WOJCIECH SIKORA

METODA STOPNIOWEJ ANALIZY ZMIENNYCH DLA ZADANIA DANTZIGA-MADANSKY'EGO

1. Wstęp

Rozważmy następujące zadanie programowania liniowego: znajdź takie wartości zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, aby

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leqslant b_i \quad (i=1,\ldots,m), \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1,\ldots,n). \tag{3}$$

Przyjęliśmy następującą interpretację ekonomiczną zadania (1)-(3). Niech $a_{i,j}$ oznacza ilość i-tego środka produkcji zużytą na wytworzenie jednostki j-tego wyrobu, b_i – zasób i-tego środka produkcji, c_j – cenę jednostki j-tego wyrobu, x_j – wielkość produkcji j-tego wyrobu. Zadanie (1)-(3) opisuje deterministyczny problem planowania produkcji.

Jeżeli przyjmiemy, że zasób każdego środka jest zmienną losową o znanym rozkładzie, to otrzymamy jedną z najprostszych wersji stochastycznego problemu planowania produkcji[1]. Podstawowymi metodami rozwiązywania liniowych problemów programowania stochastycznego są metoda ograniczonego ryzyka Charnesa-Coopera [1] i metoda dwufazowa Dantziga-Madansky'ego [2]. Zastosowanie tych metod jest dopuszczalne w określonych sytuacjach i prowadzi do uzyskania deterministycznych i liniowych odpowiedników sytuacji stochastycznych. W przypadku metody dwufazowej otrzymujemy

[1] Więcej o różnych problemach programowania stochastycznego i metodach jego rozwiązywania zob. Grabowska [5], Grabowski [6], Kopańska [8].

zadanie programowania liniowego (PL) o bardzo dużych rozmiarach. Zadanie to nazywamy zadaniem Dantziga-Madansky'ego. Podstawowy cel, jaki stawiamy w tym artykule, to odpowiedź na dwa zasadnicze pytania:

(a) kiedy zadanie Dantziga-Madansky'ego ma rozwiązanie optymalne,

(b) jak efektywnie wyznaczyć to optymalne rozwiązanie.

W celu wyznaczenia optymalnego rozwiązania proponujemy metodę stopniowej analizy zmiennych (MSAZ), a ściślej mówiąc, dwie niezależne procedury: dualną i prymalną. Rozważania kończymy przykładem liczbowym ilustrującym działanie obydwu procedur.

2. Stochastyczny problem planowania produkcji

Interesuje nas problem planowania produkcji w przypadku, gdy podaż każdego środka produkcji jest zmienną losową, skokową o znanym rozkładzie. Załóżmy, że realizacja każdej zmiennej losowej następuje dopiero po wyznaczeniu planu produkcji. Niech $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ będzie ustalonym planem produkcji, a $\tilde{b}_i$ – realizacją zmiennej losowej B_i określającej podaż i-tego środka. Zachodzi wówczas jedna z trzech możliwości:

(a) $$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\bar{x}_j < \tilde{b}_i,$$

(b) $$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\bar{x}_j = \tilde{b}_i,$$

(c) $$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\bar{x}_j > \tilde{b}_i.$$

W przypadku (c) pełna realizacja planu nie jest możliwa, gdyż zapotrzebowanie na i-ty środek przekracza jego podaż. W tej sytuacji jedną z możliwych decyzji jest zakup dodatkowych środków, aby zwiększyć ich podaż do poziomu zapotrzebowania wynikającego z planu produkcji. Jeżeli ponadto w przypadku (a) można sprzedać zbędne środki, to uzyskujemy sytuację stochastyczną, dla której należy zastosować podejście dwufazowe Dantziga-Madansky'ego. Dla pierwszej fazy formułujemy następujące zadanie stochastyczne:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + E\Big(\sum_{i=1}^{m} w_i z_i\Big) - E\Big(\sum_{i=1}^{m} k_i y_i\Big) \to \max, \tag{4}$$

$$y_i = \max\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - B_i, 0\right\} \quad (i=1,\ldots,m), \tag{5}$$

$$z_i = \max\left\{B_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j, 0\right\} \quad (i=1,\ldots,m), \tag{6}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1,\ldots,n), \tag{7}$$

gdzie:

y_i – ilość zakupionego dodatkowo i-tego środka,
z_i – ilość sprzedanego (zbędnego) i-tego środka,
k_i – koszt zakupu jednostki i-tego środka,
y_i – cena sprzedaży jednostki i-tego środka.

W zadaniu (4)-(7) zmienne y_i oraz z_i są zmiennymi losowymi. Funkcja celu (4) maksymalizuje oczekiwany dochód. W zadaniu tym przyjmujemy, że ilość środków sprzedanych lub kupionych dodatkowo nie jest ograniczona, a cena sprzedaży bądź koszt zakupu nie zależy od ilości środków, jakie dodatkowo zakład sprzedaje bądź kupuje[2]. Chcemy uzyskać liniowy i deterministyczny odpowiednik zadania (4)-(7). Niech zmienna losowa B_i ma rozkład:

$$P(B_i = b_i^l) = p_i^l \quad (i=1,\ldots,s_i),$$

przy czym

$$p_i^l \geqslant 0, \qquad \sum_{l=1}^{s_i} p_i^l = 1.$$

Oznaczmy przez:

y_i^l – niedobór i-tego środka przy l-tej realizacji zmiennej losowej B_i,
z_i^l – nadmiar i-tego środka przy l-tej realizacji zmiennej losowej B_i,

$$y_i^l = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - b_i^l, \qquad z_i^l = b_i^l - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j.$$

Deterministycznym odpowiednikiem zadania stochastycznego (4)-(7) jest następujące zadanie (PL): znajdź takie x_j, z_i^l, y_i^l, aby

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} w_i\left(\sum_{l=1}^{s_i} p_i^l z_i^l\right) - \sum_{i=1}^{m} k_i\left(\sum_{l=1}^{s_i} p_i^l y_i^l\right) \to \max \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j + z_i^l - y_i^l = b_i^l \quad (i=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,s_i), \tag{9}$$

$$x_j, z_i^l, y_i^l \geqslant 0 \quad (j=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,s_i). \tag{10}$$

[2] W literaturze (zob. [6], [8]) przyjmuje się, że zbędne środki powodują straty.

