Marian MATŁOKA

REASEKURACJA A PRAWDOPODOBIEŃSTWO RUINY FIRMY UBEZPIECZENIOWEJ

Wstęp

Trudno sformułować definicję reasekuracji, która uwzględniałaby cechy natury ekonomicznej, finansowej, prawnej, techniczno-ubezpieczeniowej itp. Według Montalbettiego ([3], s. 13) reasekuracja jest umową, na mocy której jeden zakład ubezpieczeń – zwany cedentem – odstępuje (ceduje) całość lub część ubezpieczonego ryzyka lub grupy ubezpieczonych rodzajów ryzyka, wraz z odpowiednią częścią składek, innemu zakładowi ubezpieczeń – zwanemu reasekuratorem – który ze swej strony zobowiązuje się do zapłaty cedentowi odpowiedniej części świadczeń wypłaconych ubezpieczającym.

Z przytoczonej definicji wynika, że reasekuracja spełnia analogiczną rolę jak ubezpieczenie. Ma ona chronić finansową stabilizację ubezpieczyciela. Jest to najważniejsza funkcja reasekuracji, mająca w znacznym stopniu ograniczyć prawdopodobieństwo ruiny firmy ubezpieczeniowej.

Zjawisko ruiny jest dla firmy ubezpieczeniowej jednym z najważniejszych problemów. Należy sobie jednak zdać sprawę z tego, że obliczenie dokładnej wartości prawdopodobieństwa ruiny, nawet przy największych uproszczeniach, nie jest możliwe. W większości przypadków należy zadowolić się jedynie jego oszacowaniem.

Pierwszy punkt pracy poświęcony jest modelowi rezerw finansowych oraz oszacowaniu w tym modelu prawdopodobieństwa ruiny firmy ubezpieczeniowej.

W drugim punkcie omówiono wpływ reasekuracji na prawdopodobieństwo ruiny. Ponieważ wpływ ten ładnie można przedstawić od strony rachunkowej dla reasekuracji kwotowej i nadwyżki szkody, więc ograniczono się w pracy tylko do tych form reasekuracji. Należy jednak podkreślić, że nie są to zależności ogólne, lecz dla z góry przyjętych założeń rozkładu wielkości roszczeń.

1. Prawdopodobieństwo ruiny

Punktem wyjścia w rozważaniach dotyczących prawdopodobieństwa ruiny firmy ubezpieczeniowej jest tzw. **model rezerw finansowych** opisany następującym równaniem ([2], s. 3; [1], s. 345):

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t), \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

W modelu zakłada się, że składki ubezpieczeniowe wpływają do firmy ubezpieczeniowej w sposób ciągły ze stałą intensywnością ich pobierania $c > 0$. Wtedy iloczyn $c \cdot t$ oznacza osiągnięty przychód ze składki do chwili t. Symbolem $S(t)$ oznacza się sumę roszczeń w okresie $[0, t]$, natomiast u oznacza rezerwę początkową (kapitał początkowy). Wobec przyjętych oznaczeń $U(t)$ jest poziomem rezerw finansowych firmy ubezpieczeniowej w momencie t.

Zauważmy, że suma roszczeń $S(t)$ zależy od dwóch czynników:
– od liczby roszczeń $N(t)$ w portfelu w okresie $[0, t]$,
– od wielkości X_i pojedynczych roszczeń, $i = 0, 1, \ldots, N(t)$.

Zatem

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i .$$

Ponieważ wielkości $N(t)$ oraz X_i są zmiennymi losowymi, również poziom rezerw finansowych $U(t)$ jest zmienną losową.

Jednym z najczęściej stosowanych rozkładów dla zmiennej losowej $N(t)$ jest rozkład Poissona. Jednakże jeżeli wariancja liczby roszczeń przewyższa jego średnią, to należy zastosować rozkład dwumianowy. W analizie kwoty roszczeń istotne jest pojęcie złożenia. W celu uproszczenia rachunków wybiera się takie rozkłady, aby obliczenia nie były zbyt trudne. Dlatego często w praktyce stosuje się również rozkład Poissona, który pozwala na prostsze wyliczenia rozkładu zagregowanych roszczeń $S(t)$.

Należy zdać sobie sprawę z tego, że powyższy model, jak każdy, jest modelem wyidealizowanym. Nie uwzględnia się w nim różnych pozycji, które mogłyby mieć wpływ na wielkość rezerw. Jednak na podstawie tego modelu można uzyskać bardzo cenne dla firmy ubezpieczeniowej informacje, przydatne dla oceny jej wypłacalności.

