Małgorzata DOMAN
Katedra Matematyki Stosowanej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

Ryszard DOMAN
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

OCENA PRZYDATNOŚCI MODELI BL-GARCH W SZACOWANIU WARTOŚCI ZAGROŻONEJ INDEKSU WIG20

Wstęp

Wartość zagrożona (*Value at Risk*, VaR) jest obecnie standardową miarą, za pomocą której analitycy finansowi (zarówno zatrudnieni w instytucjach finansowych, jak i w instytucjach kontrolujących) kwantyfikują ryzyko rynkowe. W odniesieniu do portfela VaR szacuje, jaka jego część w danym okresie zagrożona jest stratą, przy danym poziomie istotności. Dokładniej, VaR jest liczbą zdefiniowaną w taki sposób, że prawdopodobieństwo, iż portfel straci na wartości więcej niż jego VaR, w konkretnym horyzoncie czasowym, jest równe z góry przyjętej liczbie α. Wielka popularność, jaką VaR zdobył wśród praktyków finansowych, wynika z prostoty jego koncepcji: instrument ten sprowadza ocenę ryzyka rynkowego związanego z portfelem do wyznaczenia jednej liczby – straty zagrażającej z danym prawdopodobieństwem. Wyliczanie wielkości VaR jest ważne zarówno dla oceny kondycji instytucji przyjmujących na siebie ryzyko, jak i dla organów kontrolujących te instytucje. Przy obliczaniu VaR negatywne konsekwencje dla działania instytucji implikuje tak samo jego przeszacowanie, jak i niedoszacowanie. W pierwszym wypadku konsekwencją może być suboptymalna alokacja kapitału, powodująca niepotrzebne obniżenie zysku. Zaniżona prognoza VaR może natomiast skutkować zachwianiem stabilności finansowej w razie ziszczenia się niekorzystnych okoliczności.

Mimo że VaR wydaje się prostym i intuicyjnie jasnym pojęciem, to metody jego oceny nie są jednoznacznie określone, gdyż wiążą się z wyznaczaniem kwantyla nieznanego na ogół rozkładu zwrotu z instrumentu finansowego w rozpatrywanym przedziale czasu. Istniejące modele szacowania wartości zagrożonej można ogólnie podzielić na trzy kategorie: parametryczne (RiskMetrics, modele GARCH), nieparametryczne (symulacje historyczne, modele hybrydowe) i semiparametryczne (teoria wartości ekstremalnych, regresja kwantylowa, CAViaR, modele GARCH dopasowane metodą quasi-największej wiarygodności).

W niniejszym artykule prognozowany jest VaR dla indeksu WIG20, przy wykorzystaniu oszacowań zmienności uzyskanych za pomocą modeli AR-GARCH oraz modeli dwuliniowych BL-GARCH.

Pierwszy model typu GARCH został wprowadzony przez Bollerslleva [1], jako uogólnienie modelu ARCH zaproponowanego przez Engle'a [6]. Obecnie różnego typu modele GARCH tworzą liczną rodzinę i są najbardziej znanymi i najczęściej stosowanymi modelami zmienności.

Modele dwuliniowe po raz pierwszy rozważane były w pracach Grangera i Andersena [9] oraz Subba Rao [13]. Jako szczególne przypadki obejmują one liniowy model średniej ruchomej (MA) oraz liniowy model autoregresyjny (AR). Na model dwuliniowy można również patrzeć jak na model ARMA ze zmieniającymi się w czasie współczynnikami części autoregresyjnej. Uzyskane za pomocą modeli BL-GARCH prognozy wartości zagrożonej są zwykle dość dobrej jakości ze względu na ich zdolność do opisywania składowej nieliniowej występującej w średniej. Modele BL-GARCH są znacznie mniej popularne niż standardowe modele GARCH. Być może jest to związane z tym, że w badaniach empirycznych trudno odróżnić procesy dwuliniowe od procesów opisywanych przez bardzo popularne modele ARMA-GARCH [15].

1. Wartość zagrożona

Wartość zagrożoną, VaR, określa się zwykle [10] za pomocą równości

$$P(P_t \leqslant P_{t-1} - \mathrm{VaR}) = \alpha, \tag{1}$$

gdzie P_t jest wartością analizowanego instrumentu finansowego w momencie t. Zatem VaR jest wielkością straty, jaka z prawdopodobieństwem α nie zostanie przekroczona w okresie od $t-1$ do t.

BIBLIOTEKA AE

Analogicznie można określić VaR jako procentową stratę wartości instrumentu. Jeśli rozważamy logarytmiczne procentowe stopy zwrotu

$$r_t = 100(\ln P_t - \ln P_{t-1}), \tag{2}$$

to wersja procentowa określenia (1) jest w przybliżeniu równoważna zapisowi

$$P(r_t \leqslant -\mathrm{VaR}) = \alpha, \tag{3}$$

a zatem wielkość $-\mathrm{VaR}$ jest α-kwantylem rozkładu procentowego zwrotu logarytmicznego r_t.

Finansowe szeregi zwrotów wykazują charakterystyczne właściwości, mające istotny wpływ na oszacowania VaR (zgrupowania zmienności, grube ogony), które są odzwierciedlane w zmieniających się w czasie rozkładach warunkowych. Z tego powodu metody bardziej wyrafinowane niż symulacja historyczna, uwzględniające dynamikę zwrotów, modelują VaR przy użyciu kwantyli rozkładów warunkowych.

Niech $\mathcal{F}_t$ będzie zbiorem informacji dostępnych w dniu t. Jednodniowy warunkowy VaR na poziomie istotności α dla strony zajmującej pozycję długą w rozważanym instrumencie, można formalnie zdefiniować za pomocą kwantyla warunkowego:

$$\mathrm{VaR}^l_{t+1}(\alpha) = \sup\{v\colon P(r_{t+1} \leqslant -v | \mathcal{F}_t) \geqslant \alpha\}. \tag{4}$$

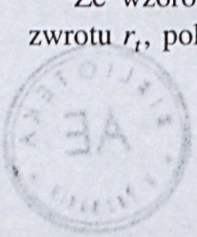
Dla strony zajmującej pozycję krótką, która ponosi stratę, gdy cena instrumentu wzrasta, jednodniowy VaR na poziomie istotności α definiowany jest jako liczba $\mathrm{VaR}^s_{t+1}(\alpha)$ określona wzorem

$$\mathrm{VaR}^s_{t+1}(\alpha) = \sup\{v\colon P(r_{t+1} \geqslant v | \mathcal{F}_t) \geqslant \alpha\}. \tag{5}$$

Przy powyższym podejściu unika się niejednoznaczności w definicji VaR w sytuacji, gdy rozkład warunkowy $r_{t+1}|\mathcal{F}_t$ zawiera atomy. Poza tym wypadkiem, definicje (4) i (5) mają równoważne postacie

$$\begin{aligned} P(r_{t+1} \leqslant -\mathrm{VaR}^l_{t+1}(\alpha) | \mathcal{F}_t) &= \alpha, \\ P(r_{t+1} \geqslant \mathrm{VaR}^s_{t+1}(\alpha) | \mathcal{F}_t) &= \alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

Ze wzorów (4) i (5) wynika, że $\mathrm{VaR}^s_{t+1}(\alpha)$ dla instrumentu o procesie zwrotu r_t, pokrywa się z $\mathrm{VaR}^l_{t+1}(\alpha)$ dla instrumentu o procesie zwrotu $-r_t$.



Jednak, ze względu na często występującą w rozkładach zwrotów asymetrię (rozkłady zmiennych r_t i $-r_t$ nie są jednakowe), w prezentowanym badaniu oszacowania empiryczne VaR dokonywane są oddzielnie dla pozycji długiej i krótkiej.