Zadanie (8) - (10) nazywamy zadaniem Dantziga-Madansky'ego i oznaczamy je jako zadanie P. Zadanie to stawiamy i rozwiązujemy w fazie pierwszej. W rozwiązaniu optymalnym zadania P istotne są tylko wartości zmiennych x_j. Wyznaczają one bowiem plan produkcji. Wartości pozostałych zmiennych nie są ważne dla celów planowania. O tym, ile dodatkowo każdego środka trzeba kupić bądź sprzedać oraz jaki będzie rzeczywisty dochód, dowiemy się dopiero w drugiej fazie, gdy będziemy już znali realizację zmiennych losowych B_i.

3. Warunki istnienia rozwiązania optymalnego zadania P

Zakładamy zgodnie z ekonomiczną interpretacją, że wszystkie parametry zadania P są nieujemne. Utwórzmy zadanie do niego dualne: znajdź takie u_i^l, aby

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{s_i} b_i^l u_i^l \to \min, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \Big(\sum_{l=1}^{s_i} u_i^l \Big) \geqslant c_j \qquad (j=1,\ldots,n), \tag{12}$$

$$w_i p_i^l \leqslant u_i^l \leqslant k_i p_i^l \qquad (i=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,s_i). \tag{13}$$

Zadanie dualne (11) - (13) oznaczymy jako zadanie D. Z warunków (12) i (13) wynika, że

$$\sum_{l=1}^{s_i} u_i^l \leqslant k_i \sum_{l=1}^{s_i} p_i^l = k_i. \tag{14}$$

Tym samym zadanie dualne ma rozwiązanie dopuszczalne, jeżeli

$$w_i \leqslant k_i \qquad (i=1,\ldots,m), \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} k_i \geqslant c_j \qquad (j=1,\ldots,n). \tag{16}$$

Skorzystamy obecnie ze znanego twierdzenia o istnieniu[3], zgodnie z którym dwa zadania programowania liniowego, prymalne i dualne, mają rozwiązania optymalne, jeżeli każde z nich ma rozwiązanie dopuszczalne.

Ponieważ zadanie prymalne P ma rozwiązania dopuszczalne (każdy nieujemny plan produkcji takie rozwiązanie generuje), a zadanie dualne D ma rozwiązanie dopuszczalne, jeżeli są spełnione warunki (15) i (16), więc można sformułować następujący wniosek.

Wniosek 1. Zadanie prymalne P oraz zadanie dualne D mają rozwiązania optymalne, jeżeli są spełnione warunki (15) i (16).

[3] Por. Gale [3], str. 32.

Warunki te mają zupełnie oczywistą interpretację ekonomiczną. Warunek (15) mówi, że cena zbytu zbędnej jednostki i-tego środka nie może być większa od ceny nabycia brakującej jednostki tego środka. Natomiast warunek (16) określa, że cena sprzedaży jednostki j-tego wyrobu nie może być większa od wartości środków zużytych na jego wytworzenie i liczonych po kosztach ich dodatkowego nabycia.

W przypadku gdyby warunek (15) nie był spełniony, należałoby nabyć dodatkowo jak najwięcej jednostek i-tego środka, a następnie je sprzedać, zarabiając na każdej jednostce $(w_i - k_i)$. Ponieważ nie ma żadnych ograniczeń na wielkość zakupu lub sprzedaży, więc zadanie P nie miałoby w tej sytuacji rozwiązania optymalnego. Podobnie, jeżeli nie jest spełniony warunek (16), to należy nabywać dodatkowe środki produkcji w dowolnie dużych ilościach z przeznaczeniem ich na produkcję j-tego wyrobu. Na każdej jednostce zarabiamy wówczas

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} k_i.$$

Wniosek 2. Jeżeli istnieje taki wyrób k, dla którego

$$c_k \leqslant \sum_{i=1}^{m} w_i a_{i,k}, \tag{17}$$

to wyrób ten należy wyeliminować z produkcji jako nieopłacalny.

Wniosek 2 mówi nam, że jeżeli cena sprzedaży k-tego wyrobu nie jest większa od wartości środków zużytych do jego wytworzenia i liczonych po cenie ich zbycia, to lepiej sprzedać posiadane środki niż przeznaczyć je na produkcję k-tego wyrobu.

Zadanie P jest zadaniem PL o pewnej szczególnej strukturze. Dla jego rozwiązania proponujemy metodę stopniowej analizy zmiennych (MSAZ). Metoda ta to pewne podejście do rozwiązywania zadań tego typu realizowane przez różne algorytmy. Przedstawimy dwie niezależne procedury. Punktem wyjścia dla procedury dualnej jest zadanie D, a dla procedury prymalnej zadanie P. Obydwa zadania sprowadzamy najpierw do dogodniejszej postaci. Uzyskujemy w wyniku tych transformacji zadania, w których większość ograniczeń to ograniczenia z góry nakładane na zmienne. Zadania te rozwiązujemy pośrednio, formułując zadania pomocnicze, w których uwzględniamy tylko część zmiennych. Jeżeli zadanie optymalne zadania pomocniczego spełnia dodatkowe warunki, to uzyskujemy rozwiązanie optymalne zadania wyjściowego. W przeciwnym przypadku rozszerzamy stopniowo listę zmiennych, podobnie jak w metodzie generowania kolumn. Obliczenia prowadzimy wykorzystując w procedurze dualnej – dualny algorytm simpleks dla zmiennych ograniczonych z góry (DASZOG), a w procedurze prymalnej – prymalny algorytm simpleks dla zmiennych ograniczonych z góry (PASZOG).

