Wojciech SIKORA
Katedra Badań Operacyjnych
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

ALGORYTM INDEKSOWY DLA ZAGADNIENIA ROZDZIAŁU Z KRYTERIUM DOCHODU

Wstęp

Przegląd ciekawych i ważnych w praktyce zagadnień sprowadzalnych do klasycznego problemu rozdziału zawiera praca Golsztejna, Judina ([3], rozdz. 2). W tej samej pracy, ale w rozdziale 7, podano metodę rozwiązywania klasycznego zagadnienia rozdziału, opartą na idei metody potencjałów. W pracy W. Sikory [7] przedstawiono inny algorytm rozwiązywania zagadnienia rozdziału oparty na idei drzewa poprawy. Klasyczną postać zagadnienia rozdziału podaje także Buga, Nykowski ([1], punkt 7.6).

W niniejszym artykule omówimy nową wersję zagadnienia rozdziału, będącą uogólnieniem problemu pośrednika (por. [6]). Wykażemy, że problem ten można efektywnie rozwiązywać, wykorzystując ideę drzewa poprawy i stosując indeksowy zapis bazy, rozwiązania bazowego, schematu poprawy oraz zmiennych dualnych. Indeksowy zapis bazy w nieco innej postaci dla zamkniętego zagadnienia transportowego (ZZT) zaproponował Dubnicki [2]. Wykorzystano to podejście także dla zadań nieliniowych [4].

1. Zagadnienie rozdziału z kryterium dochodu

Zakładamy, że mamy n produktów, które mogą być wytwarzane w m miejscach produkcji przy użyciu jednego, podstawowego środka produkcji. Znamy możliwości produkcyjne (podaż środka) w każdym miejscu

produkcji oraz maksymalne zapotrzebowanie (popyt) na każdy produkt. Tym podstawowym środkiem może być ziemia, magazyn, pracownik, maszyna lub zespół jednorodnych maszyn. Dysponowanym zasobem środka będzie odpowiednio obszar ziemi, powierzchnia magazynu, liczba pracowników, czas pracy maszyn lub liczba maszyn.

Dopuszczamy, że każdy produkt może być wytwarzany w dowolnym miejscu produkcji. Znamy, dla każdego produktu i miejsca produkcji, koszt wytwarzania oraz wydajności (np.: koszt uprawy 1 ha pszenicy oraz jej plon w i-tym gospodarstwie). Wiemy, jaka jest cena zakupu w i-tym miejscu jednostki środka oraz jaka jest cena sprzedaży jednostki każdego produktu. Ilość środka zakupiona nie może przekroczyć podaży, a ilość produktu sprzedana nie może przekroczyć popytu.

Należy ustalić taki plan zakupu środka, wytworzenia produktów oraz ich sprzedaży, aby dochód osiągnięty przez firmę był maksymalny.

$$\begin{aligned}\text{Dochód firmy} = {} & \text{przychód ze sprzedaży produktów} - \\ & - \text{koszt ich wytworzenia} - \\ & - \text{koszt zakupu środka podstawowego.}\end{aligned}$$

Zakładamy, że kupujemy (dzierżawimy) tyle środka, ile potrzebujemy, a ponadto wszystko co wyprodukujemy, zostanie sprzedane.

Oznaczmy przez:

a_i – zasób środka (podaż) w i-tym miejscu,
b_j – maksymalne zapotrzebowanie (popyt) na j-ty produkt,
k_i – cena zakupu jednostki środka w i-tym punkcie,
p_j – cena sprzedaży j-tego produktu,
c_{ij} – koszt korzystania z jednostki środka w i-tym miejscu przy produkcji j-tego produktu,
w_{ij} – ilość j-tego produktu uzyskana w i-tym miejscu z jednostki środka (jego wydajność),
x_{ij} – ilość środka w i-tym miejscu przydzielona do produkcji j-tego produktu,
x_i – ilość środka zakupiona w i-tym miejscu,
y_j – wielkość sprzedaży j-tego produktu.

Model matematyczny tej wersji zagadnienia rozdziału sprowadza się do następującego zadania: znajdź takie wartości zmiennych x_{ij}, x_i, y_j, aby

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \sum_{i=1}^{m} k_i x_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i \leqslant a_i \qquad (i=1, \ldots, m), \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_{ij} x_{ij} = y_j \leqslant b_j \qquad (j=1, \ldots, n), \tag{3}$$

$$x_i, x_{ij}, y_j \geqslant 0 \qquad (i=1, \ldots, m,\ j=1, \ldots, n). \tag{4}$$

Model (1)-(4) oznaczamy jako zadanie *W*. Jest to zadanie programowania liniowego (PL), ale w tej postaci trudne do rozwiązania metodami specjalnymi, opartymi na uogólnieniu metody potencjałów (por. [5], [6]).