Patrząc na równanie (1), widzimy, że poziom rezerw finansowych może przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne. Jeżeli poziom rezerw finansowych przyjął po raz pierwszy wartość ujemną, to mówimy, że mamy do czynienia w tym momencie ze zjawiskiem ruiny.

Prawdopodobieństwo ruiny rozważane jest jako funkcja rezerwy początkowej:

$$\Psi(u) = P(U(t) < 0;\ 0 < t < \infty),$$

przy następujących założeniach:

- proces $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ liczby roszczeń jest procesem Poissona z parametrem λ,
- X_i określające wielkości roszczeń są zmiennymi niezależnymi o jednakowych rozkładach,
- zmienne X_i są niezależne od $N(t)$ dla każdego $t \geq 0$,
- $c > \lambda m_1$, gdzie $m_1 = E(X_i)$.

Ostatnie z założeń można zapisać w postaci $c = (1+\Theta)\lambda m_1$. Współczynnik $\Theta > 0$ nazywany jest względnym współczynnikiem bezpieczeństwa lub narzutem na bezpieczeństwo. Oznacza to, że wielkość składki na jednostkę czasu musi być większa od oczekiwanej wartości roszczenia na jednostkę czasu.

Dla analizy problemu prawdopodobieństwa ruiny wprowadza się pojęcie **współczynnika dopasowania** R, który definiowany jest jako dodatni pierwiastek równania:

$$1 + (1+\Theta) m_1 R = M_X(R), \quad R < \gamma, \tag{2}$$

gdzie:

$M_X(R) = E\left(e^{RX}\right)$ oznacza taką funkcję tworzącą momenty, że istnieje $z > 0$, dla którego $M_X(z) < \infty$,

$\gamma = \sup_z M_X(z) < \infty$.

Pomiędzy współczynnikiem dopasowania R a prawdopodobieństwem ruiny istnieje związek wyrażony wzorem ([1], s. 352):

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)} \mid T < \infty)}, \quad u \geq 0, \tag{3}$$

gdzie T oznacza moment ruiny.

Bezpośrednie korzystanie ze wzoru (3) jest bardzo trudne, dlatego ze względu na jego niewielką przydatność w praktyce stosowane jest oszacowanie typu Lundberga. Nierówność Lundberga przyjmuje postać:

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad u \geq 0. \tag{4}$$

Nierówność Lundberga jest jednym z najważniejszych postulatów teorii ruiny. Wynika z niej, że prawdopodobieństwo ruiny zależy od rezerwy początkowej u oraz współczynnika dopasowania R. Z wykładniczego charakteru nierówności Lundberga wynika, że:

– dla ustalonego R, im większa rezerwa początkowa, tym mniejsze prawdopodobieństwo ruiny,
– dla ustalonego u, im większa wartość współczynnika dopasowania, tym mniejsze prawdopodobieństwo ruiny.

Wobec opisanych zależności za miernik bezpieczeństwa firmy ubezpieczeniowej przyjmuje się współczynnik dopasowania R. Zatem można uznać, że jeśli współczynnik dopasowania jest duży, to umowa reasekuracyjna jest korzystna.

2. Wpływ reasekuracji na prawdopodobieństwo ruiny

Ze względu na sposób podziału ryzyka pomiędzy cedenta a reasekuratora wyróżnia się dwie podstawowe grupy reasekuracji:
– proporcjonalną,
– nieproporcjonalną.

W przypadku umowy **reasekuracji proporcjonalnej** udział reasekuratora w każdym typie ryzyka jest ustalony w umówionym stosunku do cedenta. W myśl tej umowy reasekurator przyjmuje określoną część składki ubezpieczeniowej oraz pokrywa w tym samym stosunku wszystkie reasekurowane szkody. W skład reasekuracji proporcjonalnej wchodzą umowy:
– kwotowe,
– nadwyżkowe (ekscedentowe),
– kwotowo-ekscedentowe.

Umowy **reasekuracji nieproporcjonalnej** polegają na tym, że w podziale ryzyka nie obowiązują żadne ustalone z góry proporcje. W praktyce stosuje się najczęściej dwa typy umów reasekuracji nieproporcjonalnej:
– umowa nadwyżki szkody,
– umowa nadwyżki szkodowości.