Procentowy zwrot logarytmiczny aproksymuje procentową zmianę wartości pozycji finansowej, zatem przy naszym ujęciu $\mathrm{VaR}^l_{t+1}(\alpha)$ wyrażony jest w procentach.

2. Oszacowania VaR uzyskane za pomocą parametrycznych modeli zmienności

Założono, że procentowy zwrot logarytmiczny z rozważanego instrumentu finansowego generowany jest przez proces

$$r_t = \mu_t + y_t, \tag{7}$$

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \tag{8}$$

gdzie $\mu_t = E(r_t|\mathcal{F}_{t-1})$, a $\varepsilon_t \sim \mathrm{iid}(0, 1)$.

Ze wzorów (7) i (8) wynika, że wtedy $\sigma_t^2 = E(y_t^2|\mathcal{F}_{t-1})$ jest wariancją warunkową zwrotu r_t, pod warunkiem informacji dostępnej do chwili $t-1$. Warunkowe odchylenie standardowe σ_t określa zmienność rozważanego instrumentu.

Jeśli z_α oznacza α-kwantyl rozkładu zmiennej ε_t, to jednodniowy VaR dla długiej lub krótkiej pozycji na poziomie istotności α wyraża się, odpowiednio, wzorem

$$\mathrm{VaR}^l_{t+1}(\alpha) = -\mu_{t+1|t} - \sigma_{t+1|t} z_\alpha, \tag{9}$$

$$\mathrm{VaR}^s_{t+1}(\alpha) = \mu_{t+1|t} + \sigma_{t+1|t} z_{1-\alpha}, \tag{10}$$

przy czym $\mu_{t+1|t}$ i $\sigma_{t+1|t}$ oznaczają prognozy jeden dzień naprzód, odpowiednio, średniej warunkowej i zmienności. Ponieważ dla rozkładu symetrycznego zachodzi równość $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$, wielkości $-\mathrm{VaR}^l_{t+1}(\alpha)$ i $\mathrm{VaR}^s_{t+1}(\alpha)$ są w takim przypadku symetryczne względem prognozy $\mu_{t+1|t}$ średniej warunkowej.

Przy powyższym podejściu do wyznaczania VaR, kluczowe znaczenie ma więc jakość prognoz zmienności. Jakość ta zależy od zdolności prognostycznych przyjętego modelu zmienności.

3. Metody oceny jakości prognoz VaR

W prezentowanej w tym artykule analizie empirycznej wyznaczono wartość zagrożoną na poziomie istotności α równym 5%, 2,5% i 1%. Jako wskaźnik jakości wyliczeń przyjęto udział przekroczeń zrealizowanych zwrotów. Z definicji, udział f_l przekroczeń dla pozycji długiej jest równy stosunkowi liczby zwrotów mniejszych od $-\mathrm{VaR}^{l}_{t+1}(\alpha)$ do liczby wszystkich rozpatrywanych zwrotów. Podobnie w przypadku pozycji krótkiej, f_s jest stosunkiem liczby zwrotów przekraczających $\mathrm{VaR}^{s}_{t+1}(\alpha)$ do liczby wszystkich rozpatrywanych zwrotów. Ponieważ wyliczanie empirycznego udziału przekroczeń jest równoważne z określaniem ciągów złożonych z zer i jedynek, możliwe jest testowanie hipotezy $\mathrm{H}_0: f=\alpha$, przeciwko alternatywie $\mathrm{H}_1: f\neq\alpha$, przy czym f oznacza f_l albo f_s. Test ten jest testem ilorazu wiarygodności ze statystyką

$$LR=2\left(\ln\left(\left(\frac{N}{T}\right)^{N}\left(1-\frac{N}{T}\right)^{T-N}\right)-\ln(\alpha^{N}(1-\alpha)^{T-N})\right), \tag{11}$$

gdzie N jest liczbą przekroczeń VaR przy liczbie obserwacji T. W literaturze poświęconej modelom VaR test ten nosi nazwę testu Kupca [11]. Przy prawdziwej hipotezie zerowej statystyka LR ma asymptotyczny rozkład $\chi^2(1)$. Należy zwrócić uwagę na fakt, że hipoteza zerowa testu Kupca jest odrzucana zarówno w przypadku modelu wyliczającego VaR w sposób nadmiernie niefrasobliwy (niedoszacowanie potencjalnej straty), jak i dla modelu nadmiernie konserwatywnego (przeszacowanie VaR).

Oprócz testu Kupca stosowane są jeszcze dwie miary jakości modelu VaR. Pierwszą z nich jest tzw. oczekiwany niedobór (ESF1), zdefiniowany jako wartość oczekiwana straty, pod warunkiem że strata będzie większa niż VaR (por. [12]). Druga ze stosowanych miar, ESF2, jest średnią arytmetyczną stosunków wartości zwrotów, dla których nastąpiło przekroczenie, do odpowiednich wartości VaR, czyli średnim stosunkiem zrealizowanej straty do straty oczekiwanej. Zarówno statystyka Kupca, jak i pozostałe dwie miary są stosowane i do oszacowań VaR w próbie, i do prognoz VaR. O ile test Kupca może być przydatny w ustalaniu rankingu modeli VaR, o tyle miary ESF1 i ESF2 formalnie nie są do tego celu przeznaczone. Niosą one jednak użyteczne dla inwestora informacje o tym, ile może średnio stracić w wypadku, gdy model zawiedzie.

4. Modele AR-GARCH

Uogólniony model autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej oznaczany symbolem GARCH(p, q) opisuje się równaniami

$$r_t = \mu_t + y_t, \tag{12}$$

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \tag{13}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \tag{14}$$

gdzie: $\mu_t = E(r_t|\mathcal{F}_{t-1})$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, 1)$, $\omega > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$ oraz $\beta_j \geqslant 0$.

Przy założeniu, że

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1,$$

wariancja bezwarunkowa zmiennej y_t jest skończona i równa

$$E(y_t^2) = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j}.$$

Prognoza zmienności na h dni naprzód, wyliczana za pomocą modelu GARCH(p, q), wyraża się wzorem

$$\sigma_{t+h|t}^2 = E(\sigma_{t+h}^2|\mathcal{F}_t) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t+h-i|t}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t+h-j|t}^2, \tag{15}$$

gdzie: $y_{t+i|t}^2 = \sigma_{t+i|t}^2$ dla $i > 0$ oraz $y_{t+i|t}^2 = y_{t+i}^2$ i $\sigma_{t+i|t}^2 = \sigma_{t+i}^2$ dla $i \leqslant 0$.

Ze względu na to, że szeregi stóp zwrotu instrumentów finansowych wykazują często podwyższoną kurtozę rozkładów warunkowych, rozważa się również modele, w których rozkładem zmiennej ε_t jest standaryzowany rozkład t Studenta z ν stopniami swobody [2]. Jest to rozkład symetryczny o gęstości danej wzorem

$$g(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{z^2}{\nu-2}\right)^{-(\nu+1)/2}, \tag{16}$$

gdzie Γ jest standardową funkcją gamma. Rozkład ten, przy liczbie stopni swobody dążącej do nieskończoności, jest zbieżny do standardowego rozkładu normalnego. Dla $\nu > 4$, standaryzowany rozkład t Studenta ma moment rzędu czwartego równy $\frac{3(\nu-2)}{\nu-4}$. Kurtoza rozkładu warunkowego zmiennej y_t jest więc większa niż w przypadku rozkładu normalnego innowacji ε_t. Liczba stopni swobody, ν, nie musi być określona z góry, lecz jest estymowana wraz z pozostałymi parametrami modelu.