4. Algorytmy PASZOG i DASZOG

Algorytmy te są modyfikacjami prymalnego i dualnego algorytmu simpleks. Przechodzimy w nich od jednego rozwiązania bazowego do drugiego. W algorytmie PASZOG każde rozwiązanie bazowe musi być prymalnie dopuszczalne, a w algorytmie DASZOG – dualnie dopuszczalne. Rozwiązanie bazowe prymalnie i dualnie dopuszczalne jest rozwiązaniem optymalnym. W algorytmach PASZOG i DASZOG ulegają zmianom warunki prymalnej i dualnej dopuszczalności oraz reguły wyboru zmiennej wprowadzanej i usuwanej z bazy. Dlatego je dokładnie omówimy[4].

Rozważmy następujące zadanie PL:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i \quad (i=1,\ldots,m), \tag{19}$$

$$0 \leqslant x_j \leqslant d_j \quad (j=1,\ldots,n). \tag{20}$$

Każdemu rozwiązaniu bazowemu X zadania (18)-(20) odpowiada tablica simpleksowa $T=[t_{i,j}]$. W tablicy tej z wierszami związane są zmienne bazowe, a z kolumnami zmienne niebazowe. Zapis x_{B_i} oznacza zmienną bazową związaną z i-tym wierszem tablicy simpleksowej. Niech N będzie zbiorem indeksów zmiennych niebazowych, a

$$N_1=\{j \mid j\in N,\ x_j=0\},$$

$$N_2=\{j \mid j\in N,\ x_j=d_j\}.$$

Wówczas zależności wiążące wartości zmiennych bazowych i zmiennych niebazowych można przedstawić w postaci układu równań:

$$x_{B_i}=t_{i,0}-\sum_{j\in N_1} t_{i,j}x_j-\sum_{j\in N_2} t_{i,j}x_j \quad (i=0,1,\ldots,m). \tag{21}$$

Wiersz zerowy odpowiada funkcji celu (18), a pozostałe wiersze ograniczeniom (19). Zmienna x_{B_0} określa wartość funkcji celu (18).

Rozwiązanie bazowe X związane z tablicą $T=[t_{i,j}]$ przyjmuje wartości:

$$x_{B_i}=t_{i,0}-\sum_{j\in N_2} t_{i,j}d_j \equiv z_i \quad (i=0,1,\ldots,m),$$

$$x_j=0 \quad (j\in N_1),$$

$$x_j=d_j \quad (j\in N_2).$$

[4] Zob. [9], rozdz. 1.1.

Rozwiązanie bazowe X jest rozwiązaniem dualnie dopuszczalnym (spełnia kryterium optymalności), jeżeli

$$\begin{cases} t_{0,j} \geqslant 0 & (j \in N_1), \\ t_{0,j} \leqslant 0 & (j \in N_2). \end{cases} \tag{22}$$

Rozwiązanie bazowe X jest rozwiązaniem prymalnie dopuszczalnym, jeżeli

$$0 \leqslant z_i \leqslant d_{B_i} \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{23}$$

W algorytmie PASZOG, jeżeli nie jest spełniony warunek (22), najpierw ustalamy zmienną wprowadzaną do bazy, a następnie zmienną usuwaną z bazy. Zmienną wprowadzaną do bazy będzie zmienna x_k, dla której

$$|t_{0,k}| = \max \left\{ \max_{j \in \bar{N}_2} \{t_{0,j}\}, \; |\min_{j \in \bar{N}_1} \{t_{0,j}\}| \right\}, \tag{24}$$

gdzie $\bar{N}_1 = \{j \mid j \in N_1, \; t_{0,j} < 0\}$, a $\bar{N}_1 = \{j \mid j \in N_2, \; t_{0,j} > 0\}$.

Ponieważ zmienną usuwaną z bazy będzie zmienna, która najszybciej osiąga swój kres dolny bądź górny, gdy zmienna x_k zwiększa bądź zmniejsza swoją wartość, więc wyróżniamy dwa przypadki.

a) Dla $k \in N_1$ obliczamy

$$\begin{cases} \alpha_r = \min \left\{ \dfrac{z_i}{t_{i,k}} \mid t_{i,k} > 0 \right\}, \\ \beta_s = \min \left\{ \dfrac{z_i - d_{B_i}}{t_{i,k}} \mid t_{i,k} < 0 \right\}. \end{cases} \tag{25}$$

Jeżeli

$$\min \{\alpha_r, \beta_s, d_k\} = \begin{cases} \alpha_r, \text{ to z bazy usuwamy zmienną } x_{B_r} \text{ i } x_{B_r} = 0, \\ \beta_s, \text{ to z bazy usuwamy zmienną } x_{B_s} \text{ i } x_{B_s} = d_{B_s}, \\ d_k, \text{ to z bazy usuwamy zmienną } x_k \text{ i } x_k = d_k. \end{cases}$$

b) Dla $k \in N_2$ obliczamy

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_r = \max \left\{ \dfrac{z_i}{t_{i,k}} \mid t_{i,k} < 0 \right\}, \\ \bar{\beta}_s = \max \left\{ \dfrac{z_i - d_{B_i}}{t_{i,k}} \mid t_{i,k} > 0 \right\}. \end{cases} \tag{26}$$