Zapiszmy zadanie *W* w równoważnej postaci: znajdź takie x_{ij}, aby

$$\sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} d_{ij} x_{ij} \Rightarrow \max, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \qquad (i=1, \ldots, m), \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} w_{ij} x_{ij} = b_j \qquad (j=1, \ldots, n), \tag{7}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (i=1, \ldots, m+1,\ j=1, \ldots, n+1), \tag{8}$$

gdzie:

$$d_{ij} = p_j w_{ij} - k_i - c_{ij} \qquad (i=1, \ldots, m,\ j=1, \ldots, n),$$

$$x_{i,n+1} = a_i - x_i \qquad (i=1, \ldots, m),$$

$$d_{i,n+1} = 0 \qquad (i=1, \ldots, m),$$

$$w_{i,n+1} = 1 \qquad (i=1, \ldots, m),$$

$$x_{m+1,j} = b_j - y_j \qquad (j=1, \ldots, n),$$

$$d_{m+1,j} = 0 \qquad (j=1, \ldots, n),$$

$$w_{m+1,j} = 1 \qquad (j=1, \ldots, n).$$

Model (5)-(8) oznaczmy jako zadanie P. W zadaniu tym poszczególne wielkości definiujemy następująco:

d_{ij} – dochód uzyskany z jednostki środka w *i*-tym miejscu przy produkcji *j*-tego produktu,

$x_{i,n+1}$ – niewykorzystana podaż środka w i-tym miejscu,
$x_{m+1,j}$ – niewykorzystany popyt na j-ty produkt.

W wierszu dodatkowym $(m+1)$ oraz kolumnie dodatkowej $(n+1)$ dochody są zerowe, a wydajność umownie przyjmujemy na poziomie 1.

Zadanie dualne do zadania P ma następującą postać: znajdź takie zmienne α_i, β_j, aby

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j \Rightarrow \min, \tag{9}$$

$$\alpha_i + w_{ij}\beta_j \geqslant d_{ij} \quad (i=1, ..., m,\ j=1, ..., n), \tag{10}$$

$$\alpha_i,\ \beta_j \geqslant 0 \quad (i=1, ..., m,\ j=1, ..., n). \tag{11}$$

Optymalne wartości zmiennych dualnych podają istotne informacje:
α_i – mówi nam, o ile wzrośnie (spadnie) łączny dochód, jeżeli zwiększymy (zmniejszymy) podaż środka w i-tym miejscu o jednostkę;
β_j – mówi nam, o ile wzrośnie (spadnie) łączny dochód, jeżeli zwiększymy (zmniejszymy) popyt na j-ty produkt o jednostkę.

Te informacje są prawdziwe (dokładne), jeżeli zmiany podaży lub popytu mieszczą się w dopuszczalnych granicach.

Jeżeli wprowadzimy dodatkowe dwie zmienne dualne

$$\alpha_{m+1} = \beta_{n+1} = 0,$$

to warunki optymalności rozwiązania bazowego zadania P można zapisać w postaci

$$\alpha_i + w_{ij}\beta_j = d_{ij}, \quad \langle i, j\rangle \in B, \tag{12}$$

$$\alpha_i + w_{ij}\beta_j \geqslant d_{ij}, \quad \langle i, j\rangle \in N, \tag{13}$$

gdzie:
B – zbiór zmiennych (pól) bazowych,
N – zbiór zmiennych (pól) niebazowych.

Macierz przydziałów X ma wymiar $(m+1)\times(n+1)$, a każde pole przydziału jest identyfikowane przez parę $\langle i, j\rangle$. Para $\langle m+1, n+1\rangle$ jest w naszych rozważaniach pomijana.

2. Indeksowy zapis bazy i generowanie drzewa poprawy

Idea algorytmu indeksowego jest podobna do idei algorytmu generujących ścieżek (por. [7]). Jak wszystkie algorytmy, należące do klasy uogólnień metody potencjałów, składa się ona z trzech procedur:

- procedury wyznaczania rozwiązania wyjściowego,
- procedury sprawdzania optymalności rozwiązania,
- procedury zmiany (poprawy) rozwiązania, o ile nie jest ono optymalne.