Empiryczne szeregi finansowe charakteryzują się często również skośnością. W celu uwzględnienia tego zjawiska przy modelowaniu, stosuje się skośny rozkład t Studenta ([7], [8]). Przy założeniu że $\nu > 2$, zmienna Z ma standaryzowany skośny rozkład t Studenta, $Z \sim \text{SKST}(0, 1, \xi, \nu)$, jeśli jej gęstość wyraża się wzorem

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2}{\xi+\xi^{-1}} sg(\xi(sz+m)), & \text{gdy} \quad z < -\frac{m}{s}, \\ \frac{2}{\xi+\xi^{-1}} sg\left(\frac{sz+m}{\xi}\right), & \text{gdy} \quad z \geqslant -\frac{m}{s}, \end{cases} \tag{17}$$

gdzie g jest gęstością standaryzowanego rozkładu t Studenta z ν stopniami swobody, określoną wzorem (16), ξ jest współczynnikiem asymetrii, a

$$m = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}(\xi - \xi^{-1}) \quad \text{oraz} \quad s^2 = (\xi^2 + \xi^{-2} - 1) - m^2 \tag{18}$$

przedstawiają średnią i wariancję odpowiadającego rozkładu niestandaryzowanego. Współczynnik asymetrii $\xi > 0$ spełnia równość $\frac{P(Z \geqslant -m/s|\xi)}{P(Z < -m/s|\xi)} = \xi^2$. Dla $\xi = 1$, zmienna Z ma, określony wcześniej, standaryzowany rozkład t Studenta.

5. Modele BL-GARCH

Model dwuliniowy w ogólnej postaci dany jest za pomocą równania

$$r_t = a_0 + \sum_{j=1}^{m} b_{0j} u_{t-j} + \sum_{i=1}^{p} \left(a_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} u_{t-j} \right) r_{t-i} + u_t, \tag{19}$$

gdzie o u_t zazwyczaj zakłada się, że jest białym szumem. Kowariancyjna stacjonarność procesu opisanego równaniem (19), przy założeniu że zmienne u_t są niezależne i mają jednakowy rozkład, dla którego istnieją wszystkie momenty, może być opisana przez układ dość złożonych ograniczeń nałożonych na parametry [14].

W badaniach stosowano modele dwuliniowe o następującej specyfikacji

$$a(L)r_t = a_0 + (\lambda(L)u_{t-1})(\psi(L)r_{t-1}) + \theta(L)u_t, \tag{20}$$

gdzie:

$$a(L) = 1 - a_1 L - \ldots - a_p L^p, \quad \lambda(L) = 1 + \lambda_1 L + \ldots + \lambda_{r-1} L^{r-1},$$

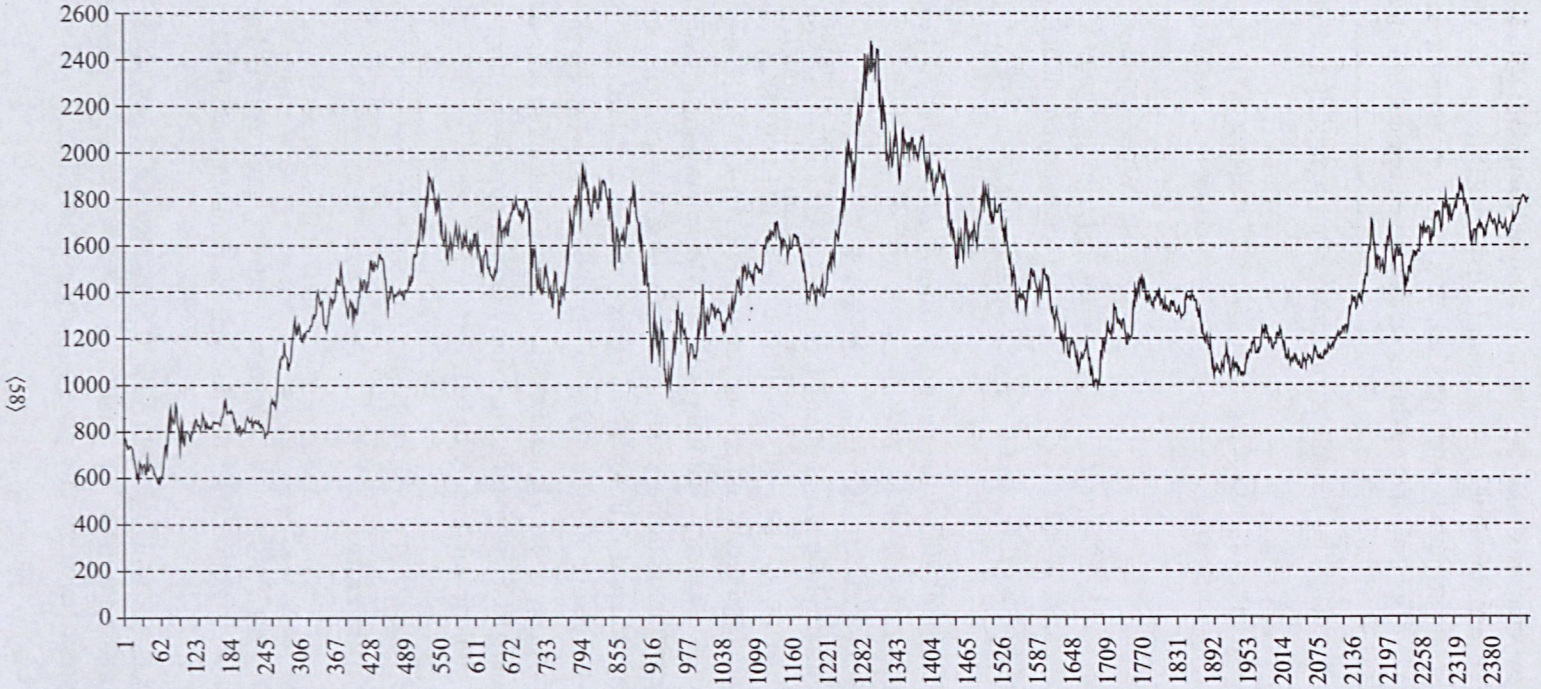
$$\psi(L) = \psi_1 + \psi_2 L + \ldots \psi_p L^{p-1}, \quad \theta(L) = 1 - \theta_1 L - \ldots - \theta_q L^q.$$

O zmiennych u_t zakłada się, że tworzą biały szum o zerowej średniej i wariancji σ^2 i że w szczególności mogą być modelowane za pomocą modeli klasy GARCH. W takiej sytuacji mówi się o modelach BL-GARCH. Model dwuliniowy jest naturalnym uogólnieniem modelu ARMA(p, q) otrzymywanego z równania (20) w przypadku, gdy wielomian $\psi(L)$ jest zerowy. O ile jednak inne tego typu uogólnienie, standardowe modele ARMA-GARCH, wprowadzają nieliniowość w wariancji warunkowej, o tyle w wypadku modelu dwuliniowego struktura nieliniowa pojawia się również w średniej warunkowej. Znaczenie specyfikacji dwuliniowej bierze się zatem z faktu, że może ona służyć do modelowania nieliniowości w średniej warunkowej za pomocą stosunkowo prostej struktury algebraicznej, jaką jest wielomian stopnia drugiego. Modele BL-GARCH są jednak znacznie rzadziej stosowane niż omówione w poprzednim punkcie modele AR-GARCH.