Rozważmy najpierw przypadek reasekuracji proporcjonalnej (kwotowej). W modelu rezerw finansowych przyjęliśmy, że wielkość składki na jednostkę czasu wynosi $(1+\Theta)\lambda \cdot m_1$. Jeżeli założymy, że udział cedenta w podziale składki i szkód wynosi α, a reasekuratora $1-\alpha$, gdzie $0 \le \alpha \le 1$, to przychód reasekuratora na jednostkę czasu wynosi:

$$(1-\alpha)\cdot(1+\xi)\lambda\, m_1, \quad \text{gdzie} \quad \xi \ge 0.$$

(Współczynnik bezpieczeństwa reasekuratora nie musi być taki sam jak cedenta).

Z kolei przychód cedenta na jednostkę czasu jest równy:

$$[(1+\Theta)-(1-\alpha)(1+\xi)]\,\lambda m_1.$$

Ponieważ oczekiwana wartość roszczenia na jednostkę czasu wynosi λm_1, więc aby nie nastąpiła ruina cedenta jego przychód na jednostkę czasu musi

przewyższać oczekiwaną wartość roszczeń. Oznacza to, że musi być spełniona nierówność:

$$[(1+\Theta)-(1-\alpha)(1+\xi)]\,\lambda m_1 > \alpha\lambda m_1,$$

czyli

$$\alpha > 1-\frac{\Theta}{\xi}.$$

Wcześniej powiedzieliśmy, że za miernik bezpieczeństwa przyjmuje się współczynnik dopasowania R. Pojawia się w tym momencie pytanie o związek między współczynnikami dopasowania R a udziałem cedenta w wypłacanym roszczeniu. Niestety w przypadku ogólnym takiego związku nie da się wyprowadzić.

Rozpatrzmy zatem następujący przykład.

Przykład 1

Przyjmijmy, że dystrybuanta zmiennej losowej wielkości roszczeń ma postać $F_X(x)=1-e^{-0,5x}$.

Wtedy, korzystając z równania (2), otrzymujemy:

$$\lambda+[(1+\Theta)-(1-\alpha)(1+\xi)]\cdot\lambda\cdot 2\cdot R=\frac{\lambda}{1-2\alpha R}.$$

Stąd współczynnik dopasowania jest równy:

$$R=\frac{\Theta-(1-\alpha)\xi}{[(1+\Theta)-(1-\alpha)(1+\xi)]2\alpha}.$$

Z ostatniego wzoru wynika, że współczynnik dopasowania zależy nie tylko od udziału α cedenta w wypłaconym roszczeniu, ale również od współczynników bezpieczeństwa cedenta Θ i reasekuratora ξ.

Tabela 1 zawiera wartość współczynnika dopasowania R dla wybranych wartości α oraz współczynników bezpieczeństwa Θ, przy założeniu, że $\Theta=\xi$.

Tabela 1. Wartość współczynnika *R* dopasowania dla reasekuracji proporcjonalnej

α	Współczynnik bezpieczeństwa Θ			
	0,2	0,4	0,8	1,0
0,2	0,4167	0,7143	1,1111	1,2500
0,4	0,2083	0,3571	0,5556	0,6250
0,6	0,1389	0,2381	0,3704	0,4167
0,8	0,1042	0,1786	0,2778	0,3125
1,0	0,0833	0,1429	0,2222	0,2500

Źródło: Dane przykładowe.

Otrzymany wzór na współczynnik dopasowania możemy wykorzystać do ustalenia optymalnego udziału α cedenta w wypłaconym roszczeniu, przy z góry przyjętych wartościach współczynników bezpieczeństwa cedenta i reasekuratora.

Przykład 2

Przyjmijmy, że $\Theta = 0{,}7$ i $\xi = 0{,}8$. Ponieważ, jak wykazaliśmy wcześniej, $\alpha > 1 - \frac{\Theta}{\xi}$, więc $\alpha > 0{,}125$, co oznacza, że cedent musi pokryć przynajmniej 12,5% każdego roszczenia. Dla przyjętych wartości współczynników bezpieczeństwa wzór na współczynnik dopasowania przyjmuje postać:

$$R = \frac{0{,}8\alpha - 0{,}1}{3{,}6\alpha^2 - 0{,}2\alpha}.$$

Zadaniem naszym jest wyznaczyć taką wartość α, dla której współczynnik dopasowania przyjmuje wartość maksymalną. Z wykorzystaniem rachunku różniczkowego otrzymujemy, że współczynnik dopasowania osiąga wartość maksymalną dla $\alpha = 0{,}2182$, co oznacza, że prawdopodobieństwo ruiny cedenta będzie minimalne (przy przyjętych założeniach), gdy jego udział w podziale ryzyka wyniesie 0,2182.