W zadaniu rozdziału P szczególnie istotna jest ta ostatnia procedura. Zadanie P ma $m+n$ zmiennych bazowych. Pole $\langle i, j\rangle$ związane ze zmienną bazową x_{ij} nazywamy polem bazowym, pozostałe pola związane ze zmiennymi niebazowymi nazywamy polami niebazowymi. Zbiór pól bazowych nazywamy zbiorem bazowym lub krótko bazą.

Zadanie P ma wymiar $(m+1)\times(n+1)$. Oznaczmy przez I zbiór numerów wierszy, a przez J zbiór numerów kolumn.

$$I=\{1, 2, ..., i, ..., m+1\}, \qquad J=\{1, 2, ..., j, ..., n+1\}.$$

Podzbiór B iloczynu kartezjańskiego $I\times J$ jest bazą (zbiorem bazowym), jeżeli spełnia następujące warunki:

- zawiera dokładnie $m+n$ elementów,
- zawiera co najmniej jeden element każdego wiersza i każdej kolumny,
- nie zawiera elementu $\langle m+1, n+1\rangle$.

Ponieważ do bazy B należy $n+m$ elementów, z których każdy jest parą liczb naturalnych, więc dla zapamiętania tego zbioru wystarczy użyć tzw. N-tablicy, która składa się z dwóch wektorów $(m+n)$-wymiarowych. Oznaczmy je odpowiednio symbolem NW i NK. Jeżeli elementy bazy B odpowiednio uporządkujemy, to można je zapisać oszczędniej w postaci tzw. S-tablicy, składającej się z dwóch wektorów: m-wymiarowego wektora K i n-wymiarowego wektora W.

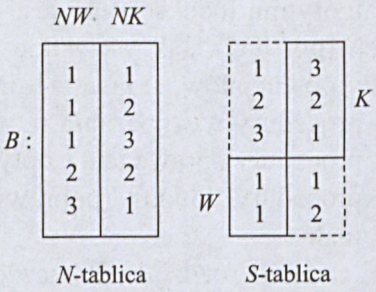
Rozważmy zadanie rozdziału P o wymiarach (4×3). Tabela 1 przedstawia jego przykładowe rozwiązanie bazowe, dopuszczalne.

Bazę B dla tego rozwiązania zapisano na rysunku 1 w postaci N-tablicy i S-tablicy. S-tablicę otrzymujemy w wyniku przyporządkowania każdego elementu do określonego wiersza (poza ostatnim) bądź określonej kolumny (poza ostatnią).

Aby poprawić rozwiązanie bazowe, ustalamy tzw. pole centralne $\langle k, l\rangle$, które włączymy do nowego rozwiązania bazowego B'. Zbiór $\bar{B}=B\cup\langle k, l\rangle$ nazywamy nadbazą. Chcąc ją uwzględnić, rozszerzmy

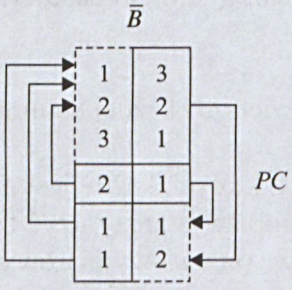
Tabela 1

a_i \ b_j	9	9	–
4	2/1 **1**	3/2 **1,5**	0/1 **1,5**
2	2/3	1/3 **2**	0/1
4	5/2 **4**	1/1	0/1
–	10/1	10/1	

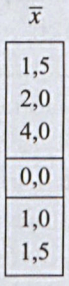


Rys. 1

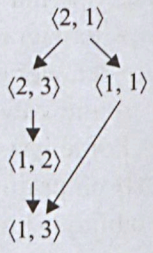
S-tablicę o dodatkowy wektor dwuwymiarowy PC. Jeżeli przyjmiemy, że pole centralne $\langle k, l\rangle = \langle 2, 1\rangle$, to zbiór $\bar{B}$ w postaci S-tablicy zawiera rysunek 2.



Rys. 2. S-tablica



Rys. 3. $\bar{x}$ -tablica



Rys. 4. Drzewo poprawy

Także samo rozwiązanie bazowe zamiast w postaci macierzy X o wymiarach $(m+1)\times(n+1)$ możemy zapisać w postaci $(m+n+1)$-wymiarowego wektora $\bar{x}$, w którym na pozycji $m+1$ (PC) znajduje się wartość zerowa zmiennej $\langle k, l\rangle$ (zob. rysunek 3, dla analizowanego przykładu).

