilon,$$

gdzie $\bar{\mathbf{h}}_t = \mathbf{h}^1(\bar{\mathbf{k}}_t, \bar{\mathbf{k}}_{t+1}, \bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{x}}_{t+1})$, $\mathbf{h}_t = \mathbf{h}^1(\mathbf{k}_t, \mathbf{k}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1})$ dla $t=0, 1, \ldots$, a funkcja $\mathbf{h}^1$ dana jest wzorem (3).

W świetle definicji 4 proces wzrostu w nieskończonym horyzoncie czasu jest optymalny, gdy suma użyteczności konsumpcji generowanej w tym procesie jest nie mniejsza o $\varepsilon$ niż suma użyteczności konsumpcji, odpowiadającej dowolnemu ustalonemu procesowi wzrostu dopuszczalnego (począwszy od pewnego okresu, zależnego od ustalonego procesu). Pokażemy w dalszej części artykułu, że taka definicja optymalności ma sens dla pewnego zbioru nakładów początkowych, tj. że istnieje $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0, \infty)$-optymalny proces wzrostu.

**Definicja 5.** Stacjonarny proces wzrostu $(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}})$ nazywamy optymalnym stacjonarnym procesem wzrostu (magistralą), gdy jest rozwiązaniem zadania: znaleźć maksimum $U(\mathbf{h}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{x}, \mathbf{x}))$, gdzie $\mathbf{h}^1$ dana jest wzorem (3), przy ograniczeniach (4).

Z własności przestrzeni technologicznej $\bar{\mathbf{Z}}$ i własności funkcji użyteczności $U$ wynika, że istnieje dokładnie jedna magistrala [3]. Dalej obowiązywać będzie następujące

**Założenie 1.** Istnieje taka magistrala $(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}})$, że $\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$ oraz $\bar{\mathbf{h}} := \mathbf{h}^1(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) > \mathbf{0}$.

Założenie 1 stanowi, że magistralny poziom kapitału, produkcji i konsumpcji jest dodatni. Wprowadzimy jeszcze definicję procesu „dobrego" [1] i [2].

**Definicja 6.** Ustalmy $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) \geqslant \mathbf{0}$ oraz $T = +\infty$. Proces $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{T} \in \Gamma_F^T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ nazywamy dobrym, gdy istnieje taka liczba rzeczywista $m$, że

$$\forall T' \geqslant 0 : \sum_{t=0}^{T'} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \geqslant m,$$

przy czym wektory $\mathbf{h}_t$ są dane definicją 4, a $\bar{\mathbf{h}}$ jest magistralnym poziomem komsumpcji.

Zgodnie z definicją 6 proces jest dobry, gdy strata użyteczności konsumpcji generowanej przez ten proces, w porównaniu z procesem wzrostu na magistrali (który nie musi być dopuszczalny przy przyjętym stanie początkowym), jest ograniczona.

## 5. Twierdzenia pomocnicze

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$\mathbf{h}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) := \mathbf{h}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{x}, \mathbf{x}),$$
$$\bar{\mathbf{h}} := \mathbf{h}(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}}),$$
$$V := \{(\mathbf{k}, \mathbf{x}) : (1, \mathbf{k}, \beta\mathbf{x}) \in \bar{\mathbf{Z}}\},$$
$$\mathbf{h}_t := \mathbf{h}^1(\mathbf{k}_t, \mathbf{k}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}),$$
$$\bar{\mathbf{h}}_t := \mathbf{h}^1(\bar{\mathbf{k}}_t, \bar{\mathbf{k}}_{t+1}, \bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{x}}_{t+1}).$$

Para $(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}})$ wyznacza magistralny poziom kapitału i produkcji, $\mathbf{k}_t$, $\mathbf{x}_t$ oznaczają kapitał i produkcję w okresie $t$ w pewnym procesie dopuszczalnym, $\bar{\mathbf{k}}_t$, $\bar{\mathbf{x}}_t$ oznaczają kapitał i produkcję w okresie $t$ w procesie optymalnym.

Prawdziwe są następujące lematy wykorzystywane dalej w dowodach twierdzeń[5].

[5] Niezamieszczone tutaj dowody można znaleźć w pracach [3] i [4].

**LEMAT 1.** *Niech* $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) > 0$. *Aby istniał taki proces dopuszczalny* $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty}$, *że* $\exists t' \in N\ \forall t \geqslant t'\ \mathbf{k}_t = \bar{\mathbf{k}}, \mathbf{x}_t = \bar{\mathbf{x}}$, *potrzeba i wystarcza, aby dla pewnego procesu dopuszczalnego* $\{\bar{\mathbf{k}}_t, \bar{\mathbf{x}}_t\}_{t=0}^{+\infty}$ *istniała taka liczba całkowita* $t''$, *że* $(\bar{\mathbf{k}}_{t''+1}, \bar{\mathbf{x}}_{t''+1}) > (\bar{\mathbf{k}}_{t''}, \bar{\mathbf{x}}_{t''})$.