Jeżeli

$$\max\{\bar{\alpha}_r, \bar{\beta}_s, -d_k\} = \begin{cases} \bar{\alpha}_r, & \text{to z bazy usuwamy zmienną } x_{B_r} \text{ i } x_{B_r}=0, \\ \bar{\beta}_s, & \text{to z bazy usuwamy zmienną } x_{B_s} \text{ i } x_{B_s}=d_{B_s}, \\ -d_k, & \text{to z bazy usuwamy zmienną } x_k \text{ i } x_k=0. \end{cases}$$

W algorytmie DASZOG, jeśli nie jest spełniony warunek (23), to wyznaczamy najpierw zmienną usuwaną z bazy, a następnie zmienną wprowadzaną do bazy. Zmienną usuwaną z bazy będzie zmienna x_{B_k}, dla której

$$\Pi_k = \min_{i=1,\ldots,m} \{\Pi_i\}, \tag{27}$$

gdzie

$$\Pi_i = \min\{z_i, d_{B_i} - z_i\}.$$

Ponieważ zmienna usuwana z bazy może przekraczać swój kres dolny lub kres górny, więc wyróżniamy dwie sytuacje:

a) Jeżeli $z_k < 0$, to do bazy wprowadzamy zmienną x_p, dla której

$$\frac{t_{0,p}}{t_{k,p}} = \max\left\{\frac{t_{0,j}}{t_{k,j}} \mid t_{k,j} < 0,\ j \in N_1 \text{ lub } t_{k,j} > 0,\ j \in N_2\right\}. \tag{28}$$

b) Jeżeli natomiast $z_k > d_{B_k}$, to do bazy wprowadzamy zmienną x_p, dla której

$$\frac{t_{0,p}}{t_{k,p}} = \min\left\{\frac{t_{0,j}}{t_{k,j}} \mid t_{k,j} > 0,\ j \in N_1 \text{ lub } t_{k,j} < 0,\ j \in N_2\right\}. \tag{29}$$

5. Procedura dualna

Punktem wyjścia dla procedury dualnej jest zadanie dualne D. Wprowadźmy nowe zmienne:

$$v_i^l = u_i^l - w_i p_i^l \geqslant 0 \qquad (i=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,s_i).$$

Eliminując z zadania D zmienne u_i^l oraz usuwając niewiążące ograniczenia odpowiadające wyrobom nieopłacalnym, po odpowiednich przekształceniach, otrzymujemy następujące zadanie D_0: znajdź takie wartości zmiennych v_i^l, aby

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{s_i} v_i^l b_i^l \to \min, \tag{30}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \Big(\sum_{l=1}^{s_i} v_i^l\Big) \geqslant e_j \qquad (j \in E), \tag{31}$$

$$0 \leqslant v_i^l \leqslant g_i^l \quad (i=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,s_i), \tag{32}$$

gdzie E jest zbiorem wyrobów opłacalnych,

$$e_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i,$$

$$g_i^l = k_i p_i^l - w_i p_i^l.$$

W funkcji celu (30) pominęliśmy stałą

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{s_i} b_i^l w_i p_i^l.$$

Ponieważ zakładamy, że zadanie D_0 spełnia warunki (14)-(16) i (17), więc wszystkie parametry e_j, g_i^l są nieujemne.

Zadanie D_0 można rozwiązać algorytmem DASZOG. Zauważmy jednak, że kolumny współczynników stojących przy zmiennych $v_i^1, v_i^2, \ldots, v_i^{s_i}$ są identyczne. Przyjmijmy, nie zmieniając ogólności rozważań, że parametry b_i^l zostały tak ponumerowane, iż

$$b_i^1 < b_i^2 < \ldots < b_i^{s_i} \quad (i=1,\ldots,m). \tag{33}$$

Parametry te są realizacjami zmiennej losowej B_i.

TWIERDZENIE 1. *Niech* $\bar{V}=[\bar{v}_i^l]$ *będzie optymalnym rozwiązaniem zadania* D_0. *Wówczas dla każdego* $i=1,\ldots,m$ *mamy taką zmienną* v_i^k, *że*

$$0 \leqslant \bar{v}_i^k < g_i^k \wedge \bigwedge_{l<k} \bar{v}_i^l = g_i^l \wedge \bigwedge_{l>k} \bar{v}_i^l = 0. \tag{34}$$

Prawdziwość twierdzenia 1 jest oczywista. Każde rozwiązanie dopuszczalne V zadania D_0, które nie spełnia warunku (34), można poprawić, zmniejszając wartość funkcji celu. Jest więc ono rozwiązaniem nieoptymalnym. Stąd warunek (34) jest warunkiem koniecznym, chociaż nie wystarczającym, optymalności rozwiązania zadania D_0 (dowód tego twierdzenia pomijamy, gdyż jest podobny do dowodu twierdzenia 1 podanego w pracy [10]).

Procedurą dualną rozwiązujemy zadanie D_0 pośrednio w dwóch fazach. W fazie pierwszej znajdujemy optymalne rozwiązanie następującego zadania D_1:

$$\sum_{i=1}^{m} -b_i^1 v_i^1 \to \max, \tag{35}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} v_i^1 - \beta_j = e_j \quad (j \in E), \tag{36}$$

$$v_i^1,\ \beta_j \geqslant 0 \quad (i=1,\ldots,m;\ j \in E). \tag{37}$$

W celu rozwiązania zadania D_1 wygodnie jest stosować dualny algorytm simpleks, gdyż przyjmując jako zmienne bazowe zmienne swobodne β_j $(j \in E)$ uzyskujemy rozwiązanie dualnie dopuszczalne.