S-tablicę wykorzystujemy nie tylko do oszczędnego zapisu bazy B, ale także do wyznaczania w zbiorze $\bar{B}$ drzewa poprawy, czyli podania pól, na których będziemy zmieniali wartości zmiennych. Drzewo poprawy z korzeniem $\langle k, l\rangle = \langle 2, 1\rangle$ łatwo ustalić, odwołując się do zadanych adresów na przemian w wektorze K i W (liczba w wektorze K wskazuje adres

w wektorze W i odwrotnie). Proces tworzenia rozpoczyna się w wektorze PC, ponieważ są dwie współrzędne, idziemy do numeru wiersza (w górę) lub do numeru kolumny (w dół).

Drzewo poprawy dla naszego przykładu zawiera rysunek 4. Ogólnie ma ono co najwyżej dwie gałęzie (ścieżki), a każda ścieżka kończy się, jeżeli w wektorze K natrafimy na liczbę $n+1$ lub w wektorze W na liczbę $m+1$. Proces generowania ścieżek kończymy także, gdy stwierdzamy, że zawierają one cykl, czyli dochodzimy do pola, przez które już raz przechodziliśmy w ramach danej ścieżki.

Jeżeli pole centralne znajduje się w ostatnim wierszu lub kolumnie, to drzewo ma jedną ścieżkę.

3. Procedura wyznaczania rozwiązania wyjściowego

Istnieje wiele sposobów wyznaczania rozwiązania wyjściowego zadania P, które musi być dopuszczalne i bazowe (por. [7]). Możemy je podzielić na:

- dochodowe,
- niedochodowe.

W niniejszej pracy zajmiemy się tylko dwiema metodami dochodowymi:

- metodą maksymalnego dochodu (*MMD*),
- metodą maksymalnego ilorazu (*MMI*).

Metoda maksymalnego dochodu polega na tym, iż w macierzy dochodów $D=[d_{ij}]$ spośród pól dopuszczalnych wybieramy pole o maksymalnym dochodzie.

W metodzie maksymalnego ilorazu, dla każdego pola $\langle i, j\rangle$ ustalamy iloraz

$$r_{ij}=\frac{d_{ij}}{w_{ij}} \qquad (i=1, \ldots, m,\ j=1, \ldots, n). \tag{14}$$

Spośród pól dopuszczalnych wybieramy pole o maksymalnym ilorazie (dochodzie uzyskanym z wytworzenia jednostki produktu).

Schemat postępowania przy wyznaczaniu rozwiązania wyjściowego zadania P jest w obu wypadkach identyczny i sprowadza się do realizacji następujących kroków:

- w macierzy dochodów D (w macierzy ilorazów R) szukamy maksymalnego elementu,
- dla wybranego pola ustalamy maksymalny przydział

$$x_{ij}=\min\left\{a'_i, \frac{b'_j}{w_{ij}}\right\}, \tag{15}$$

- aktualizujemy podaż środka w i-tym wierszu i popyt w j-tej kolumnie,
- wykreślamy w macierzy D (R) wiersz bądź kolumnę, jeżeli zeruje się podaż bądź popyt,
- wybrane pole i ustaloną wartość zmiennej bazowej zapisujemy w odpowiedniej pozycji S-tablicy i x-tablicy,
- w zredukowanej macierzy D (R) powtarzamy powyższe kroki tak długo, aż wykreślimy wszystkie wiersze i kolumny (poza wierszem i kolumną dodatkową, dla których można przyjąć ujednolicony zapis, iż podaż i popyt są nieograniczone, czyli równe ∞).

Jeżeli zeruje się jednocześnie podaż i popyt, to wykreślamy kolumnę. Wystąpi wówczas degeneracja rozwiązania bazowego. Postępując w ten sposób, każdemu wierszowi i każdej kolumnie (poza wierszem i kolumną dodatkową) przypiszemy jedno pole bazowe i zmienną bazową, co umożliwia indeksowy zapis bazy i rozwiązania bazowego w oszczędnej postaci S i x-tablicy.

4. Procedura sprawdzania optymalności rozwiązania

Najpierw wyznaczamy wartości zmiennych dualnych, spełniających warunek

$$\alpha_i + \beta_j w_{ij} = d_{ij}, \qquad \langle i, j \rangle \in B. \tag{16}$$

Jeżeli baza rozwiązania X nie zawiera cyklu, to rekurencyjnie łatwo obliczyć α_i i β_j, korzystając z tego, że $\alpha_{m+1} = \beta_{n+1} = 0$.