6. Wyniki empiryczne

Celem badania było porównanie prognoz wartości zagrożonej dla indeksu WIG20 na podstawie zmienności uzyskanych za pomocą modeli BL-GARCH i AR-GARCH.

Rozważono notowania indeksu WIG20 z okresu od 2 stycznia 1995 do 30 września 2004 roku (rys. 1). Statystyki opisowe szeregu procentowych zwrotów logarytmicznych zostały przedstawione w tabeli 1.



Rys. 1. Indeks WIG20 w okresie od 2 stycznia 1995 roku do 30 września 2004 roku

Tabela 1. Statystyki opisowe szeregu zwrotów indeksu WIG20. Okres od 2 stycznia 1995 do 30 września 2004 roku

Średnia	Odchylenie standardowe	Maksimum	Minimum	Skośność	Kurtoza
0,0361	1,9881	13,7088	−14,16083	−0,0787	6,7760

Na podstawie danych od 2 stycznia 1995 do 30 września 2003 roku (2184 obserwacje) estymowano parametry modeli zmienności. Na okres od 1 października 2003 do 30 września 2004 roku wyliczone zostały 253 jednodniowe prognozy zmienności i oparte na nich prognozy VaR. Wybór długości okresu prognozy jest podyktowany zaleceniami Bazylejskiego Komitetu Nadzoru Bankowego, dotyczącymi wstecznego testowania stosowanych modeli wartości zagrożonej w okresie pełnego roku.

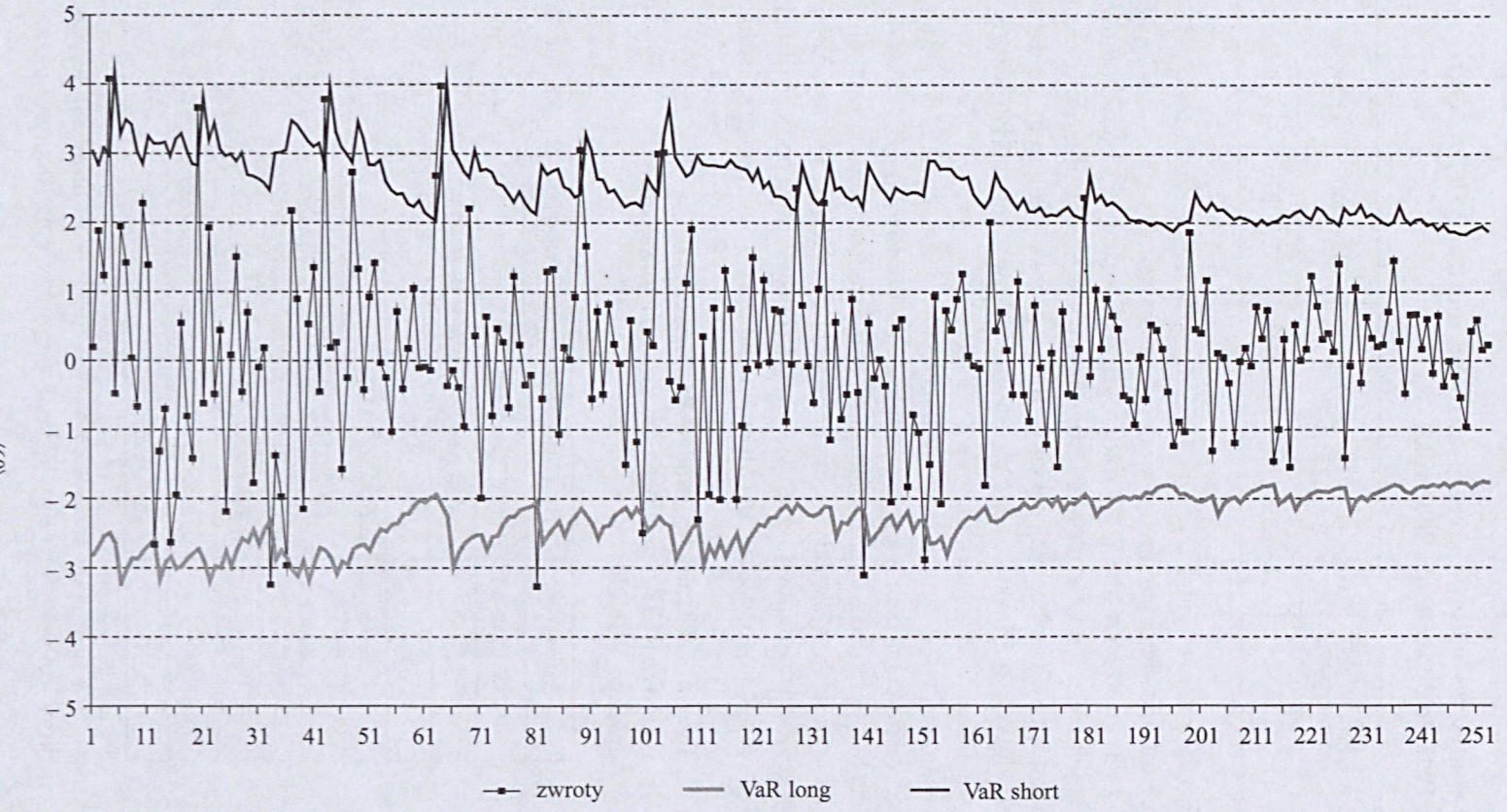
Oszacowania modeli zmienności (AR-GARCH i BL-GARCH) zostały wyznaczone za pomocą pracującego w środowisku Ox [5] pakietu TSMod40 J. Davidsona [3]. Parametry dopasowanych modeli przedstawione są w tabeli 2.

Najlepiej dopasowane okazały się model AR(1)-GARCH(1, 1) z rozkładem t Studenta oraz model dwuliniowy, w którym reszty są opisywane za pomocą modelu GARCH(1, 1) ze skośnym rozkładem t Studenta. Parametry obu modeli są istotne.