Na podstawie lematu 1 wnioskujemy, że jeśli w gospodarce można w pewnym okresie $t'+1$ zwiększyć zasoby kapitału i poziom produkcji wszystkich dóbr w porównaniu z okresem poprzedzającym, to istnieje proces dobry, „startujący" z poziomu kapitału $\mathbf{k}_{t'}$ i zasobów dóbr bieżących $\mathbf{x}_{t'}$. Każdą parę $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$, dla której istnieje taki $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0, +\infty)$-dopuszczalny proces, że dla pewnego $t' > 0$ $(\mathbf{k}_{t'+1}, \mathbf{x}_{t'+1}) > (\mathbf{k}_{t'}, \mathbf{x}_{t'})$, nazywamy *produktywną* [5].

**LEMAT 2.** $\exists \mathbf{p} > \mathbf{0}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$:

1. $\forall (\mathbf{k}, \mathbf{x}) \in V \wedge (\mathbf{k}, \mathbf{x}) \neq (\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}})$ *zachodzi* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) < \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{h}}$, *gdzie* „$\cdot$" *oznacza iloczyn skalarny*;
2. $\forall \mathbf{c} \geqslant \mathbf{0}$ *zachodzi* $U(\mathbf{c}) - U(\bar{\mathbf{h}}) \leqslant \mathbf{p} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{h})$.

**LEMAT 3.** *Przyjmijmy oznaczenia takie jak w poprzednim lemacie. Niech* $(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}})$ *będzie magistralą i niech wektor* $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ *spełnia tezę lematu 2. Wtedy* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_\varepsilon > 0\ \forall (\mathbf{k}, \mathbf{x}) \in V$:

$$\max\{\|\mathbf{k} - \bar{\mathbf{k}}\|, \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|\} \geqslant \varepsilon \Rightarrow \mathbf{p} \cdot (\mathbf{h}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) - \bar{\mathbf{h}}) \leqslant -\eta_\varepsilon,$$

*gdzie* $\|\cdot\|$ *oznacza normę euklidesową.*

**LEMAT 4.** *Ustalmy dowolne* $\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0 \geqslant \mathbf{0}$ *i* $T < +\infty$. *Dla dowolnego procesu* $T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0 T)$-dopuszczalnego zachodzi

$$\sum_{t=0}^{T-1} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \leqslant \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_T) + \beta \mathbf{p} \cdot \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_T) + \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{h}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_{t+1}) - \bar{\mathbf{h}}), \tag{5}$$

*gdzie* $\mathbf{p}$ *jest wektorem spełniającym tezę lematu 2.*

**Dowód.** Dla dowolnego procesu $T$-dopuszczalnego $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{T}$, na podstawie lematu 2, definicji $\mathbf{h}_t$, $\bar{\mathbf{h}}$ dla $t = 0, \ldots, T-1$ zachodzi

$$U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}}) \leqslant \mathbf{p} \cdot (\mathbf{h}_t - \bar{\mathbf{h}}).$$

Sumując stronami nierówności od $t=0$ do $t=T-1$, korzystając z liniowości funkcji $\mathbf{h}^1$ oraz $\mathbf{h}$, po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy żądaną nierówność.

Zauważmy, że teza lematu jest prawdziwa dla każdej skończonej długości horyzontu.

**LEMAT 5.** *Ustalmy dowolne* $\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0 \geqslant \mathbf{0}$. *Istnieje taka liczba* $M$, *że dla dowolnego procesu* $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ *zachodzi*

$$\limsup_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) < M.$$

**Dowód.** Ze wzoru (5) i lematu 4 wynika dla każdego $T < +\infty$, że

$$\sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \leqslant \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{T+1}) + \beta \mathbf{p} \cdot \mathbf{SD}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{T+1}) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{p} \cdot \mathbf{SD}^{-1} \mathbf{k}_0.$$

Teza lematu jest prawdziwa dla $M = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{p} \cdot \mathbf{SD}^{-1} \mathbf{k}_0$.

**LEMAT 6.** *Ustalmy dowolne* $\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0 \geqslant \mathbf{0}$. *Jeśli proces* $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ *nie jest dobry* (*w sensie definicji* 6), *to*

$$\limsup_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) = \lim_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) = -\infty.$$

**Dowód.** Zob. [2].

**LEMAT 7.** *Jeśli proces* $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ *jest dobry, to*

$$\mathbf{k}_t \xrightarrow{t} \bar{\mathbf{k}}, \qquad \mathbf{x}_t \xrightarrow{t} \bar{\mathbf{x}}$$

*oraz*

$$\limsup_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) = \lim_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \in \mathbf{R}.$$

**Dowód.** Jeśli proces $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ nie jest zbieżny do magistrali, to istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że nierówność $\max\{\|\mathbf{k}_t - \bar{\mathbf{k}}\|, \|\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}}\|\} \geqslant \varepsilon$ zachodzi dla nieskończenie wielu okresów. Na podstawie lematów 2 i 3 oznacza to, że $\sum_{t=0}^{+\infty} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{h}_t - \bar{\mathbf{h}}) = -\infty$. Korzystając teraz ze wzoru (5), otrzymujemy, że $\sum_{t=0}^{+\infty} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) = -\infty$, co przeczy temu, że rozpatrywany proces jest dobry.

