Małgorzata Just
Krzysztof Piasecki

UOGÓLNIONA KRAŃCOWA STOPA SUBSTYTUCJI – ZASTOSOWANIE W ANALIZIE PORTFELOWEJ

1. Wstęp

Zakładamy, że na wynik pewnego procesu gospodarczego ma wpływ skończona liczba n różnych czynników kształtujących ten proces. Zbiór tych czynników będziemy nazywać dalej układem czynników. Stan j-tego czynnika będziemy charakteryzować poprzez wartość $x_j \in R^+$. W ten sposób każdy stan układu czynników zostanie opisany przez wektor stanów $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in X \subset (R^+)^n$, gdzie symbol X oznacza zbiór wszystkich potencjalnych stanów osiąganych przez badany układ czynników.

W ogólnym przypadku przedmiotem analizy ekonomicznej jest ocena przydatności wyróżnionej wartości wektora stanów $\bar{x}$ do osiągnięcia wysokiej jakości wyniku analizowanego procesu gospodarczego. Formalnym odzwierciedleniem tej oceny przydatności jest funkcja użyteczności $u : X \to R$. O zbiorze potencjalnych stanów X zakładać będziemy, że wartości opisujące poszczególne czynniki kształtujące analizowany proces są stymulantami użyteczności, co oznacza, że użyteczność jest funkcją rosnącą każdej swej zmiennej.

Punktem odniesienia do analizy ekonomicznej jest ustalony wektor stanów $\bar{x}_0 \in X$. Jednym z klasycznych narzędzi analizy jest krańcowa stopa substytucji MRS_{ij} zdefiniowana (porównaj [5]) za pomocą wyrażenia

$$MRS_{ij}(\bar{x}_0) = -\frac{\partial x_j}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x}_0)}{\dfrac{\partial u}{\partial x_j}(\bar{x}_0)}. \tag{1.1}$$

Wartość zdefiniowanej powyżej krańcowej stopy substytucji informuje, o ile jednostek powinniśmy zwiększyć wartość j-tego czynnika, aby przy ubytku jednej jednostki wartości stanu i-tego czynnika zachować wartość użyteczności całego układu czynników.

Stosowanie krańcowej stopy substytucji w postaci (1.1) wymaga stosowania zasady ceteris paribus głoszącej niezmienność stanów pozostałych czynników. W [1] Besada i Vazguez przedstawili bardzo silne uogólnienie pojęcia krańcowej stopy substytucji pozwalające na rezygnację z ograniczeń spowodowanych stosowaniem zasady ceteris paribus oraz pozwalające na umieszczenie wartości wektora stanów $\bar{x}$ w dowolnej przestrzeni Banacha. Praca poniższa powstała na marginesie analizy wyników z [1] i jest próbą adaptacji pojęcia uogólnionej krańcowej stopy substytucji do potrzeb analizy portfelowej.

2. *Uogólniona krańcowa stopa substytucji*

Rozważania nasze będziemy prowadzić na przestrzeni Banacha $< R^n, \|\cdot\| >$ (porównaj [4]), gdzie symbol $\|\cdot\|$ oznacza ustaloną normę. Niech $X \subset \left(R^+\right)^n$ oznacza otwarty i wypukły zbiór potencjalnych stanów osiąganych przez badany układ czynników, $\bar{x}_0 \in X$ jest ustalonym punktem odniesienia analizy i niech $u : X \to R$ będzie różniczkowalną, monotoniczną i ściśle wypukłą funkcją użyteczności.

Pod uwagę bierzemy dwa liniowo niezależne wektory $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in \left(R^+ \cup \{0\}\right)^n$ takie, że $\|w_1\| = \|w_2\| = 1$. Zbiór wektorów $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$ jest dopełniany o wektory $\{\bar{w}_3, \bar{w}_4, ..., \bar{w}_n\}$ takie, że układ wektorów $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, ..., \bar{w}_n\}$ stanowi bazę w przestrzeni R^n. Oznacza to między innymi, że wektory $\bar{w}_i = \left(w_1^i, w_2^i, ..., w_n^i\right)^T$ stanowią kolumny nieosobliwej macierzy $\underline{W} = [\bar{w}_1, \bar{w}_2, ..., \bar{w}_n]$. Niech $\varphi : Y \to X$ będzie funkcją liniową określoną przez zależność

$$\bar{x} = \varphi(\bar{y}) = \underline{W} \cdot \bar{y}, \tag{2.1}$$

gdzie $Y = \left\{\bar{y} \in R^n : \exists \bar{x} \in X : \bar{y} = \underline{W}^{-1} \cdot \bar{x}\right\}$.