TWIERDZENIE 2. *Niech* $(\bar{V}^1, \bar{\beta}) = [\bar{v}_i^1, \bar{\beta}_j]$ *będzie optymalnym rozwiązaniem zadania* D_1. *Jeżeli spełnia ono warunek*

$$\bar{v}_i^1 \leqslant g_i^1 \qquad (i=1,\ldots,m), \tag{38}$$

to rozwiązanie

$$\begin{cases} v_i^1 = \bar{v}_i^1 & (i=1,\ldots,m), \\ v_i^l = 0 & (i=1,\ldots,m;\ l=2,\ldots,s_i). \end{cases} \tag{39}$$

będzie rozwiązaniem optymalnym zadania D_0.

Dowód. Rozwiązanie (39) spełniające warunek (38) jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania D_0. Oznaczmy przez $t_0(v_i^l)$ wskaźnik kryterium optymalności dla zmiennej v_i^1. Dla zmiennych v_i^1

$$t_0(v_i^1) \geqslant 0 \qquad (i=1,\ldots,m), \tag{40}$$

gdyż dla zmiennych bazowych z definicji $t_0(v_i^1)=0$, a dla zmiennych niebazowych zadania D_1, które są zerowe i spełniają kryterium optymalności, $t_0(v_i^1) \geqslant 0$. Kolumny współczynników związanych ze zmiennymi $v_i^1, v_i^2, \ldots, v_i^{s_i}$ są identyczne; stąd

$$t_0(v_i^l) = t_0(v_i^1) + b_i^l - b_i^1 \qquad (i=1,\ldots,m;\ l=2,\ldots,s_i).$$

Z warunków (33) i (40) wynika, że

$$t_0(v_i^l) \geqslant 0 \qquad (i=1,\ldots,m;\ l=2,\ldots,s_i), \tag{41}$$

co oznacza, iż spełnione jest także kryterium optymalności dla wszystkich zmiennych zadania D_0. Tym samym rozwiązanie (39) jest rozwiązaniem optymalnym zadania D_0.

Do fazy drugiej przechodzimy, gdy warunek (39) nie jest spełniony. Stosujemy w tej fazie algorytm DASZOG. Spośród zmiennych bazowych rozwiązania $(\bar{V}^1, \bar{\beta})$ ustalamy zmienną, która najsilniej narusza warunek (38). Niech będzie to zmienna v_g^1 związana z k-tym wierszem tablicy simpleksowej $\bar{T}$. Zmienna ta będzie usuwana z bazy, a zbiór zmiennych niebazowych rozszerzymy o zmienną v_g^2. Do tablicy simpleksowej $\bar{T}$ dołączamy nową kolumnę związaną ze zmienną v_g^2, która będzie miała tylko dwa elementy niezerowe

$$\begin{cases} t_0(v_g^2) = b_g^2 - b_g^1 > 0, \\ t_k(v_g^2) = 1. \end{cases} \tag{42}$$

Formalnie uzyskujemy nowe zadanie D_2 z rozwiązaniem bazowym

$$v_i^1 = \bar{v}_i^1 \quad (i=1,\ldots,m),$$

$$\beta_j = \bar{\beta}_j \quad (j \in E),$$

$$v_g^2 = 0.$$

Rozwiązanie to nie narusza warunków dualnej dopuszczalności (optymalności). Ustalając zgodnie z regułami algorytmu DASZOG zmienną wprowadzaną do bazy i usuwając z niej zmienną v_g^1, przechodzimy do nowego rozwiązania bazowego, dualnie dopuszczalnego. Jeżeli to rozwiązanie spełnia warunek (32), to koniec obliczeń. Jeżeli natomiast warunek (32) nie jest spełniony, to ustalamy zmienną, która ten warunek najsilniej narusza. Gdy jest naruszone ograniczenie z dołu, wtedy wykonujemy zwykłą iterację algorytmu DASZOG i przechodzimy do nowego rozwiązania bazowego. Gdy natomiast jest naruszane ograniczenie z góry, bo np. $v_c^1 > g_c^1$, wtedy rozszerzamy zbiór zmiennych niebazowych o kolejną zmienną v_c^2 i uzyskujemy nowe zadanie D_3.

Każde rozwiązanie bazowe uzyskane procedurą dualną spełnia kryteria optymalności nie tylko dla zmiennych aktualnego zadania pomocniczego D_r, ale także dla pozostałych zmiennych zadania D_0. Stąd pierwsze rozwiązanie dopuszczalne generuje optymalne rozwiązanie zadania D_0.

6. Procedura prymalna

Punktem wyjścia dla procedury prymalnej jest zadanie P. Usuńmy z niego zmienne x_j odpowiadające nieopłacalnym wyrobom oraz wyeliminujmy wszystkie zmienne z_i^l $(i=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,s_i)$. Otrzymamy następujące zadanie:

$$\sum_{j\in E} e_j x_j - \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{s_i} g_i^l y_i^l \to \max, \tag{43}$$

$$\sum_{j\in E} a_{i,j} x_j - y_i^l \leqslant b_i^l \quad (i=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,s_i), \tag{44}$$

$$x_j, y_i^l \geqslant 0 \quad (j\in E,\ i=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,s_i), \tag{45}$$

gdzie podobnie jak w zadaniu D_0

$$e_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i, \qquad g_i^l = k_i p_i^l - w_i p_i^l.$$