Udowodnimy teraz drugą część tezy. Oznaczmy

$$S_T = \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}}))$$

i załóżmy wbrew tezie, że $\liminf_T S_T < \limsup_T S_T$, przy czym wiadomo, że obie granice są skończone, co wynika z definicji procesu dobrego i lematu 6. W takim razie istnieją takie podciągi $\{T_j^1\}_{j=0}^{+\infty} \subset \{t\}_{t=0}^{+\infty}$ i $\{T_j^2\}_{j=0}^{+\infty} \subset \{t\}_{t=0}^{+\infty}$, że $\forall j = 0, 1, \ldots : T_j^2 < T_j^1 < T_{j+1}^2$ oraz

$$\lim_j S_{T_j^1} = \limsup_T S_T, \qquad \lim_j S_{T_j^2} = \liminf_T S_T.$$

Zatem istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że począwszy od pewnej liczby naturalnej $j_\varepsilon$ zachodzi $\forall j \geqslant j_\varepsilon : S_{T_j^1} - S_{T_j^2} > \varepsilon$. Otrzymujemy stąd, że

$$\sum_{t=T_j^2+1}^{T_j^1} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) > \varepsilon.$$

Jednocześnie $\forall j \geqslant j_\varepsilon$ zachodzi:

$$\varepsilon < \sum_{t=T_j^2+1}^{T_j^1} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \leqslant \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_{T_j^2+1} - \mathbf{x}_{T_j^1+1}) + \beta \mathbf{p} \cdot \mathbf{SD}^{-1} (\mathbf{k}_{T_j^2+1} - \mathbf{k}_{T_j^1+1}),$$

co jest niemożliwe, gdyż rozpatrywany proces jest dobry, a na podstawie pierwszej części tezy

$$\lim_{j \to +\infty} [\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_{T_j^2+1} - \mathbf{x}_{T_j^1+1}) + \beta \mathbf{p} \cdot \mathbf{SD}^{-1} (\mathbf{k}_{T_j^2+1} - \mathbf{k}_{T_j^1+1})] = 0.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, czyli teza lematu jest prawdziwa.

**LEMAT 8.** *Dla każdej ustalonej pary nakładów początkowych* $\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0 \geqslant \mathbf{0}$ *zbiór* $\Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ *jest zwarty. Ponadto*

$$\exists M \in \mathbf{R} \; \forall \{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) : \sup_t \max\{\|\mathbf{k}_t\|, \|\mathbf{x}_t\|\} < M.$$

**Dowód.** Ponieważ dla każdego skończonego $T$ zbiór $\Gamma_F^T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ jest zwarty, a każdy podciąg utworzony z pierwszych $T+1$ wyrazów dowolnego procesu dopuszczalnego w nieskończonym horyzoncie czasu należy do $\Gamma_F^T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$, więc zachodzi $\forall t' = 0, 1, \ldots$

$$\sup_{\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)} \max\{\|\mathbf{k}_{t'}\|, \|\mathbf{x}_{t'}\|\} < +\infty.$$

Załóżmy, że

$$\{\mathbf{k}^m, \mathbf{x}^m\}_{m=0}^{+\infty} \subset \Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0), \qquad \mathbf{k}^m = \{\mathbf{k}_t^m\}_{t=0}^{+\infty}, \qquad \mathbf{x}^m = \{\mathbf{x}_t^m\}_{t=0}^{+\infty}.$$

Wykażemy, że ciąg ten zawiera podciąg zbieżny w $\Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$.

Załóżmy, że wybraliśmy już taki podciąg $\{m_j\}_{j=0}^{+\infty}$, że dla $t=0, 1, \ldots, t'$ zachodzi $\mathbf{k}_t^{m_j} \xrightarrow{j} \mathbf{k}_t$, $\mathbf{x}_t^{m_j} \xrightarrow{j} \mathbf{x}_t$ oraz $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{t'} \in \Gamma_F^T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ dla $T=t'$. Oznacza to, że $\forall j=0, 1, \ldots$ zachodzi

$$(1, \mathbf{k}_{t'}^{m_j}, \beta\mathbf{x}_{t'+1}^{m_j}) \in \bar{\mathbf{Z}},$$

$$\beta\mathbf{k}_{t'+1}^{m_j} - (\mathbf{E}-\mathbf{Q})\mathbf{k}_{t'}^{m_j} \geqslant 0,$$

$$\mathbf{x}_{t'}^{m_j} + \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{Q})\mathbf{k}_{t'}^{m_j} - \beta(\mathbf{A}\mathbf{x}_{t'+1}^{m_j} + \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{k}_{t'+1}^{m_j}) \geqslant 0,$$