Jeżeli baza zawiera cykl, to wartość zmiennych α_i i β_j z nim związane ustalamy w dwóch fazach:

- Faza I – niech α_q będzie pierwszą zmienną związaną z cyklem. Kolejne β_j i α_i z nim związane ustalamy rekurencyjnie jako funkcje zmiennej dualnej α_q.
- Faza II – po ustaleniu α_q obliczamy wartości pozostałych zmiennych dualnych związanych z danym cyklem.

Wartość zmiennych α_i, β_j niezwiązanych z cyklem ustalamy następnie rekurencyjnie.

Znając wartości zmiennych dualnych, obliczamy wskaźniki optymalności

$$\Delta_{ij} = d_{ij} - \alpha_i - \beta_j w_{ij}. \tag{17}$$

Jeżeli dla każdego pola $\langle i, j\rangle \in N$

$$\Delta_{ij} \leqslant 0, \tag{18}$$

to rozwiązanie bazowe jest optymalne.

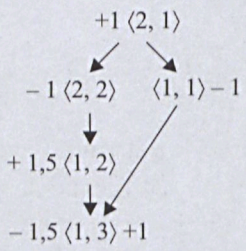
5. Procedura poprawy rozwiązania

Gdy warunek (18) nie jest spełniony, to rozwiązanie bazowe X nie jest optymalne i musimy je poprawić. Wśród pól należących do zbioru N szukamy pola centralnego $\langle k, l\rangle$, dla którego wskaźnik optymalności

$$\Delta_{k,l} = \max\{\Delta_{ij} | \langle i, j\rangle \in N\}. \tag{19}$$

Samo wygenerowane drzewo poprawy z korzeniem $\langle k, l\rangle$ nie wystarcza do poprawy rozwiązania. Wiemy bowiem, gdzie zmieniać wartości zmiennych, na jakich polach należących do nadbazy $\bar{B}$, ale nie wiemy o ile.

Jeżeli ocechujemy korzeń znakiem „+1", a kolejne pola parzyste ścieżki znakiem „−", nieparzyste znakiem „+" wraz z odpowiednim współczynnikiem zmiany tak, aby suma dwóch kolejnych zmian w wierszu się zerowała, suma ważona dwóch kolejnych zmian w kolumnie także dawała zero, to otrzymuje się jednostkowy schemat zmian. Schemat ten można zapisać w postaci tzw. Z-tablicy o wymiarach $(m+1) \times (n+1)$ albo w postaci skróconej, wykorzystując zapis indeksowy w formie z-tablicy, będącej $(m+1+n)$-wymiarowym wektorem.



Rys. 5. Drzewo poprawy z cechami

− 1	+ 1,5	− 0,5
+ 1	− 1	

Rys. 6. Z-tablica

− 0,5 − 1
+ 1
− 1 − 1,5

Rys. 7. z-tablica

Dla naszego przykładu przedstawiono je na rysunkach 5-7. Jeżeli pole miało dwie cechy, gdyż należało do dwóch ścieżek, to w tablicach umieszczamy ich sumę.

W praktyce z-tablicę można tworzyć bezpośrednio na podstawie S-tablicy nadbazy $\bar{B}$. Jeżeli drzewo poprawy G zawiera dwie ścieżki, wymaga to utworzenia dwóch wstępnych $(m+1+n)$-wymiarowych wektorów z^1 oraz z^2. Ich suma daje z-tablicę.

Znacznie bardziej złożona sytuacja powstaje, jeżeli drzewo poprawy zawiera cykl. Wówczas proces cechowania z^1-tablicy kończymy, gdy dochodzimy do pola wymagającego ponownej cechy. Pole to nazywamy polem otwierającym cykl i od tego pola rozpoczynamy proces cechowania w pomocniczej c^1-tablicy.

Proces cechowania w c^1-tablicy kończymy, gdy ponownie dochodzimy do pola otwierającego. Pole, ma którym kończymy proces cechowania c^1-tablicy nazywamy polem zamykającym cykl C_1.

W przypadku wystąpienia cyklu, obydwa wektory z^1 i c^1 wykazują nierównowagę u_1 i u'_1. Nierównowaga u_1 jest równa cesze pola zamykającego ścieżkę G_1, a nierównowaga u'_1 jest równa ważonej sumie cech pola otwierającego i zamykającego cykl C_1. z-tablicę ustalamy na podstawie wektorów z^1 i c^1 według następującego wzoru:

$$z_p = z_p^1 + c_p^1 w_1 \qquad p = 1, \ldots, m+1+n, \tag{20}$$

gdzie współczynnik korygujący obliczamy z:

$$w_1 = \frac{u_1}{-u'_1}. \tag{21}$$

Ogólnie można wyróżnić pięć przypadków:
- drzewo zawiera jedną ścieżkę prostą,
- drzewo zawiera dwie ścieżki proste,
- drzewo zawiera tylko jedną ścieżkę z cyklem,
- drzewo zawiera jedną ścieżkę prostą i jedną ścieżkę z cyklem,
- drzewo zawiera dwie ścieżki, obydwie z cyklami.