Zadanie (43) - (45) oznaczmy jako zadanie P'. W funkcji celu (43) pominięto stałą $\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{s_i} w_i p_i^l b_i^l$. Z warunku (44) i przyjętych założeń $(b_i^1 < b_i^2 < \ldots < b_i^{s_i})$ wynika, że

$$0 \leqslant y_i^l - y_i^{l+1} \leqslant b_i^{l+1} - b_i^l \quad (i=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,(s_i-1)).$$

Wprowadźmy nowe zmienne

$$\omega_i^l = y_i^l - y_i^{l+1} \quad (i=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,(s_i-1)),$$

$$\omega_i^{s_i} = y_i^{s_i} \quad (i=1,\ldots,m).$$

Wtedy

$$y_i^l = \sum_{k=l}^{s_i} \omega_i^k, \quad \text{a} \quad d_i^l = \sum_{k=1}^{l} g_i^k.$$

Zastępując zmienne y_i^l zmiennymi ω_i^l otrzymujemy następujące zadanie:

$$\sum_{j\in E} e_j x_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{s_i} d_i^l \omega_i^l \to \max, \tag{46}$$

$$\sum_{j\in E} a_{i,j} x_j - \sum_{l=1}^{s_i} \omega_i^l \leqslant b_i^1 \quad (i=1,\ldots,m), \tag{47}$$

$$0 \leqslant \omega_i^l \leqslant b_i^{l+1} - b_i^l \quad (i=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,(s_i-1)), \tag{48}$$

$$x_j, \omega_i^{s_i} \geqslant 0 \quad (j\in E,\ i=1,\ldots,m). \tag{49}$$

Oznaczmy zadanie (46) - (49) jako zadanie P_0. Zadania P' i P_0 są równoważne. Mają ten sam wymiar (liczba zmiennych i warunków ograniczających jest identyczna). Struktura zadania P_0 jest jednak dogodniejsza, gdyż większość ograniczeń (poza warunkami nieujemnymi zmiennych) to ograniczenia z góry nałożone na zmienne ω_i^l, co uzasadnia stosowanie algorytmu PASZOG.

TWIERDZENIE 3. *Niech* $(\bar{X}, \bar{\Omega}) = [x_j, \omega_i^l]$ *będzie optymalnym rozwiązaniem zadania* P_0. *Wówczas dla każdego* $i=1,\ldots,m$ *mamy taką zmienną* ω_i^k, *że*

$$0 \leqslant \bar{\omega}_i^k < b_i^{k+1} - b_i^k \wedge \bigwedge_{l<k} \bar{\omega}_i^l = b_i^{l+1} - b_i^l \wedge \bigwedge_{l>k} \bar{\omega}_i^l = 0. \tag{50}$$

Twierdzenie 3 pozwala rozwiązać zadanie P_0 pośrednio w dwóch fazach. Postępujemy podobnie jak w procedurze dualnej. W fazie pierwszej znajdujemy rozwiązanie optymalne następującego zadania:

$$\sum_{j\in E} e_j x_j \to \max \tag{51}$$

$$\sum_{j\in E} a_{i,j} x_j + \alpha_i = b_i^1 \quad (i=1,\ldots,m), \tag{52}$$

$$x_j, \alpha_i \geqslant 0 \quad (j\in E,\ i=1,\ldots,m). \tag{53}$$

Zadanie (51)-(53) oznaczmy jako zadanie P_1. Aby je rozwiązać, wystarczy zastosować prymalny algorytm simpleks.

TWIERDZENIE 4. *Niech* $(\bar{X}, \bar{\alpha}) = [\bar{x}_j, \bar{\alpha}_i]$ *będzie optymalnym rozwiązaniem zadania* P_1. *Jeżeli spełnia ono warunek*

$$t_0(\alpha_i) \leqslant d_i^1 \quad (i=1,\ldots,m), \tag{54}$$

to rozwiązanie

$$\begin{cases} x_j = \bar{x}_j & (j \in E), \\ \omega_i^l = 0 & (i=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,s_i), \end{cases} \tag{55}$$

jest rozwiązaniem optymalnym zadania P_0.

Dowód. Wskaźnik kryterium optymalności stojący przy zmiennej swobodnej α_i określa wartość zmiennej dualnej v_i^1. Jak wiadomo (por. praca [8], str. 113), zmienna dualna mówi nam, o ile wzrośnie wartość funkcji celu, jeżeli zwiększymy zasób i-tego środka produkcji o jednostkę. Jeżeli spełniony jest warunek (54), to dochód uzyskany z jednostki i-tego środka jest nie większy od kosztu jego nabycia. Stąd nie opłaca się nabyć dodatkowo żadnego środka produkcji, a tym samym rozwiązanie określone wzorem (55) jest optymalne.

Jeżeli warunek (54) nie jest spełniony, to przechodzimy do fazy drugiej. Obliczamy

$$h_i = d_i^1 - t_0(\alpha_i) \quad (i=1,\ldots,m)$$

i do zbioru zmiennych niebazowych zadania P_1 dołączamy zmienną ω_k^1, dla której

$$h_k = \min\{h_i\}.$$

Aktualna tablica simpleksowa zostaje poszerzona o dodatkową kolumnę związaną ze zmienną ω_k^1, w której

$$t_0(\omega_k^1) = h_k < 0,$$
$$t_i(\omega_k^1) = -t_i(\alpha_k) \quad (i=1,\ldots,m).$$

Formalnie uzyskujemy nowe zadanie P_2, z nowym rozwiązaniem i odpowiadającą mu tablicą simpleksową. Rozwiązanie to nie spełnia kryterium optymalności, więc zgodnie z regułami algorytmu PASZOG wprowadzamy do bazy zmienną ω_k^1, ustalamy zmienną usuwaną z bazy i przechodzimy do nowego rozwiązania bazowego (prymalnie dopuszczalnego). Jeżeli to rozwiązanie nie jest dualnie dopuszczalne, to stosujemy dalej algorytm PASZOG, aż do uzyskania rozwiązania optymalnego zadania P_2.