Zbadajmy teraz własności funkcji $F : Y \to R$ określonej przez zależność

$$F(\bar{y}) = u(\underline{W} \cdot \bar{y}). \tag{2.2}$$

Dla $\bar{y}_0 = \varphi^{-1}(x_0) = \underline{W}^{-1} \cdot \bar{x}_0$ mamy wtedy

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}_0) = \bar{w}_i^T \cdot \operatorname{grad}\{u(\bar{x}_o)\} > 0. \tag{2.3}$$

Ostatnia nierówność, wraz z twierdzeniem o funkcji uwikłanej i jej pochodnej (np. [3]), dowodzi, że każda funkcja $g : R^{n-1} \to R$ spełniająca warunki

$$y_2^0 = g\left(y_1^0, y_3^0, ..., y_n^0\right), \tag{2.4}$$

$$F\left(y_1, g\left(y_2, y_3, ..., y_n\right), y_3, y_4, ..., y_n\right) = F\left(\bar{y}_0\right) \tag{2.5}$$

posiada pochodną względem pierwszej swej zmiennej daną zależnością

$$\frac{\partial y_2}{\partial y_1}\left(\bar{y}_0\right) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y_1}\left(\bar{y}_0\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial y_2}\left(\bar{y}_0\right)} = -\frac{\bar{w}_1^T \cdot \operatorname{grad}\left\{u\left(\bar{x}_0\right)\right\}}{\bar{w}_2^T \cdot \operatorname{grad}\left\{u\left(\bar{x}_o\right)\right\}}. \tag{2.6}$$

Postać ostatniej pochodnej jest niezależna od doboru postaci funkcji, co jest szczególnie ważne, gdy funkcja uwikłana g opisana zależnością (2.5) stanowi relację nie będącą funkcją. Ostatnie spostrzeżenie pozwala na jednoznaczne zdefiniowanie uogólnionej krańcowej stopy substytucji

$$GMRS_{\bar{w}_1, \bar{w}_2}\left(\bar{x}_0\right) = \frac{\bar{w}_1^T \cdot \operatorname{grad}\left\{u\left(\bar{x}_0\right)\right\}}{\bar{w}_2^T \cdot \operatorname{grad}\left\{u\left(\bar{x}_0\right)\right\}}. \tag{2.7}$$

W szczególnym przypadku uogólniona krańcowa stopa substytucji GMRS redukuje się do krańcowej stopy substytucji, gdyż mamy

$$GMRS_{\bar{e}_i, \bar{e}_j}\left(\bar{x}_0\right) = MRS_{i,j}\left(\bar{x}_0\right). \tag{2.8}$$

Ekonomiczna interpretacja GMRS wypływa wprost z interpretacji MRS, gdyż dzieląc licznik i mianownik w (2.7) przez $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\left(\bar{x}_0\right)$ otrzymujemy

$$GMRS_{\bar{w}_1, \bar{w}_2}\left(\bar{x}_0\right) = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j^1 \, MRS_{j,1}\left(\bar{x}_0\right)}{\sum_{j=1}^{n} w_j^2 MRS_{j,1}\left(\bar{x}_0\right)}. \tag{2.9}$$

Licznik powyższego ułamka pokazuje, że utrata jednej jednostki kombinacji czynników $\bar{w}_1^T \cdot \bar{x}$ może być zrekompensowana przez

$$A = \sum_{j=1}^{n} w_j^1 MRS_{j,1}\left(\bar{x}_0\right) \tag{2.10}$$

jednostek przyrostu czynnika x_1. Mianownik ułamka (2.9) wskazuje natomiast na to, że utrata jednej jednostki kombinacji czynników $\bar{w}_2^T \cdot \bar{x}$. może być zrekompensowana przez

$$B = \sum_{j=1}^{n} w_j^2 MRS_{j,1}(\bar{x}_0) \tag{2.11}$$

jednostek przyrostu czynnika x_1, to ostatnie oznacza, że jedna jednostka czynnika x_1 jest równoważna B^{-1}jednostek kombinacji czynników $\overline{w}_2^T \cdot \bar{x}$. Dlatego uogólniona krańcowa stopa substytucji

$$GMRS_{\overline{w}_1,w_2}(\bar{x}_0) = \frac{A}{B} \tag{2.12}$$

jest równa w przybliżeniu ilości jednostek kombinacji czynników $\overline{w}_2^T \cdot \bar{x}$ rekompensujących ubytek jednej jednostki kombinacji czynników $\overline{w}_1^T \cdot \bar{x}$.