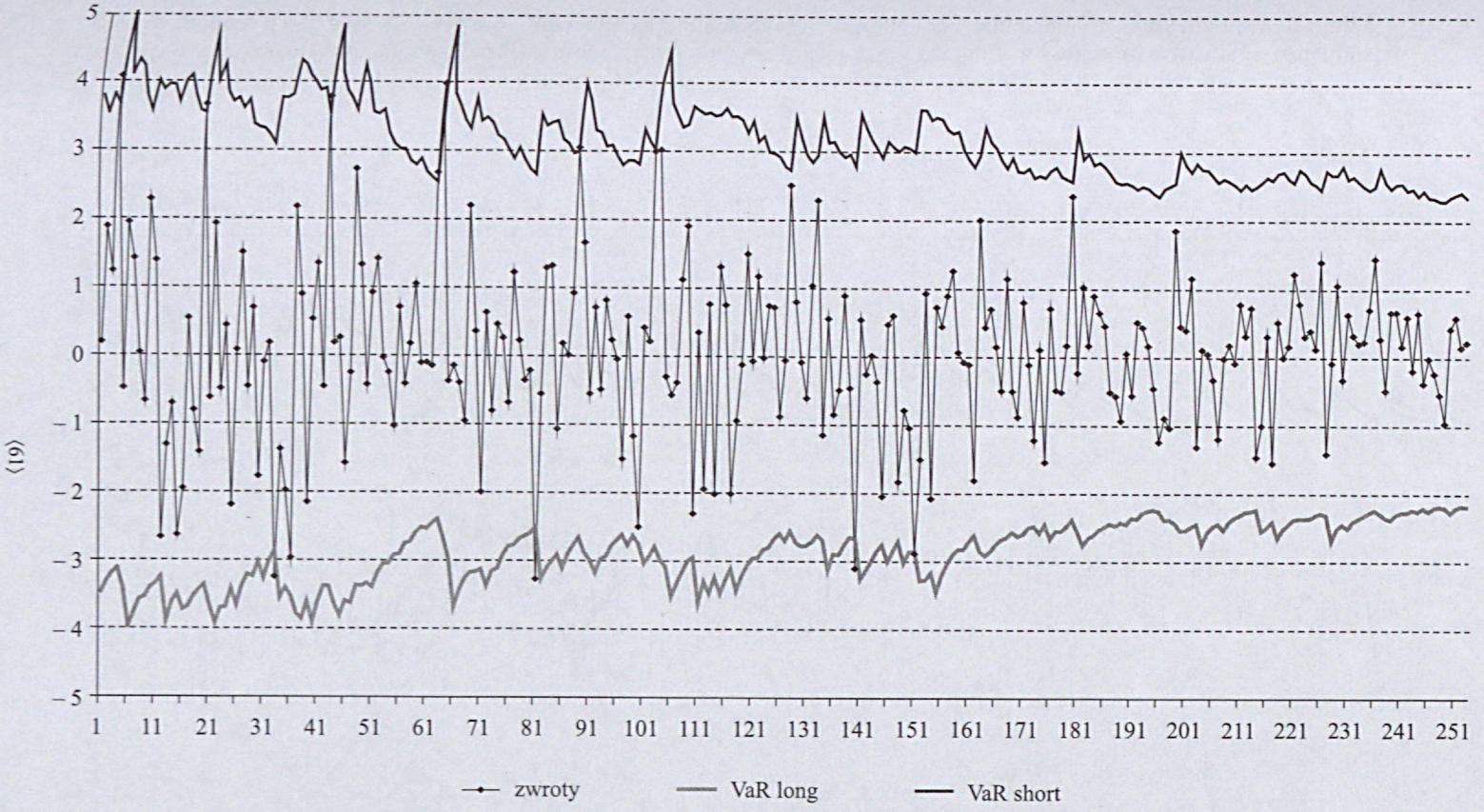
Tabela 2. Parametry modeli BL-GARCH i AR-GARCH dopasowanych do szeregu zwrotów indeksu WIG20

Szereg	BL-GARCH	AR-GARCH
Rozkład błędu	skośny t Studenta	t Studenta
a_1	0,0634 (0,0223)	0,0630 (0,0232)
ψ_1	0,0247 (0,0098)	
λ_1	0,7971 (0,3903)	
ω	0,1765 (0,0569)	0,2093 (0,0665)
α_1	0,1246 (0,0211)	0,1317 (0,0225)
β_1	0,8364 (0,0291)	0,8217 (0,0333)
$\sqrt{\nu}$	2,7635 (0,2082)	2,8508 (0,2164)
ξ	1,0677 (0,0298)	

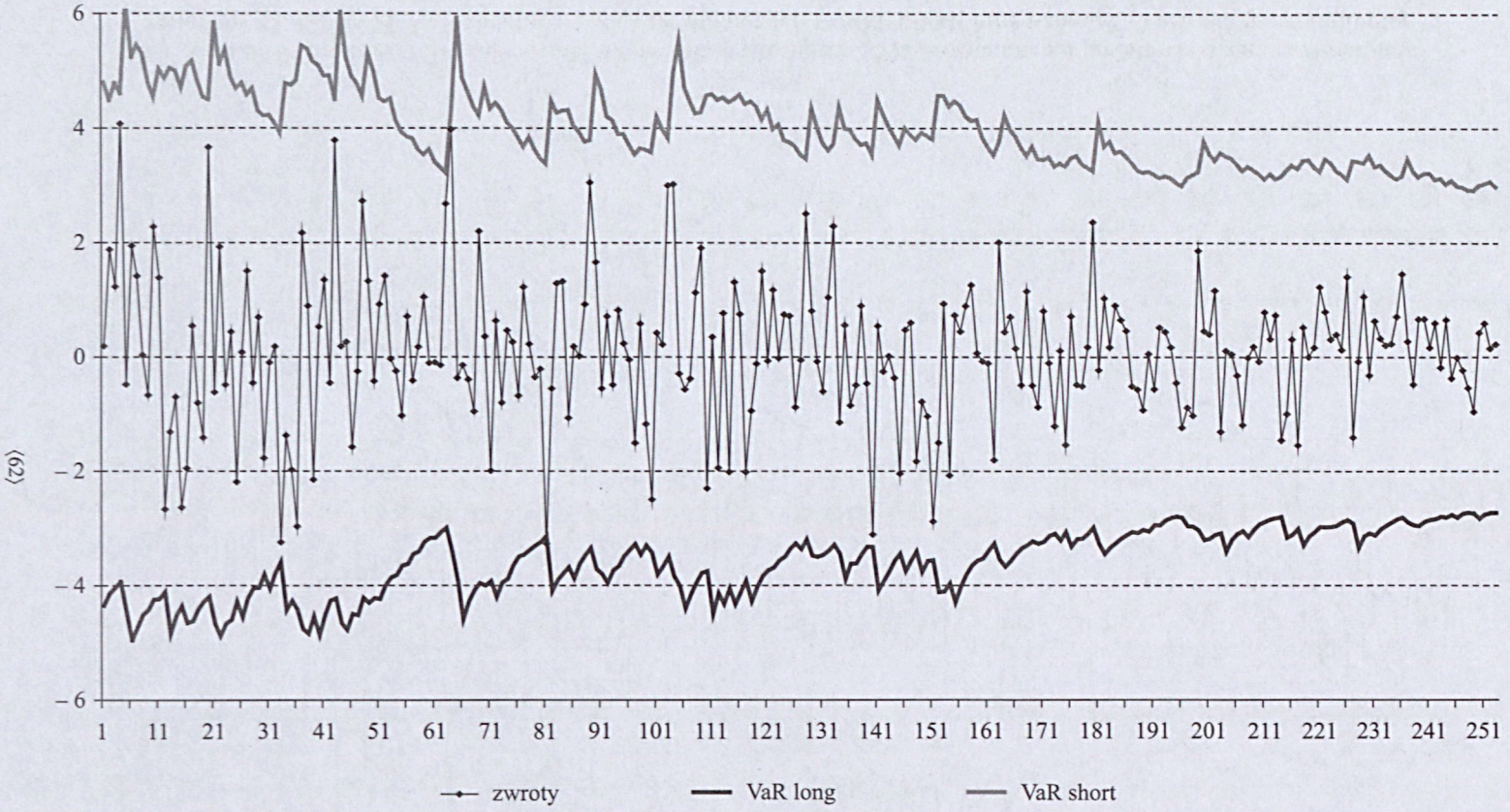
Rysunki 2-7 przedstawiają zestawienie wielkości procentowych logarytmicznych zwrotów indeksu WIG20 w okresie prognozy z uzyskanymi oszaco-