a ponieważ ciągi elementów $\mathbf{k}_{t'+1}^{m_j}$, $\mathbf{x}_{t'+1}^{m_j}$, $j=0, 1, \ldots$ są ograniczone, więc zawierają podciągi zbieżne, a zatem istnieje taki podciąg indeksów $\{m_j'\}_{j=0}^{+\infty} \subset \{m_j\}_{j=0}^{+\infty}$, że $\mathbf{k}_{t'+1}^{m_j'} \xrightarrow{j} \mathbf{k}_{t'+1}$, $\mathbf{x}_{t'+1}^{m_j'} \xrightarrow{j} \mathbf{x}_{t'+1}$ i na podstawie domknięstości zbioru $\bar{\mathbf{Z}}$ oraz ciągłości przekształceń liniowych zachodzi $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{t'} \in \Gamma_F^T(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ dla $T=t'+1$ i dla $t=0, 1, \ldots, t'+1$ zachodzi $\mathbf{k}_t^{m_j'} \xrightarrow{j} \mathbf{k}_t$, $\mathbf{x}_t^{m_j'} \xrightarrow{j} \mathbf{x}_t$. Ponieważ $\forall m=0, 1, \ldots$ $(\mathbf{k}_0^m, \mathbf{x}_0^m) = (\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$, więc $\mathbf{k}_0^m \xrightarrow{m} \mathbf{k}_0$, $\mathbf{x}_0^m \xrightarrow{m} \mathbf{x}_0$. Można zatem indukcyjnie wybrać takie podciągi indeksów

$$\{m_j^{t'+1}\}_{j=0}^{+\infty} \subset \{m_j^{t'}\}_{j=0}^{+\infty} \subset \ldots \subset \{m\}_{m=0}^{+\infty},$$

że $\forall t=0, 1, \ldots, t'$, $\forall \bar{t}=0, 1, \ldots, t', t'+1$ zachodzi $\mathbf{k}_t^{m_j^{\bar{t}}} \xrightarrow{j} \mathbf{k}_t$, $\mathbf{x}_t^{m_j^{\bar{t}}} \xrightarrow{j} \mathbf{x}_t$, przy czym $\forall t=0, 1, \ldots, t'$

$$(1, \mathbf{k}_t, \beta\mathbf{x}_{t+1}) \in \bar{\mathbf{Z}},$$

$$\beta\mathbf{k}_{t+1} - (\mathbf{E}-\mathbf{Q})\mathbf{k}_t \geqslant 0,$$

$$\mathbf{x}_t + \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{Q})\mathbf{k}_t - \beta(\mathbf{A}\mathbf{x}_{t+1} + \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{k}_{t+1}) \geqslant 0.$$

Na podstawie wyboru ciągów $\{m_j^t\}_{j=0}^{+\infty}$, $t=0, 1, \ldots$ zachodzi, że ciąg procesów $\{\mathbf{k}^{m_j^j}, \mathbf{x}^{m_j^j}\}_{j=0}^{+\infty}$ jest poszukiwanym podciągiem wyjściowego ciągu zbieżnym w $\Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$.

Załóżmy teraz, że istnieje taki proces $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty}$, że $\sup_t \max\{\|\mathbf{k}_t\|, \|\mathbf{x}_t\|\} = +\infty$. Z własności 1, 2 i 4 przestrzeni technologicznej wynika, że $\sup_t \|\mathbf{k}_t\| = +\infty$, o ile $\sup_t \|\mathbf{x}_t\| = +\infty$. Ponadto jeśli dla pewnego podciągu $\{t_m\}_{m=0}^{+\infty} \subset \{t\}_{t=0}^{+\infty}$ zachodzi $\|\mathbf{x}_{t_m}\| \xrightarrow{m} +\infty$, to

$$\min\{\|\mathbf{k}_{t_m}\|, \|\mathbf{k}_{t_m+1}\|, \|\mathbf{x}_{t_m}\|, \|\mathbf{x}_{t_m+1}\|\} \xrightarrow{m} +\infty$$

wynika to z nierozkładalności macierzy $\mathbf{A}$, z własności 1, 2 i 4 przestrzeni technologicznej oraz nierówności opisującej dynamikę kapitału. Załóżmy teraz, że $\sup_t \|\mathbf{k}_t\| = +\infty$, tzn. że dla pewnego podciągu $\{t_m\}_{m=0}^{+\infty} \subset \{t\}_{t=0}^{+\infty}$ zachodzi $\|\mathbf{k}_{t_m}\| \xrightarrow{m} +\infty$. Można też założyć, że $\forall m: \|\mathbf{k}_{t_m+1}\| \geqslant \|\mathbf{k}_{t_m}\|$. Wynika stąd, że $\|\mathbf{k}_{t_m+q}\| \xrightarrow{m} +\infty$ dla dowolnej ustalonej nieujemnej liczby całkowitej $q$. Załóżmy, że $\sup_t \|\mathbf{x}_t\| < +\infty$. Niech

$$\forall m: r_m := \|\mathbf{k}_{t_m}\|, \mathbf{k}'_{t_m} := r_m^{-1}\mathbf{k}_{t_m}, \mathbf{k}'_{t_m+1} := r_m^{-1}\mathbf{k}_{t_m+1},$$
$$\mathbf{x}'_{t_m} := r_m^{-1}\mathbf{x}_{t_m}, \mathbf{x}'_{t_m+1} := r_m^{-1}\mathbf{x}_{t_m+1}.$$