Ponadto w [1] dowiedziono, że wartości uogólnionej krańcowej stopy substytucji nie zależą od postaci funkcji użyteczności.

3. *O możliwości zastosowania teorii portfelowej*

Zakładamy, że dysponujemy skończoną liczbą różnych aktywów finansowych. Stan j-tego aktywu finansowego będziemy charakteryzować przez wartość zmiennej $x_j \in R^+$. Od zmiennej x_j będziemy wymagać, aby była stymulantą jakości aktywu finansowego. Zmienną x_j zatem możemy identyfikować ze stopą wzrostu, odwrotnością wariancji, współczynnikiem zmienności itp. W ten sposób otrzymujemy wektor stanów $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ będący np. wektorem stóp zwrotu lub wektorem odwrotności wariancji lub wektorem współczynników zmienności.

Ze wspomnianych powyżej aktywów tworzymy *i*-ty portfel w ten sposób, że udział *j*-tego aktywu w *i*-tym portfelu opisuje liczba w_j^i. W ten sposób tworzymy kolejno wektory udziału $\overline{w}_i = (w_1^i, w_2^i, ..., w_n^i)^T$. Wobec stawianego w rozdziale 2 wymogu $\overline{w}_i \in (R^+ \cup \{0\})^n$ musimy tutaj przyjąć, że krótka sprzedaż jest wykluczona [2]. Przestrzeń R^n normujemy za pomocą normy przestrzeni l_n^1 [4], to znaczy dla dowolnego $\bar{z} = (z_1, z_2, ..., z_n)^T \in R^n$ przyjmujemy

$$\|\bar{z}\| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|, \tag{3.1}$$

wtedy każdy z wektorów udziału spełnia drugi z warunków stawianych w rozdziale 2 $\|\overline{w}_i\| = 1$. Zgodnie z sugestiami zawartymi w rozdziale 2 do porównań wybieramy portfele o wektorach udziałów liniowo niezależnych. Z drugiej strony wiemy, że dwa różne portfele mają zawsze wektory udziałów liniowo niezależne. Oznacza to, że uogólnioną krańcową stopą substytucji możemy się posługiwać przy porównywaniu dowolnej pary różnych portfeli.

Z drugiej strony, wobec niezmienności uogólnionej krańcowej stopy substytucji wobec postaci funkcji użyteczności, możemy przyjąć dowolną jej postać spełniającą jedynie założenia rozdziału 2. Jest to szczególne ważne wtedy, gdy brak nam informacji o rozkładzie skłonności albo awersji inwestorów do ryzyka.

Zatem możemy przyjąć, że funkcja użyteczności $u : R^n \to R$ dana jest zależnością

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\alpha} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{3.2}$$

Przyjmujemy, że punktem odniesienia naszej analizy jest wektor $\overline{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)^T$, gdzie wartości x_j^0 oznaczają wartości stanu j-tego aktywu finansowego. Użyteczność tego układu aktywów jest równa $u_0 = u(\overline{x}_0)$. Uogólniona krańcowa stopa substytucji jest wtedy równa

$$GMRS_{\overline{w}_1, \overline{w}_2}(\overline{x}_0) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j^1}{x_j^0} \cdot u_0}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j^2}{x_j^0} \cdot u_0} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j^1}{x_j^0}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j^2}{x_j^0}}. \tag{3.3}$$

Jeśli teraz dysponujemy portfelem o wektorze udziałów $\overline{w}_1$, to interesuje nas zamiana tego portfela na taki portfel o wektorze udziałów $\overline{w}_2$, że

$$GMRS_{\overline{w}_1, \overline{w}_2}(\overline{x}_0) < 1. \tag{3.4}$$

Portfele $\overline{w}_2$ spełniające powyższy warunek pozwalają na utrzymanie jakości posiadanych aktywów finansowych za pomocą mniejszych nakładów.

W ten sposób analiza uogólnionej krańcowej stopy substytucji doprowadziła nas do sformułowania kryterium (3.4) analizy portfelowej. O praktycznej użyteczności tego kryterium powinny rozstrzygnąć badania empiryczne.

Literatura

[1] Besada M., Vázquez C., *The Generalized Marginal Rate of Substitution*, „Journal of Mathematical Economics" 31, 1999, s. 553 – 560.

[2] Elton E. J., Gruber M. J., *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG Press, Warszawa 1998.

[3] Fichtenholz G. M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1972.

[4] Musielak J., *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.

[5] Panek E., *Ekonomia matematyczna*, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 2000.