W przypadku najogólniejszym, gdy drzewo poprawy ma dwie ścieżki i obydwie zawierają cykle, aby ustalić z-tablicę tworzymy dla każdej ścieżki wektory początkowe z^1 i z^2, a dla każdego cyklu wektory pomocnicze c^1 i c^2. Dla każdej ścieżki liczymy współczynniki korygujące

$$w_1 = \frac{u_1}{-u'_1}, \qquad w_2 = \frac{u_2}{-u'_2}, \tag{22}$$

a końcową z-tablicę ustalamy następująco:

$$z_p = z_p^1 + c_p^1 \cdot w_1 + z_p^2 + c_p^2 \cdot w_2, \qquad p = 1, \ldots, m+1+n. \tag{23}$$

Tworząc drugą ścieżkę, nie cechujemy po raz drugi pola $\langle k, l \rangle$, które jest korzeniem drzewa poprawy.

Oznaczmy przez:

G^- – zbiór pól, dla których współczynnik zmiany jest ujemny,

Δx – wskaźnik krotności zmiany, który ustalamy następująco:

$$\Delta x = \min \left\{ \frac{x_p}{z_p} \,\middle|\, p \in G^- \right\}. \tag{24}$$

Nowe rozwiązanie bazowe X', w zapisie indeksowym to wektor $(m+1+n)$-wymiarowy x', ustalamy według wzoru

$$x'_p = x_p + \Delta x \cdot z_p, \qquad p = 1, \ldots, m+1+n. \tag{25}$$

6. Przykład liczbowy

Załóżmy, że rolnik w trzech miejscach może wydzierżawić łącznie 11 ha ziemi, na której zamierza uprawiać dwie rośliny: pszenicę i kukurydzę. W tabeli 2 podano obszar ziemi w każdym punkcie (w ha), maksymalny popyt na obydwie rośliny (w t), koszt dzierżawy 1 ha w każdym punkcie (w tys. zł), cenę sprzedaży 1 t zboża (w tys. zł) oraz koszt uprawy 1 ha każdej rośliny w poszczególnych punktach (w tys. zł) oraz wydajność (w tonach z 1 hektara).

Należy ustalić taki plan dzierżawy ziemi, zasiewu obydwu roślin i sprzedaży zboża, aby łączny dochód rolnika był maksymalny.

Tabela 2

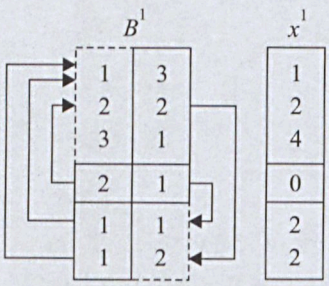
a_i \ b_j	10	12	k_i
5	4/1	11/2	6
2	4/1	31/4	5
4	15/2	2/1	4
p_i	12	10	

Tabela 3

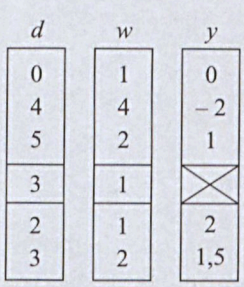
a_i \ b_j	10	12	∞	
5	2/1 **4**	3/2 **3**	0/1 **5**	5
2	3/1	4/4 **2**	0/1	2
4	5/2 **1**	4/1	0/1	1
∞	0/1	0/1		
	4	**3**		

Aby zapisać przykład w postaci zadania P, musimy ustalić macierz dochodów D zgodnie z podanym wzorem. Zawiera ją tabela 3. W tabeli tej w każdym polu, w lewym górnym rogu, pierwsza liczba określa dochód, a druga – wydajność.