Bez utraty ogólności rozważań można założyć, że $\mathbf{k}'_{t_m} \xrightarrow{m} \mathbf{k}'$ i $\|\mathbf{k}'\| = 1$. Dla każdego $m$ zachodzi

$$\mathbf{x}'_{t_m} - \beta\mathbf{A}\mathbf{x}'_{t_m+1} \geqslant \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}(\beta\mathbf{k}'_{t_m+1} - (\mathbf{E}-\mathbf{Q})\mathbf{k}'_{t_m}) \geqslant 0, \tag{6}$$

a przy $m \to +\infty$ musi zajść $\mathbf{0} \geqslant \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}(\beta\mathbf{k} - (\mathbf{E}-\mathbf{Q})\mathbf{k}')$, dla pewnego wektora $\mathbf{k} = \lim_m \mathbf{k}'_{t_m+1}$, $\|\mathbf{k}\| \geqslant 1$. Wynika stąd, że $\beta\mathbf{k} = (\mathbf{E}-\mathbf{Q})\mathbf{k}'$, a stąd wynika, że $\beta\|\mathbf{k}\| \leqq \max_i\{1-q_i\}\|\mathbf{k}'\| < 1$, co oznacza sprzeczność. Musi zatem zajść, że jeśli $\sup_t \|\mathbf{k}_t\| = +\infty$, to $\sup_t \|\mathbf{x}_t\| = +\infty$. Tak więc jeśli $\sup_t \|\mathbf{k}_t\| = +\infty$, to istnieje taki podciąg $\{t_m\}_{m=0}^{+\infty} \subset \{t\}_{t=0}^{+\infty}$, że

$$\min\{\|\mathbf{k}_{t_m}\|, \|\mathbf{k}_{t_m+1}\|, \|\mathbf{x}_{t_m}\|, \|\mathbf{x}_{t_m+1}\|\} =: r_m \xrightarrow{m} +\infty.$$

Zdefiniujmy $\forall m$ wektory $\mathbf{k}'_{t_m}$, $\mathbf{k}'_{t_m+1}$, $\mathbf{x}'_{t_m}$, $\mathbf{x}'_{t_m+1}$ tak jak poprzednio. Bez utraty ogólności rozważań można założyć, że choć jeden z utworzonych ciągów jest

ograniczony w normie euklidesowej. Jeśli ograniczony jest ciąg $\{\mathbf{k}'_{t_m}\}_{m=0}^{+\infty}$, to musi być ograniczony ciąg $\{\mathbf{x}'_{t_m+1}\}_{m=0}^{+\infty}$. Wybierając z tych ciągów podciągi zbieżne oraz wykorzystując własności 2 i 4 przestrzeni technologicznej, otrzymalibyśmy sprzeczność. Załóżmy zatem, że ciąg $\{\mathbf{k}'_{t_m}\}_{m=0}^{+\infty}$ nie jest ograniczony. Wynika stąd, że ciąg $\{\mathbf{k}'_{t_m+1}\}_{m=0}^{+\infty}$ również nie jest ograniczony. Można więc przyjąć, że ograniczone są obydwa ciągi $\{\mathbf{x}'_{t_m}\}_{m=0}^{+\infty}$ i $\{\mathbf{x}'_{t_m+1}\}_{m=0}^{+\infty}$, a ponadto że $\forall m: \|\mathbf{k}'_{t_m+1}\| \geqslant \|\mathbf{k}'_{t_m}\|$. Jeśli teraz przyjmiemy, że $\forall m\, s_m := \|\mathbf{k}_{t_m}\|$ i położymy

$$\mathbf{k}'_{t_m} := s_m^{-1}\mathbf{k}_{t_m}, \quad \mathbf{k}'_{t_m+1} := s_m^{-1}\mathbf{k}_{t_m+1}, \quad \mathbf{x}'_{t_m} := s_m^{-1}\mathbf{x}_{t_m}, \quad \mathbf{x}'_{t_m+1} := s_m^{-1}\mathbf{x}_{t_m+1},$$

to ciągi $\{\mathbf{x}'_{t_m}\}_{m=0}^{+\infty}$ i $\{\mathbf{x}'_{t_m+1}\}_{m=0}^{+\infty}$ muszą być zbieżne do zera. Z nierówności (6) i konstrukcji ciągów wynika, że ciągi $\{\mathbf{k}'_{t_m}\}_{m=0}^{+\infty}$ i $\{\mathbf{k}'_{t_m+1}\}_{m=0}^{+\infty}$ są odpowiednio zbieżne do granic $\mathbf{k}'$ i $\mathbf{k}$, przy czym $\|\mathbf{k}\| \geqslant \|\mathbf{k}'\| \geqslant 1$. Rozumując tak jak poprzednio, doprowadzamy do sprzeczności. Z dotychczasowych rozważań wynika, że dla dowolnego procesu $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ zachodzi $\sup_t \max\{\|\mathbf{k}_t\|, \|\mathbf{x}_t\|\} < +\infty$. Wykażemy teraz ostatnią część tezy.