Niech $\omega_i^{r_i}$ będzie zmienną o najwyższym numerze spośród zmiennych $\omega_i^1, \omega_i^2, \ldots, \omega_i^{s_i}$, które należą do zbioru zmiennych zadania P_r. Sprawdzamy, czy spełniony jest warunek

$$t_0(\alpha_i) \leqslant d_i^{r_i+1} \quad (i=1,\ldots,m). \tag{56}$$

Dla $r_i = s_i$ przyjmujemy $d_i^{r_i+1} = \infty$.

Jeżeli warunek (56) jest spełniony, to optymalne rozwiązanie zadania P_r generuje optymalne rozwiązanie zadania P_0, a tym samym i zadania P. W przeciwnym przypadku obliczamy

$$h_i = d_i^{r_i+1} - t_0(\alpha_i) \quad (i=1,\ldots,m)$$

i do zbioru zmiennych niebazowych zadania P_r dołączamy zmienną $\omega_k^{r_k+1}$, dla której

$$h_k = \min_{i=1,\ldots,m} \{h_i\}.$$

Uzyskujemy nowe zadanie P_{r+1} z nowym rozwiązaniem bazowym i nową tablicą simpleksową. Procedurę stopniowego poszerzania zbioru zmiennych kontynuujemy tak długo, aż uzyskamy rozwiązanie optymalne zadania pomocniczego P_s, które spełnia warunek (56).

Przykład liczbowy

Rozważmy zadanie:

$$\begin{cases} 10x_1 + 15x_2 \to \max, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant B_1, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant B_2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{57}$$

Zadanie (57) opisuje następującą sytuację. Można produkować dwa wyroby, zużywając dwa środki produkcji. Zasoby tych środków są zmiennymi losowymi, skokowymi o znanym rozkładzie: $b_1^1 = 8$, $p_1^1 = 1/2$; $b_1^2 = 12$, $p_1^2 = 1/2$; $b_2^1 = 6$, $p_2^1 = 2/3$; $b_2^2 = 9$, $p_2^2 = 1/3$. Plan produkcji musimy ustalić, zanim będzie znana realizacja zmiennych losowych. Kiedy już wiemy, jakimi zasobami dysponujemy, to można sprzedać zbędne środki lub zakupić brakujące środki. Cena sprzedaży $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$, cena zakupu $k_1 = 4$, $k_2 = 6$. Wyznaczając plan produkcji, maksymalizujemy oczekiwany dochód.

Stosując podejście dwufazowe, otrzymujemy następujące zadanie P:

$$
\begin{aligned}
&10x_1+15x_2+z_1^1+z_1^2+2z_2^1+z_2^2-2y_1^1-2y_1^2-4y_2^1-2y_2^2 \to \max,\\
&3x_1+\ 2x_2+z_1^1-y_1^1=8,\\
&3x_1+\ 2x_2+z_1^2-y_1^2=12,\\
&x_1+\ 2x_2+z_2^1-y_2^1=6,\\
&x_1+\ 2x_2+z_2^2-y_2^2=9,\\
&x_1, x_2, z_1^1, \ldots, y_2^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Omówimy najpierw procedurę dualną. Ustalamy wartości parametrów: $e_1=1$, $e_2=5$, $g_1^1=1$, $g_1^2=1$, $g_2^1=2$, $g_2^2=1$. Wyjściowe zadanie D_1 będzie miało postać:

$$
\begin{aligned}
&-8v_1^1-6v_2^1 \to \max,\\
&3v_1^1+\ v_2^1-\beta_1=1,\\
&2v_1^1+2v_2^1-\beta_2=5,\\
&v_1^1, v_2^1, \beta_1, \beta_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Tabela 1

	z_i	$-v_1^1$	$-v_2^1$
β_0	0	8	6
β_1	−1	−3	−1
β_2	−5	−2	−2

Tabela 2

	z_i	$-v_1^1$	$-\beta_2$	$-v_2^2$
β_0	−15	2	3	3
β_1	3/2	−2	−1/2	0
v_2^1	5/2	1	−1/2	1

Pierwsze rozwiązanie zadania D_1 przedstawia tabela 1. Jest ono tylko dualnie dopuszczalne, więc przechodzimy do następnego rozwiązania, które zawiera tabela 2 (bez ostatniej kolumny). Jest to rozwiązanie optymalne zadania D_1. Ponieważ na zmienne zadania D_0, które pośrednio rozwiązujemy, są nałożone także ograniczenia z góry:

$$v_1^1 \leqslant 1, \quad v_1^2 \leqslant 1, \quad v_2^1 \leqslant 2, \quad v_2^2 \leqslant 1,$$

więc rozwiązanie to nie spełnia warunku (38), gdyż $v_2^1=2{,}5>2$. Przechodzimy do fazy drugiej. Do zbioru zmiennych niebazowych zadania D_1 dołączamy zmienną v_2^2. Odpowiada jej dodatkowa kolumna w tabeli 2. Zgodnie z regułami algorytmu DASZOG usuwając z bazy zmienną v_2^1 i wprowadzając do bazy zmienną v_1^1, uzyskujemy nowe rozwiązanie, które zawiera tabela 3. Jest ono prymalnie i dualnie dopuszczalne, więc koniec obliczeń. Generuje ono optymalne rozwiązanie zadania $D_0: v_0=16$, $v_1^1=1/2$, $v_2^1=2$, $v_1^2=v_2^2=0$.