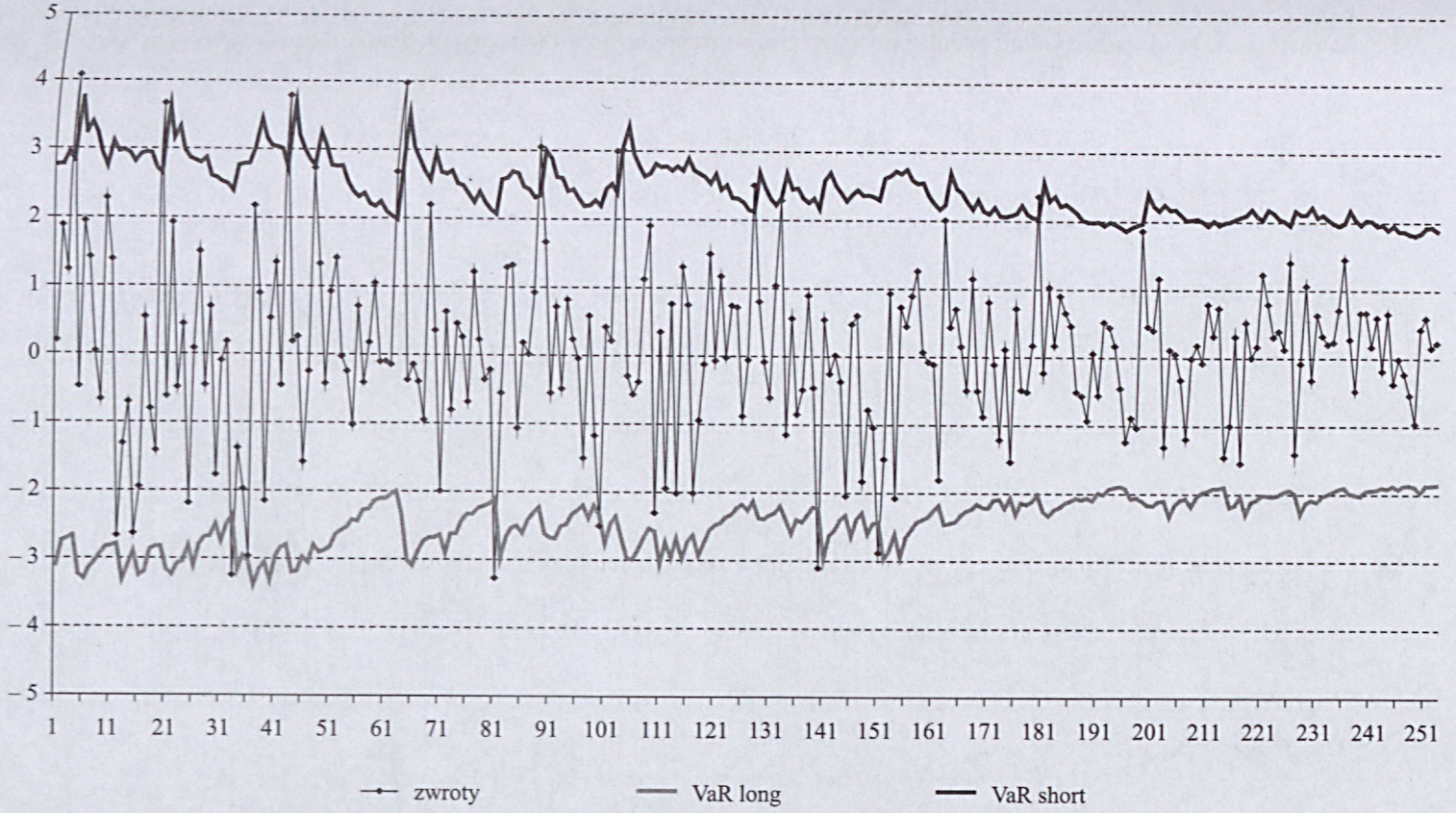
Rys. 2. Oszacowania wartości zagrożonej na poziomie istotności 5% otrzymane na podstawie prognoz zmienności z modelu BL-GARCH. VaR short oznacza VaR dla pozycji krótkiej, VaR long oznacza –VaR dla pozycji długiej



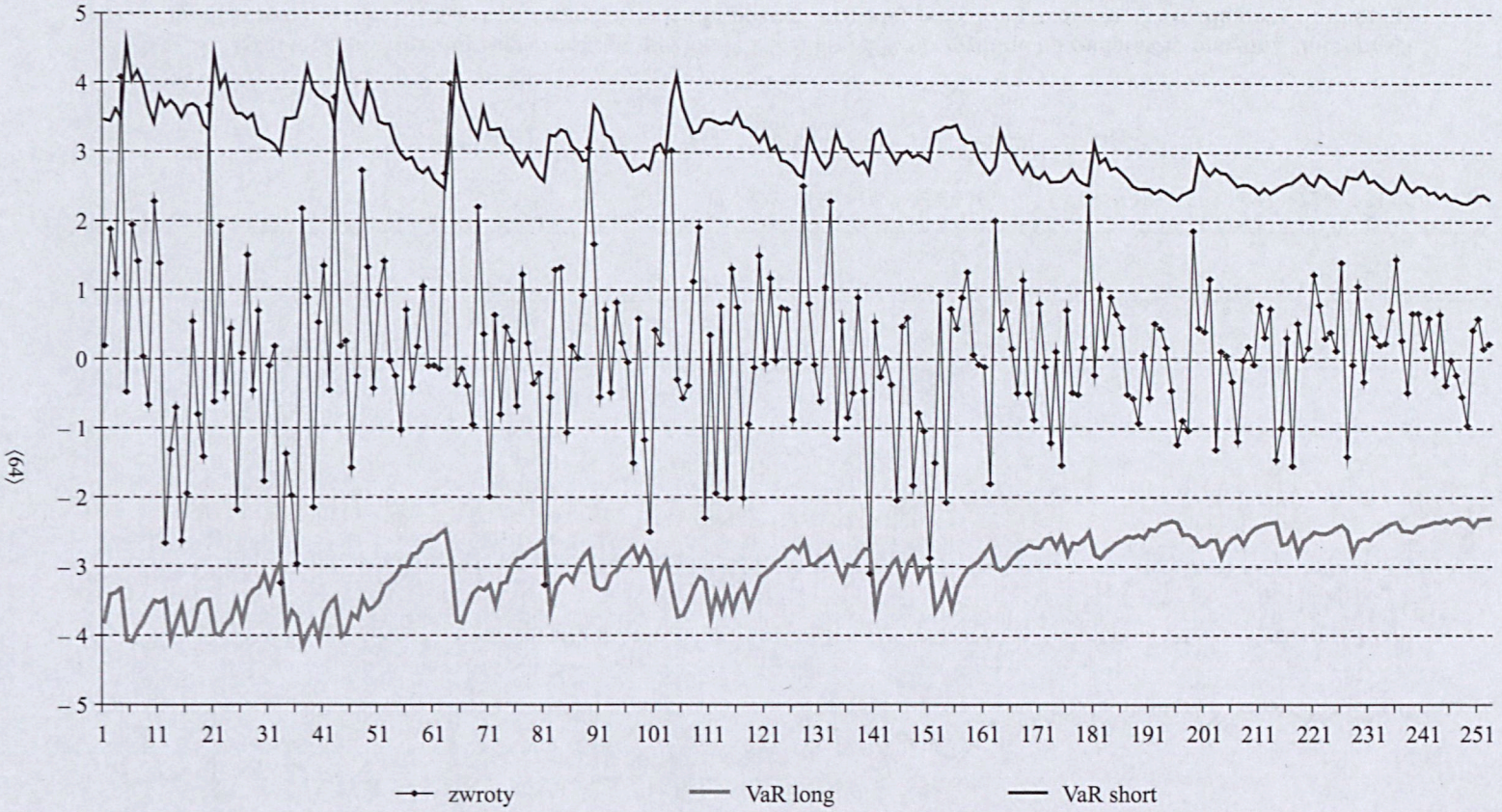
Rys. 3. Oszacowania wartości zagrożonej na poziomie istotności 2,5% otrzymane na podstawie prognoz zmienności z modelu BL-GARCH. VaR short oznacza VaR dla pozycji krótkiej, VaR long oznacza –VaR dla pozycji długiej