Dotychczasowe rozważania dotyczyły reasekuracji proporcjonalnej (kwotowej). Inaczej wygląda sytuacja w przypadku reasekuracji nieproporcjonalnej. Rozważmy jeden z typów reasekuracji nieproporcjonalnej, a mianowicie **umowę nadwyżki szkody**. W tej umowie cedent ustala swój udział własny d zwany priorytetem lub franszyzą. Jeżeli X oznacza wielkość pojedynczego roszczenia, to podział poniesionych kosztów między cedenta i reasekuratora jest następujący:

- cedent $\quad X_{\text{ced}} = \min(X, d)$,
- reasekurator $\quad X_{\text{re}} = \max(0,\ X - d)$.

Zatem w umowie nadwyżki szkody do kwoty d całe roszczenie spłaca cedent, a po jej przekroczeniu nadwyżkę spłaca reasekurator. Jak powiedzieliśmy wcześniej, przed reasekuracją wielkość składki na jednostkę czasu wynosi $(1+\Theta)\lambda m_1$. Przychód reasekuratora na jednostkę czasu wynosi $(1+\xi)\lambda E(X_{\text{re}})$. Jeżeli wystąpi roszczenie, to cedent płaci $X_{\text{ced}} = \min(X, d)$, a jego przychód na jednostkę czasu wynosi $(1+\Theta)\lambda m_1 - (1+\xi)\lambda E(X_{\text{re}})$. Jeżeli X ma dystrybuantę F_X, to X_{ced} ma dystrybuantę postaci:

$$F_{X_{\text{ced}}}(x) = \Pr(X_{\text{ced}} \le x) = \begin{cases} F_X(x) & \text{dla} \quad x < d, \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge d. \end{cases}$$

Wtedy wzór (2) przybiera postać:

$$\lambda + [(1+\Theta)\lambda \cdot m_1 - (1+\xi)\lambda E(X_{re})] \cdot R = \lambda \left(\int_0^d e^{Rx} f(x) dx + e^{Rd}(1 - F_X(d)) \right).$$

Przykład 3

Jeżeli przyjmiemy, że roszczenia mają złożony rozkład Poissona z parametrem λ i funkcją $f(x) = 0{,}8$ dla $0 < x < 10$, a udział własny cedenta wynosi d, to ostatnie równanie ma postać:

$$1 + \left[(1+\Theta) \cdot 40 - 40(1+\xi) \cdot \left(1 - \frac{d}{10}\right)^2 \right] \cdot R = 0{,}8 \frac{1}{R} \left(e^{Rd} - 1\right) + e^{Rd}(1 - 0{,}8d).$$

Równanie to może posłużyć do wyliczenia współczynnika dopasowania dla różnych wariantów współczynników bezpieczeństwa i udziału własnego cedenta.

Należy jednak pamiętać, że przychód cedenta na jednostkę czasu powinien być większy od oczekiwanych roszczeń na jednostkę czasu (po obliczeniu reasekuracji). Powinna być zatem spełniona nierówność:

$$(1+\Theta)\lambda m_1 - (1+\xi)\lambda \cdot E(X_{re}) > \lambda m_1 - \lambda E(X_{re}).$$

Przyjmując ponownie, że roszczenia mają rozkład Poissona z parametrami takimi jak poprzednio, otrzymujemy następującą nierówność:

$$-\xi d^2 + 20\xi d + 100\Theta - 100\xi > 0.$$

Jeżeli przyjmujemy, podobnie jak w przypadku reasekuracji proporcjonalnej, że $\Theta = 0{,}7$ i $\xi = 0{,}8$, to rozwiązując ostatnią nierówność, otrzymamy, że umowa reasekuracyjna jest korzystna dla cedenta, gdy jego udział własny jest z przedziału od 6,65 do 19,35.

Wybór odpowiedniej formy reasekuracji jest zagadnieniem trudnym. Można jednak wykazać, że – przy pewnych założeniach – reasekuracja nadwyżki szkody jest przynajmniej tak samo dobra jak reasekuracja proporcjonalna.

Literatura

[1] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial mathematics*, The Society of Actuaries, 1986

[2] Dickson D.C.M., Waters H.R., *Ruin theory*, Heriot – Watt University, Edinburgh 1992

[3] Montalbetti E., *Reasekuracja*, PWE, Warszawa 1970

REINSURANCE AND RUIN PROBABILITY OF AN INSURANCE COMPANY

Summary

In this paper the model of financial reserves and the upper bound of ruin probability of an insurance company are introduced.

Next, the influence of this reinsurance on probability of ruin is considered.