Tabela 3

	z_i	$-v_2^1$	$-\beta_2$	$-v_2^2$
β_0	−16	−2	4	1
β_1	5/2	2	−3/2	2
v_1^1	1/2	1	−1/2	1

W istocie interesują nas optymalne wartości zmiennych x_j w zadaniu P. Wartości te określają wskaźniki kryterium optymalności przy zmiennych β_j. Ponieważ $t_0(\beta_2)=4$, więc $x_2=4$, a oczekiwany dochód:

$$x_0=v_0+\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{s_i}\omega_i p_i^l b_i^l=16+41=57.$$

Przejdźmy obecnie do procedury prymalnej. W pierwszej fazie rozwiązujemy następujące zadanie P_1:

$$x_1+5x_2\to\max,$$
$$3x_1+2x_2+\alpha_1=8,$$
$$x_1+2x_2+\alpha_2=6,$$
$$x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2\geqslant 0.$$

Tabela 4

	z_i	$-x_1$	$-x_2$
α_0	0	−1	−5
α_1	8	3	2
α_2	6	1	**2**

Tabela 5

	z_i	$-x_1$	$-\alpha_2$	$-\omega_2^1$
α_0	15	3/2	5/2	−1/2
α_1	2	2	−1	**1**
x_2	3	1/2	1/2	−1/2

Pierwsze, nieoptymalne rozwiązanie zadania P_1 zawiera tabela 4. Następne, już optymalne, rozwiązanie tego zadania przedstawia tabela 5. Ustalamy wartości parametrów $d_1^1=1$, $d_1^2=2$, $d_2^1=2$, $d_2^2=3$ oraz ograniczenia nakładane na zmienne $\omega_1^1\leqslant 4$, $\omega_2^1\leqslant 3$. Ponieważ $t_0(\alpha_2)=2{,}5>d_2^1=2$, więc przechodzimy do fazy drugiej, powiększając zbiór zmiennych niebazowych o zmienną ω_2^1. Odpowiada jej dodatkowa kolumna w tabeli 5. Aktualne rozwiązanie nie spełnia już kryterium optymalności, więc wprowadzając do bazy zmienną ω_2^1, a usuwając z niej zmienną α_2, otrzymujemy nowe rozwiązanie. Zawiera je

tabela 6. Jest ono rozwiązaniem optymalnym zadania P_2 i ponieważ $t_0(\alpha_1)=1/2\leqslant d_1^1=1$, $t_0(\alpha_2)=2\leqslant d_2^1=2$, więc generuje optymalne rozwiązanie zadania P_0: $x_1=0$, $x_2=4$, $\omega_2^1=2$, $\omega_1^1=\omega_1^2=\omega_2^2=0$. Na podstawie tego rozwiązania łatwo wyznaczyć optymalne rozwiązanie zadania P. Jest to jednak zabieg zbędny, gdyż nas interesują tylko wartości zmiennych x_j ($j\in E$), a te już są ustalone.

Tabela 6

	z_i	$-x_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_1$
α_0	16	5/2	2	1/2
ω_2^1	2	2	−1	1
x_2	4	3/2	0	1/2

8. Podsumowanie

Stosując procedurę prymalną bądź dualną do rozwiązania zadania P, interesują nas ostatecznie tylko optymalne wartości zmiennych x_j ($j\in E$), które odczytujemy z kolumny wartości zmiennych bazowych bądź z wiersza kryterium optymalności końcowej tablicy simpleksowej. Liczba iteracji simpleksowych jest z reguły jednakowa w obydwu procedurach, co potwierdza przykład liczbowy. Procedury te można wykorzystać dla rozwiązania zadania Dantziga-Madansky'ego w przypadku, gdy $w_i\leqslant 0$ ($i=1,\ldots,m$).

Procedury prymalna i dualna mogłyby być bardziej efektywne, gdybyśmy wprowadzili także stopniową eliminację zmiennych zbędnych. Wymaga to jednak znacznych przeróbek, zwłaszcza w procedurze prymalnej (por. Sikora [10]).

Literatura

[1] **Charnes A., Cooper W. M.**, Chance – Constrained Programming, Management Science, 1959, nr 1.

[2] **Dantzig G. B., Madansky A.**, On the Solution of Two Stage Linear Programming Problems, w: Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium of Mathematical Statistics and Probability, pod red. J. Neymana, University of California, Berkeley 1961.

[3] **Gale D.**, Teoria liniowych modeli ekonomicznych, PWN, Warszawa 1969.

[4] **Garfinkel R. S., Nemhauser G. M.**, Programowanie całkowitoliczbowe, PWN, Warszawa 1978.
[5] **Grabowska A.**, Losowość wektora ograniczeń w programowaniu liniowym, Przegląd Statystyczny, 1971, nr 3 - 4.
[6] **Grabowski W.**, Programowanie matematyczne, PWE, Warszawa 1980.
[7] **Judin D., Golsztein E.**, Nowyje naprawlienija w liniejnym programmirowanii, Sowietskoje Radio, Moskwa 1966.
[8] **Kopańska D.**, Wybrane metody stochastycznego programowania liniowego, Akademia Ekonomiczna, Katowice 1988.
[9] **Lasdon L. S.**, Optimization Theory for Large Systems, The Macmilian Company, New York 1970.
[10] **Sikora W.**, Metoda stopniowej analizy zmiennych dla zadania programowania rozłącznego, Przegląd Statystyczny, 1991, nr 2.