Załóżmy wbrew tezie, że dla pewnego ciągu procesów

$$\{\mathbf{k}^m, \mathbf{x}^m\}_{m=0}^{+\infty} \subset \Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0), \qquad \mathbf{k}^m = \{\mathbf{k}_t^m\}_{t=0}^{+\infty}, \qquad \mathbf{x}^m = \{\mathbf{x}_t^m\}_{t=0}^{+\infty}$$

zachodzi $\limsup_m \sup_t \|\mathbf{k}_t^m\| = +\infty$. Wybierzmy $\forall m$ indeksy $t_m$ tak, aby

$$\|\mathbf{k}_{t_m+1}^m\| \geqslant \|\mathbf{k}_{t_m}^m\| \quad \text{i} \quad \|\mathbf{k}_{t_m}^m\| \xrightarrow{m} +\infty.$$

Definiując $\forall m\ r_m := \|\mathbf{k}_{t_m}^m\|$ oraz

$$\mathbf{k}'_{t_m} := r_m^{-1}\mathbf{k}_{t_m}, \quad \mathbf{k}'_{t_m+1} := r_m^{-1}\mathbf{k}_{t_m+1}, \quad \mathbf{x}'_{t_m} := r_m^{-1}\mathbf{x}_{t_m}, \quad \mathbf{x}'_{t_m+1} := r_m^{-1}\mathbf{x}_{t_m+1}$$

i stosując rozumowanie identyczne do poprzedniego otrzymamy sprzeczność. Ponieważ teraz jeśli $\limsup_m \sup_t \|\mathbf{x}_t^m\| = +\infty$, to $\limsup_m \sup_t \|\mathbf{k}_t^m\| = +\infty$, więc dowód jest zakończony.

Zanim sformułujemy ostatni lemat, wprowadźmy oznaczenie:
$\forall \mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0 \geqslant \mathbf{0}\ \forall s \in \mathbf{R}$

$$\Gamma_s(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) = \left\{\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^\infty(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) : \lim_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \geqslant s\right\}. \quad (7)$$

**LEMAT 9.** $\forall \mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0 \geqslant \mathbf{0}\ \forall s \in \mathbf{R}$ *zbiór* $\Gamma_s(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ *jest zwartym podzbiorem zbioru* $\Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$.

**Dowód.** Wobec tego, że $\Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ jest zbiorem zwartym, wystarczy wykazać, że $\Gamma_s(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ jest jego domkniętym podzbiorem. Jeśli $\Gamma_s(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) = \emptyset$, to teza jest prawdziwa. Niech

$$\{\mathbf{k}^m, \mathbf{x}^m\}_{m=0}^{+\infty} \subset \Gamma_s(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0), \qquad \mathbf{k}^m = \{\mathbf{k}_t^m\}_{t=0}^{+\infty}, \qquad \mathbf{x}^m = \{\mathbf{x}_t^m\}_{t=0}^{+\infty}$$

$$(\mathbf{k}^m, \mathbf{x}^m) \xrightarrow{m} (\mathbf{k}, \mathbf{x}) \in \Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0), \qquad \mathbf{k} = \{\mathbf{k}_t\}_{t=0}^{+\infty}, \qquad \mathbf{x} = \{\mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty}.$$

Musimy wykazać, że $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \in \Gamma_s(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$. Wykażemy najpierw, że proces $(\mathbf{k}, \mathbf{x})$ jest dobry. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy, na podstawie lematu 6, istnieje taki ciąg $\{T_j\}_{j=0}^{+\infty}$, że

$$\forall j: \sum_{t=0}^{T_j} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) < -j.$$

Oznacza to, że

$$\forall j\ \exists m_j: \text{jeśli } m \geqslant m_j, \text{ to } \sum_{t=0}^{T_j} (U(\mathbf{h}_t^m) - U(\bar{\mathbf{h}})) < -j < s.$$

Weźmy teraz przy ustalonym $j$ dowolne $T > T_j$. Ze wzoru (5) i lematu (8) otrzymujemy dla pewnej liczby $M \in \mathbf{R}$

$$\sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t^m) - U(\bar{\mathbf{h}})) = \sum_{t=0}^{T_j} (U(\mathbf{h}_t^m) - U(\bar{\mathbf{h}})) + \sum_{t=T_j+1}^{T} (U(\mathbf{h}_t^m) - U(\bar{\mathbf{h}})) \leqslant$$

$$\leqslant -j + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_{T_j+1}^m + \beta \mathbf{p} \cdot \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1} \mathbf{k}_{T_j+1}^m \leqslant -j + M.$$

Biorąc dostatecznie duże $j$ i przechodząc do granicy $T \to +\infty$, wnioskujemy, że istnieje taka liczba $m$, że

$$\lim_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t^m) - U(\bar{\mathbf{h}})) < -j + M < s,$$

co oznacza sprzeczność. Załóżmy teraz, że $\lim_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) < s$.

Ze wzoru (5) oraz lematów 2 i 3 wynika, że dla dowolnego $T$ i $m$ zachodzi

$$\lim_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}) - \beta\mathbf{p}\cdot\mathbf{SD}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \bar{\mathbf{k}}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{T+1}) - \beta\mathbf{p}\cdot\mathbf{SD}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{T+1})$$

oraz

$$\lim_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t^m) - U(\bar{\mathbf{h}})) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}) - \beta\mathbf{p}\cdot\mathbf{SD}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \bar{\mathbf{k}}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t^m) - U(\bar{\mathbf{h}})) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{T+1}^m) - \beta\mathbf{p}\cdot\mathbf{SD}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{T+1}^m).$$

Dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$ i $T_\varepsilon$ jeśli $T \geqslant T_\varepsilon$, to prawdziwe są również następujące nierówności:

$$\sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t^m) - U(\bar{\mathbf{h}})) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{T+1}^m) - \beta\mathbf{p}\cdot\mathbf{SD}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{T+1}^m) \geqslant$$

$$\geqslant \lim_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t^m) - U(\bar{\mathbf{h}})) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}) - \beta\mathbf{p}\cdot\mathbf{SD}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \bar{\mathbf{k}}) \geqslant$$

$$\geqslant s - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}) - \beta\mathbf{p}\cdot\mathbf{SD}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \bar{\mathbf{k}}) >$$

$$> \varepsilon + \lim_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}) - \beta\mathbf{p}\cdot\mathbf{SD}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \bar{\mathbf{k}}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{T+1}) - \beta\mathbf{p}\cdot\mathbf{SD}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{T+1}) = (*)$$

i dla odpowiednio dużych $m$ zachodzi

$$(*) \qquad \geqslant \frac{\varepsilon}{8} + \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t^m) - U(\bar{\mathbf{h}})) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{T+1}^m) - \beta\mathbf{p}\cdot\mathbf{SD}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{T+1}^m),$$

co znów prowadzi do sprzeczności. Zatem

$$\lim_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \geqslant s.$$

## 6. Procesy $\infty$-optymalne

Na podstawie lematu 1, jeżeli para $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) \geqslant \mathbf{0}$ jest produktywna[6] lub istnieje proces „prowadzący" w skończonym czasie od $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ do pewnej pary produktywnej, to istnieje proces dobry $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$. Oznacza to, że jeśli proces $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0, \infty)$-optymalny w sensie definicji 4 istnieje, to jest procesem dobrym. Uzasadnijmy to stwierdzenie. Jeśli proces $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^{+\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ jest optymalny, ale nie jest dobry, a $\{\mathbf{k}'_t, \mathbf{x}'_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ jest dobry, to

$$\lim_T (U(\mathbf{h}'_t) - U(\mathbf{h}_t)) = \lim_T (U(\mathbf{h}'_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) - \lim_T (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) = +\infty,$$

gdzie $\mathbf{h}'_t = \mathbf{h}^1(\mathbf{k}'_t, \mathbf{k}'_{t+1}, \mathbf{x}'_t, \mathbf{x}'_{t+1})$, $\mathbf{h}_t = \mathbf{h}^1(\mathbf{k}_t, \mathbf{k}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1})$, gdyż dla procesu dobrego $\lim_T (U(\bar{\mathbf{h}}) - U(\mathbf{h}_t)) \in \mathbf{R}$, a dla procesu, który nie jest dobry $\lim_T (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) = -\infty$. Zatem jeśli proces optymalny istnieje przy początkowych nakładach produktywnych (lub prowadzących do nakładów produktywnych), to jest dobry.

**TWIERDZENIE 1.** *Jeśli para nakładów początkowych* $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) \geqslant \mathbf{0}$ *jest produktywna, to istnieje proces* $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0, \infty)$*-optymalny w sensie definicji* 4.

**Dowód.** Z komentarza poprzedzającego twierdzenie wynika, że wystarczy ograniczyć się do procesów dobrych. Ponieważ nakłady początkowe są produktywne, to istnieje $\bar{s} \in \mathbf{R}: \Gamma_{\bar{s}}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) \neq \emptyset$. Z lematu 5 wynika, że istnieje liczba

$$\bar{U} := \sup_{\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)} \limsup_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})),$$

przy czym

$$\bar{U} = \sup_{\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)} \lim_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})).$$

Z definicji zbiorów $\Gamma_s(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ i liczby $\bar{U}$ wynika, że

$$\forall s > \bar{U}: \Gamma_s(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) = \emptyset.$$

Ponieważ

$$s \geqslant s' \Rightarrow \Gamma_s(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) \subset \Gamma_{s'}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$$

---

[6] Zob. komentarz po lemacie 1.

i zbiory $\Gamma_s(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ są zwarte (lemat 8), więc – na podstawie twierdzenia Cantora – zbiór

$$\overline{\Gamma_F(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)} := \bigcap_{\bar{s}<s<\bar{U}} \Gamma_s(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$$

jest zbiorem niepustym.

Wykażemy, że każdy element zbioru $\overline{\Gamma_F(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)}$ jest procesem optymalnym. Załóżmy, że $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \overline{\Gamma_F(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)}$. Wtedy, na podstawie definicji zbioru $\overline{\Gamma_F(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)}$, zachodzi, że

$$\lim_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) = \bar{U}$$

i dla każdego procesu $\{\mathbf{k}'_t, \mathbf{x}'_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$:

$$\limsup_T \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}'_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \leqslant \bar{U}.$$

Ponieważ $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty}$ jest procesem dobrym, więc aby orzec o jego optymalności, wystarczy porównać go z innymi procesami dobrymi. Załóżmy zatem, że $\{\mathbf{k}'_t, \mathbf{x}'_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ jest procesem dobrym. Z lematu 7 wynika, że

$$\limsup_T \left( \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}'_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \right) = \limsup_T \left( \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}'_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) - (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \right) =$$

$$= \lim_T \left( \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}'_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) - (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \right) =$$

$$= \lim_T \left( \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}'_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \right) =$$

$$= \lim_T \left( \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \right) \leqslant 0.$$

Ostatnia nierówność dowodzi optymalności dowolnego procesu ze zbioru $\overline{\Gamma_F(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)}$.