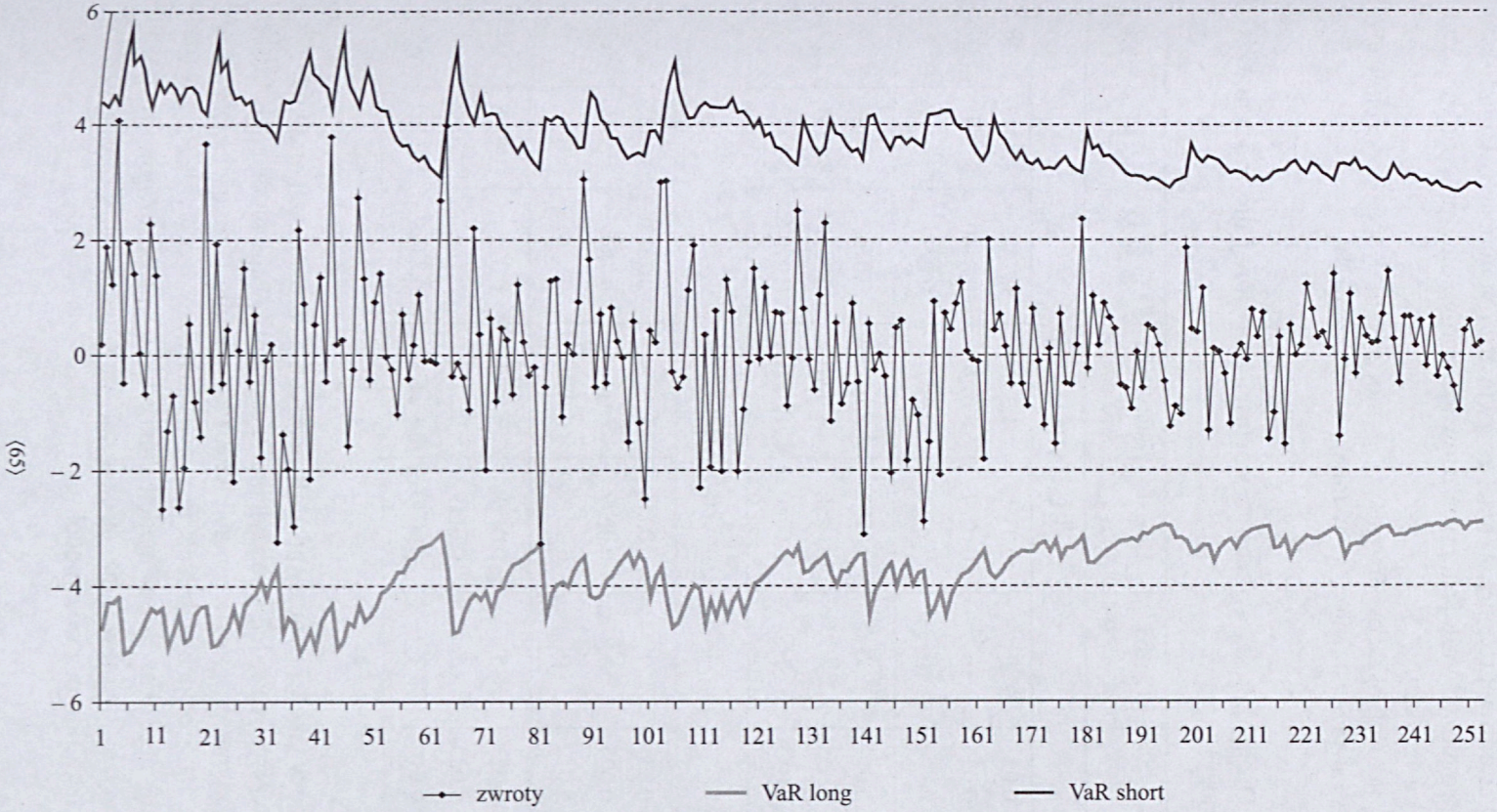
Rys. 4. Oszacowania wartości zagrożonej na poziomie istotności 1% otrzymane na podstawie prognoz zmienności z modelu BL-GARCH. VaR short oznacza VaR dla pozycji krótkiej, VaR long oznacza –VaR dla pozycji długiej



Rys. 5. Oszacowania wartości zagrożonej na poziomie istotności 5% otrzymane na podstawie prognoz zmienności z modelu AR-GARCH. VaR short oznacza VaR dla pozycji krótkiej, VaR long oznacza –VaR dla pozycji długiej



Rys. 6. Oszacowania wartości zagrożonej na poziomie istotności 2,5% otrzymane na podstawie prognoz zmienności z modelu AR-GARCH. VaR short oznacza VaR dla pozycji krótkiej, VaR long oznacza –VaR dla pozycji długiej



Rys. 7. Oszacowania wartości zagrożonej na poziomie istotności 1% otrzymane na podstawie prognoz zmienności z modelu AR-GARCH. VaR short oznacza VaR dla pozycji krótkiej, VaR long oznacza –VaR dla pozycji długiej

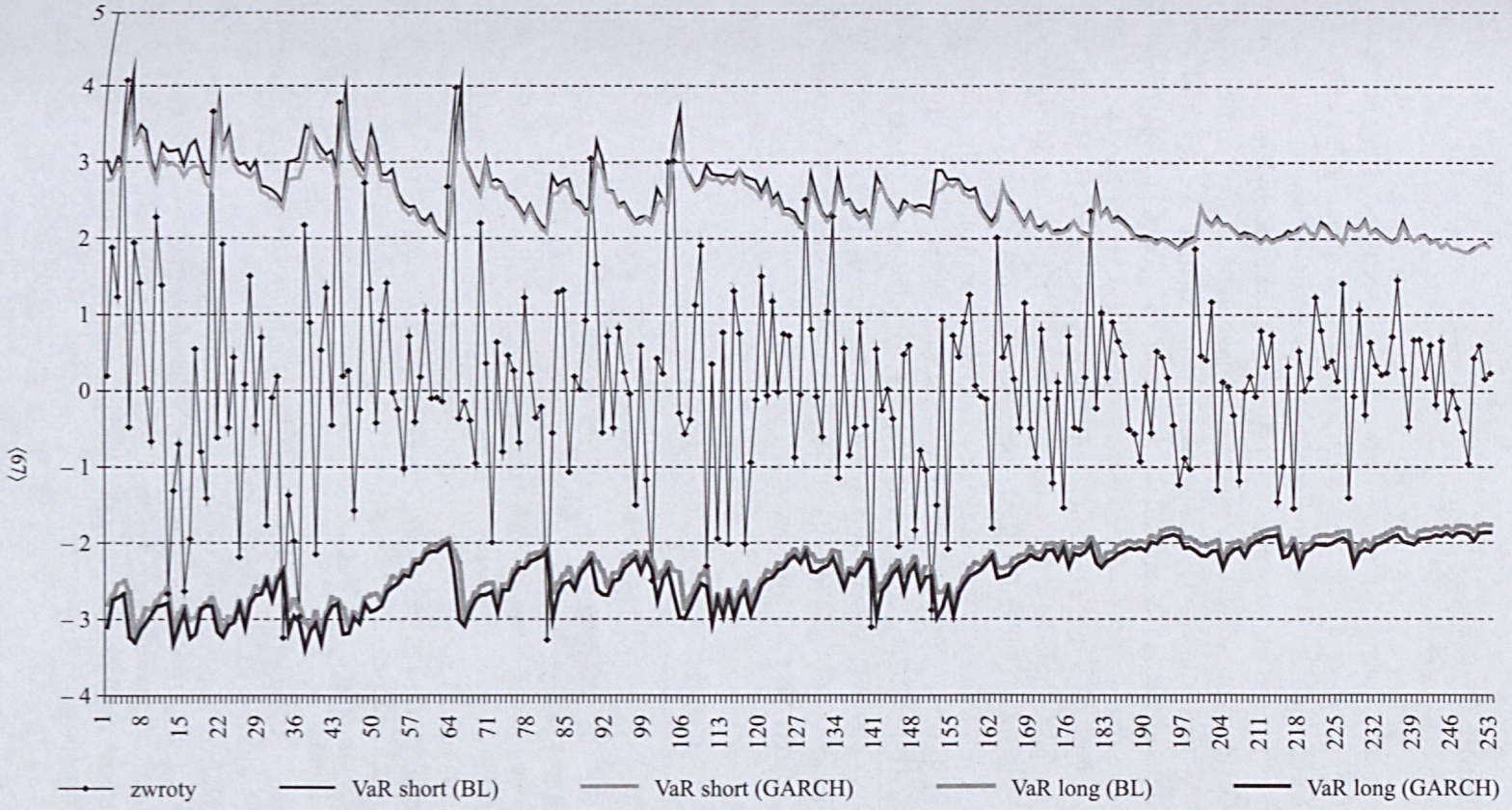
waniami wartości zagrożonej. Widać, że zwłaszcza w okresie ostatnich trzech miesięcy prognozy, VaR jest przeszacowany zarówno w przypadku pozycji długiej, jak i krótkiej.