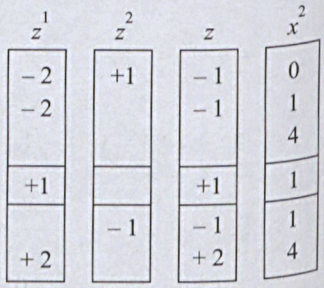
Rozwiązanie wyjściowe wyznaczamy, stosując metodę *MMD*. W tabeli 3 zaznaczono (w prawym, dolnym rogu) w jakiej kolejności wybieramy poszczególne pola do bazy oraz w jakiej kolejności dana kolumna lub wiersz zostaje wykreślony z macierzy D, gdyż zeruje się popyt lub podaż. Stosując zapis indeksowy, bazę B^1 i rozwiązanie bazowe X^1 przedstawiamy w postaci s-tablicy i x-tablicy na rysunku 8.



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Zapiszemy w tej samej konwencji, w postaci wektorów d i w, dochody i wydajności związane z polami bazowymi. Następnie w odwrotnej kolejności niż zostały wykreślone wiersze lub kolumny ustalamy zmienne dualne z nimi związane

$$\alpha_1 = c_{13} - \beta_3 \cdot w_{13} = 0 - 0 \cdot 1 = 0,$$

$$\beta_1 = \frac{c_{11} - \alpha_1}{w_{11}} = \frac{2-0}{1} = 2,$$

$$\beta_2 = \frac{c_{12} - \alpha_1}{w_{12}} = \frac{3-0}{2} = 1{,}5,$$

$$\alpha_2 = c_{22} - \beta_2 \cdot w_{22} = 4 - 1{,}5 \cdot 4 = -2,$$

$$\alpha_3 = c_{31} - \beta_1 \cdot w_{31} = 5 - 2 \cdot 2 = 1.$$

Ustalone wartości zmiennych dualnych także zapisujemy w postaci wektora y na rysunku 9. Znając wartości zmiennych dualnych, możemy

wyznaczyć wskaźniki kryterium optymalności Δ_{ij}. Wystarcza, że zapamiętamy maksymalną jej wartość. Dla rozwiązania X^1:

$$\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{21} = 3,$$

czyli rozwiązanie nie jest optymalne, a polem centralnym jest pole $\langle 2, 1\rangle$. Zapisujemy ten fakt w polu PC wektora $\bar{B}^1$.

Tworzymy obecnie schemat poprawy rozwiązania, korzystając z indeksowego zapisu nadbazy $\bar{B}^1$. Dokonujemy cechowania pierwszej ścieżki i cechy zapisujemy w postaci z^1-tablicy na rysunku 10. Cechujemy następnie drugą ścieżkę i zapisujemy to w postaci z^2-tablicy na rysunku 10. Obydwa cechowania kończą się w kolumnie dodatkowej $(n+1)$, więc ścieżki są ścieżkami prostymi, a sam schemat zmian (z-tablica na rysunku 10) jest zbilansowana.

Ustalamy wskaźnik krotności

$$\Delta x = \min\{1/1,2/1,2/1\} = 1$$

i zgodnie ze wzorem (25) wyznaczamy nowe rozwiązanie X^2 zapisane w postaci x^2-tablicy na rysunku 10.

Z bazy B^1 usuwamy pole $\langle 1, 3\rangle$, a w to miejsce wchodzi pole centralne $\langle 2, 1\rangle$. Dokonujemy więc odpowiednich przesunięć w nowej bazie B^2 i wektorze x^2 (por. rys. 11).

W nowym układzie bazy zapisujemy także wektor dochodów d i wektor wydajności w (por. rys. 12). Ponieważ w bazie B^2 nie ma pola dodatkowego, więc jest to sygnał, iż baza B^2 zawiera cykl: $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$. W fazie I ustalamy, że

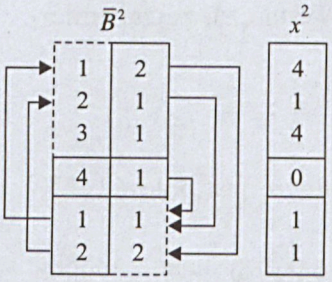
$$\beta_1 = 2 - \alpha_1, \qquad \alpha_2 = 1 + \alpha_1,$$
$$\beta_2 = 0{,}75 - 0{,}25\alpha_1, \qquad \alpha_1 = 1{,}5 + 0{,}5\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 3.$$

Rozwiązując ostatnie równanie, obliczamy α_1, a następnie wartości pozostałych zmiennych dualnych (por. wektor y na rysunku 12).