**TWIERDZENIE 2** (bardzo silne twierdzenie o magistrali). *Niech para nakładów początkowych* $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) \geqslant \mathbf{0}$ *będzie produktywna. Jeśli proces* $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ *jest optymalny i istnieje taka liczba* $t'$, *że* $(\mathbf{k}_{t'}, \mathbf{x}_{t'}) = (\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}})$, *to* $\forall t \geqslant t'$:

$$(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_{t'}) = (\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}}).$$

**Dowód.** Bez utraty ogólności załóżmy, że $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) = (\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}})$. Dopuszczalny jest zatem proces stacjonarny

$$\{\mathbf{k}'_t, \mathbf{x}'_t\}_{t=0}^{+\infty} : (\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t) = (\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}}), \qquad t = 0, 1, \ldots$$

Na podstawie lematu 4 dla każdego $T$ zachodzi

$$\sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\mathbf{h}'_t)) = \sum_{t=0}^{T} (U(\mathbf{h}_t) - U(\bar{\mathbf{h}})) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{T+1}) + \beta \mathbf{p} \cdot \mathbf{SD}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{T+1}) + \sum_{t=0}^{T} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{h}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_{t+1}) - \bar{\mathbf{h}})$$

dla dowolnego procesu $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$. Jeśli proces $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ nie jest dobry, to $\limsup_T$ lewej strony równania wynosi $-\infty$. Jeśli z kolei proces $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ jest dobry, to $\mathbf{k}_t \xrightarrow{t} \bar{\mathbf{k}}$, $\mathbf{x}_t \xrightarrow{t} \bar{\mathbf{x}}$ i wartość bezwzględna wyrażenia

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{T+1}) + \beta \mathbf{p} \cdot \mathbf{SD}^{-1}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{T+1})$$

może być dowolnie mała, przy odpowiednio dużym $T$.

Ponieważ

$$\sum_{t=0}^{T} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{h}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_{t+1}) - \bar{\mathbf{h}}) \leqslant 0$$

dla dowolnego $T$, przy czym nierówność jest ostra, jeśli dla choć jednego okresu $t$ jest $\mathbf{k}_t \neq \bar{\mathbf{k}}$ lub $\mathbf{x}_{t+1} \neq \bar{\mathbf{x}}$ (lemat 2), zatem proces stacjonarny jest optymalny. Jeśli proces $\{\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Gamma_F^{\infty}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0)$ jest optymalny, ale nie jest stacjonarny, to istnieje liczba $\varepsilon > 0$ oraz $T_\varepsilon$, takie że $\forall T \geqslant T_\varepsilon$:

$$\sum_{t=0}^{T}(U(\mathbf{h}_t)-U(\mathbf{h}'_t))=\sum_{t=0}^{T}(U(\mathbf{h}_t)-U(\bar{\mathbf{h}}))<-\varepsilon,$$

co jest równoważne temu, że dla każdego $T\geqslant T_\varepsilon$:

$$\sum_{t=0}^{T}(U(\mathbf{h}'_t)-U(\mathbf{h}_t))=\sum_{t=0}^{T}(U(\bar{\mathbf{h}})-U(\mathbf{h}_t))>\varepsilon.$$

Ostatnia nierówność przeczy optymalności procesu niestacjonarnego.

## Podsumowanie

W pracy wykazano „bardzo silną" wersję twierdzenia o magistrali w modelu typu Leontiefa-Gale'a z nieodwracalnymi inwestycjami, Twierdzenie stanowi, że jeśli optymalny proces wzrostu w horyzoncie nieskończonym osiągnie kiedykolwiek magistralę, to pozostanie na niej na zawsze. Ponadto wykazano twierdzenie o istnieniu optymalnych trajektorii wzrostu w horyzoncie nieskończonym.

## Literatura

[1] Brock W., *Existence of Weakly Maximal Programs*, Review of Economic Studies, 28, 1961

[2] Gale D., *On Optimal Development in a Multi-sector Economy*, Review of Economic Studies 34, 1967

[3] Maćkowiak P., *Efekt magistrali w uogólnionym modelu Leontiefa-Gale'a*, w: *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych*, red. A. Welfe, SGH, Warszawa 2002

[4] Maćkowiak P., *„Silna" wersja twierdzenia o magistrali w wielosektorowym modelu wzrostu optymalnego typu Leontiefa-Gale'a*, w: *Matematyka w ekonomii*, red. E. Panek, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2004

[5] McKenzie L., *Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comparative Dynamics*, w: *Handbook of Mathematical Economics* vol. 3, eds K. Arrow, M. Intriligator, Elsevier Science Publishers B. V., 1986

[6] McKenzie L., *Turnpike Theory*, Econometrica, 43, 1976

[7] Panek E., *Ekonomia Matematyczna*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2000

## A „VERY STRONG" TURNPIKE THEOREM IN A MULTISECTORAL MODEL OF THE LEONTIEF-GALE TYPE

**Summary**

A very strong version of turnpike theorem for a model of Leontief-Gale type with irreversible investments is proven. The theorem states that whenever turnpike (the best stationary state) is achieved at a time by an optimal process then the process keeps running at the turnpike forever. Moreover a new method of proof of existence of optimal processes is given.