Oceny jakości oszacowań VaR za pomocą testu Kupca i oczekiwanych wielkości strat przedstawione są w tabeli 3.

Tabela 3. Ocena jakości oszacowań wartości zagrożonej dla indeksu WIG20 (253 prognozy)

Pozycja	α	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka Kupca	p-wartość	ESF1	ESF2
BL-GARCH							
S	0,05	9	0,0356	1,2274	0,2672	3,2337	1,2829
S	0,025	6	0,0237	0,0174	0,8450	3,5391	1,0725
S	0,01	0	0	5,0855	0,0241	–	–
L	0,05	7	0,0277	3,1473	0,0761	2,9468	1,2656
L	0,025	4	0,0158	1,0061	0,3158	3,1251	1,1531
L	0,01	1	0,0040	1,2129	0,2708	3,2712	1,0448
AR-GARCH							
S	0,05	9	0,0356	1,2274	0,2672	3,2337	1,3282
S	0,025	7	0,0277	0,0715	0,7892	3,4519	1,1108
S	0,01	0	0	5,0855	0,0241	–	–
L	0,05	5	0,0198	6,2588	0,0124	2,9995	1,3146
L	0,025	3	0,0119	2,2192	0,1363	3,2065	1,1635
L	0,01	1	0,0040	1,2129	0,2708	3,2712	1,0043

Różnice w jakości oszacowań VaR opartych na prognozach otrzymanych za pomocą obu typów modeli są niewielkie. Pewną przewagę modele BL-GARCH uzyskały jedynie przy wyliczeniach VaR na poziomie istotności 2,5%. Prawie we wszystkich przypadkach VaR jest przeszacowany, co wynika z zawyżenia prognoz zmienności przez oba modele. Na rysunku 8 przedstawiono zestawienie zrealizowanych zwrotów oraz oszacowań VaR na poziomie istotności 5% uzyskanych za pomocą obu modeli.



Rys. 8. Zestawienie oszacowań wartości zagrożonej na poziomie istotności 5% otrzymanych na podstawie prognoz zmienności z modeli AR-GARCH i BL-GARCH. VaR short oznacza VaR dla pozycji krótkiej, VaR long oznacza –VaR dla pozycji długiej

Podsumowanie

Wartość zagrożona jest standardowo stosowaną miarą oceny ryzyka rynkowego. Dokładne prognozy VaR stanowią ważny element w procesie zarządzania ryzykiem. Jedna z możliwych metod szacowania VaR opiera się na wykorzystaniu prognoz zmienności (rozumianej jako warunkowe odchylenie standardowe zwrotu) otrzymywanych za pomocą różnego typu modeli zmienności. Najczęściej w tym kontekście stosowane są najpopularniejsze spośród tych modeli modele GARCH. W artykule porównano oszacowania VaR na podstawie prognoz zmienności ze standardowego modelu GARCH z oszacowaniami uzyskiwanymi za pomocą modeli dwuliniowych BL-GARCH. Modele BL-GARCH opisują nieliniowość nie tylko w wariancji, ale i w średniej warunkowej. W związku z tym potencjalnie powinny dostarczać lepszych prognoz zmienności i w związku z tym również lepszych oszacowań VaR. Uzyskane wyniki pokazują, że w wypadku indeksu WIG20 korzyść wynikająca z przyjęcia specyfikacji BL-GARCH zamiast AR-GARCH jest niewielka. Uzyskane prognozy VaR w obu wypadkach są przeszacowane. Bardziej satysfakcjonujące wyniki, związane tego typu metodami oszacowań VaR (dla krótszego okresu prognozy), zostały przedstawione w pracy [4].

Literatura

[1] Bollerslev, T., *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics 1986, 31, 307-327.

[2] Bollerslev, T., *A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return*, Review of Economics and Statistics 1987, 69, 542-547.

[3] Davidson, J., *Time Series Modelling Version 4.0*, Cardiff University 2004.

[4] Doman, M., Doman R., *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2004.

[5] Doornik, J.A., *Object Oriented Matrix Programming Using Ox 2.0*, Timberlake Consultants Press, London 1998.

[6] Engle, R.F., *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, Econometrica 1982 50, 987-1007.

[7] Fernández, C., Osiewalski, J., Steel, M.F.J., *Modelling and Inference with v-Spherical Distributions*, Journal of the American Statistical Association 1995 90, 1331-1340.

[8] Fernández, C., Steel, M.F.J., *On Bayesian Modelling of Fat Tails and Skewness*, Journal of the American Statistical Association 1998 93, 359-371.
[9] Granger, C., Andersen, A., *An Introduction to Bilinear Time Series Models*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1978.
[10] Jajuga, K., Kuziak, K., Papla, D., Rokita P., *Ryzyko wybranych instrumentów polskiego rynku finansowego*, Rynek Terminowy 2001 11, 133-140.
[11] Kupiec, P., *Techniques for Veryfying the Accuracy of Risk Management Models*, Journal of Derivatives 1995 2, 173-184.
[12] Scaillet, O., *Nonparametric Estimation and Sensitivity Analysis of Expected Shortfall* (*mimeo*), Université Catholique de Louvain, IRES 2000.
[13] Subba Rao, T., *On the Theory of Bilinear Models*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 1981 43, 244-255.
[14] Tong, H., *Non-Linear Time Series*: *A Dynamical System Approach*, Oxford University Press, Oxford 1990.
[15] Weiss, A.A., *ARCH and Bilinear Time Series Models*: *Comparison and Combination*, Journal of Business and Economic Statistics 1986 4, 59-70.

EVALUATION OF USEFULNESS OF BL-GARCH MODELS IN ESTIMATION OF VALUE AT RISK FOR THE INDEX WIG20

Summary

Value at risk (VaR) is a standard measure used to quantify financial market risk. Precise forecasts of VaR are a very important element of risk management process. Calculations of VaR for the stock index WIG20 presented in this paper are based on the volatility estimates provided by BL-GARCH and AR-GARCH models. Our finding is that in the case under scrutiny the volatility forecasts obtained by more complicated BL-GARCH models did not result in significantly more accurate VaR estimates.