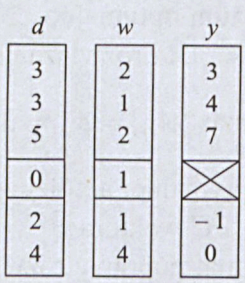
Ponieważ.

$$\max\{\Delta_{ij} | \langle i, j\rangle \in N\} = \Delta_{4,1} = 1,$$

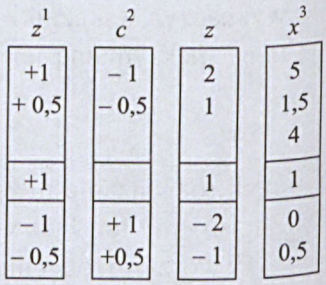
więc rozwiązanie X^2 nie jest optymalne. Polem centralnym jest pole $\langle 4, 1\rangle$. Znajduje się ono w wierszu dodatkowym, więc drzewo poprawy ma tylko jedną ścieżkę, która może zawierać cykl. Cechujemy, korzystając z nadbazy



Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13

$\bar{B}^2$ kolejne pola (zawiera je wektor z^1 na rysunku 13). Ponieważ ścieżka G^1 zawiera cykl, z polem otwierającym $\langle 1, 1\rangle$, więc ponownie cechujemy pola tworzące cykl C^1. Zapisujemy te cechy w wektorze c^1 na rysunku 13. Ustalamy nierównowagi

$$u_1 = 0{,}5 \qquad u_1' = 0{,}5,$$

więc wskaźnik korygujący

$$w_1 = \frac{0{,}5}{-0{,}5} = -1.$$

Stosując wzór (20), ustalamy schemat ostateczny poprawy rozwiązania w postaci z-tablicy na rysunku 13.

Wyznaczamy następnie współczynnik krotności

$$\Delta x = \min\{1/2, 1/1\} = 0{,}5$$

i nowe rozwiązanie bazowe X^3 w postaci wektora x^3 na rysunku 13.

Rozwiązanie X^3 jest rozwiązaniem optymalnym, a wartości funkcji celu, czyli dochody dla kolejnych rozwiązań wynoszą:

$$f(X^1) = 4 + 6 + 2 + 20 = 38,$$
$$f(X^2) = 38 + 3 \cdot 1 = 41,$$
$$f(X^3) = 41 + 1 \cdot 0{,}5 = 41{,}4.$$

Podsumowanie

Algorytm indeksowy nie jest wygodnym narzędziem, jeżeli rozwiązujemy ręcznie niewielkie zadanie P. W tym wypadku lepiej stosować tradycyjny zapis w postaci prostokątnych macierzy X, D, W, natomiast w postaci indeksowej zapisywać tylko samą bazę, co ułatwia tworzenie drzewa poprawy oraz schematu poprawy (por. [7]).

Zapis indeksowy bazy, rozwiązania bazowego i schematu poprawy bardzo ułatwia oprogramowanie samej procedury rozwiązania zadania P i innych zagadnień o podobnej strukturze. Algorytm indeksowy staje się wówczas efektywnym narzędziem rozwiązywania różnych zagadnień rozdziału.

Literatura

[1] Buga J., Nykowski I., *Zadania transportowe w programowaniu liniowym*, PWN, Warszawa 1972.
[2] Dubnicki W., *Zapis bazy w zagadnieniu transportowym*, Przegląd Statystyczny, R. 35, 1988, z. 2.
[3] Golstejn E. G, Judin D. B., *Zadaczi liniejnogo programmirowanija transportnogo tipa*, Moskwa, Nauka, 1969.
[4] Pyrzyński D., Runka H., Sikora W., *Optymalizacja przepływów w sferze produkcji i dystrybucji dóbr jednostkowych*, AE w Poznaniu, Poznań 1991 (projekt badawczy H/12/209/902).
[5] Sikora W., *Modele i metody optymalnej dystrybucji dóbr*, Zeszyty Naukowe nr 127, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 1993.
[6] Sikora W., *Modyfikacja metody potencjałów dla zagadnienia pośrednika z ograniczonymi przepustowościami*, w: *Optymalizacja decyzji, symulacja i prognozowanie procesów gospodarczych*, red. E. Ignasiak, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2002.
[7] Sikora W., *Algorytm generujących ścieżek dla zagadnienia rozdziału*, w: *Metody i zastosowania badań operacyjnych 2002*, red. A. Całczyński, Politechnika Radomska, Radom 2003.

THE INDEX ALGORITHM FOR PROBLEMS OF ALLOCATION WITH CRITERION OF INCOME

Summary

In presented research the new version of problem of allocation, being generalization of the mediator's problem, was talked over. It was showed, that there is efficiently way to solve the problem using the idea of tree of improvement and applying the index record of base, base solution, patern of improvement and dual variables.