Zdzisław Hellwig

ZMODYFIKOWANA MIARA INFORMACJI

1. Rzeczywista (nieznana) postać liniowego równania systemu ekonomicznego

$$Y := A_1X_1 + A_2X_2 + Z$$

gdzie X_1, X_2, Y, Z - zmienne losowe; A_1, A_2 - pewne stałe[1].

2. Hipotetyczna postać liniowego równania systemu ekonomicznego

$$Y := \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + Z$$

3. Pierwszy sens pojęcia „obciążenie" (parametrów)

$$| A_i - \alpha_i | = \varepsilon_i$$

4. Drugi sens pojęcia „obciążenie" (estymatorów)

$$| E(\alpha_i) - \alpha_i | = \varepsilon_i$$

5. Wieloznaczność pojęcia „obciążenie"

Jeżeli nie umówiono się, że

$$1^\circ \quad E(Z) = 0,$$

$$2^\circ \quad E(ZX) = 0$$

to pojęcie obciążenia traci sens. Nie wiadomo jakie mechanizmy działające w systemach gospodarczych miałyby zapewniać spełnienie warunków 1° i 2°. Szczególnie trudno wymyślić uzasadnienie 2°.

---

[1] Dla jasności wykładu wszystkie rozważania są tu prowadzone dla przypadku modelu jednorównaniowego o dwóch zmiennych objaśniających. Uogólnienia nie przedstawiają zasadniczych trudności.

6. Minimalna wariancja resztowa - pierwsza miara informacji

Jeżeli $Z \perp (X_1, X_2)$ to $\underset{(A_1,A_2)}{\forall} V(Z) \leqslant V(Y - A_1X_1 - A_2X_2)$.

7. Warunek identyczności rzeczywistej i hipotetycznej postaci LSE (liniowego systemu ekonomicznego); walor tw. Markowa i MNK

Jeżeli:

$$E(Z) = E(X_i) = E(Y) = 0; \quad V(X_i) = V(Y) = 1,$$

to

$$E(Y - \alpha_1X_1 - \alpha_2X_2)^2 \xrightarrow[\alpha_1,\alpha_2]{} \min \Leftrightarrow Z \perp (X_1, X_2).$$

Z warunku tego otrzymuje się w sposób jednoznaczny takie α_1, α_2, że

$$\forall_i |A_i - \alpha_i| = 0$$

(nieobciążoność w pierwszym sensie).

8. Ortogonalna baza systemu (wzajemna ortogonalność zmiennych X_i)

Niech

$$Y: = A_1^{(1)} X_1 + A_2^{(1)} X_2 + Z^{(1)},$$

$$Z^{(1)} \perp (X_1, X_2), \quad X_1 \perp X_2.$$

System zostaje uzupełniony o trzecią zmienną:

$$Y : = A_1^{(2)} X_1 + A_2^{(2)} X_2 + A_3^{(2)} X_3 + Z^{(2)}.$$

Ponieważ

$$Z^{(1)} = A_3^{(2)} X_3 + Z^{(2)}$$

więc $V(Z^{(1)}) \geqslant V(Z^{(2)})$.
Przyjmując $V(\cdot)$ jako miarę informacji otrzymujemy w tym przypadku

$$1 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + V(Z^{(2)}).$$

Czyli $V(Z^{(2)}) = 1 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2$.

Tak więc znamy tu wartość informacyjną zmiennych X_1, X_2, X_3, Z zrelatywizowaną względem wartości informacyjnej zmiennej Y, którą to wartość informacyjną przyjęto za jednostkę. Tu pojawia się pytanie jak zmierzyć wartość informacyjną zmiennej Y? Odpowiedź na to pytanie zostanie podana w paragrafie 15.

9. Dowolna baza systemu; eliminacja zmiennych

Niech

$$Y: = A_1^{(2)} X_1 + A_2^{(2)} X_2 + A_3^{(2)} X_3 + Z^{(2)}; \quad Z^{(2)} \perp (X_1, X_2, X_3)$$

oraz

$$X_2 := B_1X_1+B_3X_3+U_2, \quad U_2 \perp (X_1,X_3).$$

Stąd

$$Y := (A_1^{(2)}+A_2^{(2)}B_1)X_1+(A_3^{(2)}+A_2^{(2)}B_3)X_3 + Z^{(2)} + A_2^{(2)}U_2 .$$

Kładąc

$$A_1^{(1)} = A_1^{(2)}+A_2^{(2)}B_1, \quad A_3^{(1)} = A_3^{(2)}+A_2^{(2)}B_3, \quad Z^{(1)} = Z^{(2)}+A_2^{(2)}U_2$$

otrzymamy

$$Y := A_1^{(1)}X_1+A_3^{(1)}X_3 +Z^{(1)}.$$

Wobec tego

$$V(Z^{(1)}) \geqslant V(Z^{(2)})$$

lub, co na jedno wychodzi,

$$INF(A_1X_1+A_3X_3) \leqslant INF(A_1X_1+A_2X_2+A_3X_3).$$

Wartość informacyjna wyeliminowanej zmiennej X_2 wynosi

$$INF(X_2|X_1,X_2,Y) = V(Z^{(1)}) - V(Z^{(2)}).$$

10. <u>„Sub- i nadidentyfikacja" równania systemu; sprzeczność między wartością informacyjną równania systemu a obciążeniem parametrów; pojęcie zmiennej obcej</u>

Niech rzeczywista postać równania systemu przedstawia się następująco

$$Y := A_1^{(1)}X_1 + A_3^{(1)}X_3 + Z^{(1)}.$$

Wadliwa identyfikacja doprowadziła do równania

$$Y := A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 + Z^{(2)}.$$

W równaniu tym zmienna X_2 jest zbędna. Jej wprowadzenie poprawiło, co prawda, dopasowania modelu do oryginału w tym sensie, że $V(Z^{(2)}) < V(Z^{(1)})$ i zmniejszyło wartość informacyjną zmiennej Y, ale jednocześnie doprowadziło do obciążenia błędami parametrów modelu. Równanie zawierające zmienne obce jest równaniem „nadidentyfikowanym". Dążność ekonometryków do jak najlepszego dopasowania modelu do materiału statystycznego prowadzi z reguły do modeli nadidentyfikowanych o obciążonych (w pierwszym sensie) parametrach modelu. W tych warunkach obciążenie estymatorów związane ze stosowaniem ZMNK nie ma żadnego znaczenia.

11. <u>Podstawianie wartości za zmienne modelu</u>

Poprawne korzystania z hipotetycznej postaci równania systemu wymaga aby w miejsce zmiennych modelu podstawiać wyłącznie współrzędne punktów nale-

żących do dziedziny modelu. Wymaganie to w praktyce bywa rzadko przestrzegane, a zmienną losową dwuwymiarową (X_1,X_2) traktuje się jako parę niezależnych zmiennych jednowymiarowych X_1,X_2. Jeżeli za miarę wartości informacyjnej zmiennej (X_1,X_2) przyjmie się wielkość $V(X_1')V(X_2')$ gdzie X_1',X_2' są to nowe zmienne losowe otrzymane ze starych za pomocą transformacji ortogonalnej to podstawianie wartości x_1^*, x_2^* za zmienne modelu można uznać za poprawne jeżeli

$$(x_1^*,x_2^*) \in \{-\sqrt{V(X_1)}, \sqrt{V(X_1)}\} \{-\sqrt{V(X_2)}, \sqrt{V(X_2)}\}$$

gdzie znak X oznacza produkt kartezjański zbiorów.

12. Utrata informacji w iloczynie skalarnym zmiennych o różnych wartościach (potencjałach) informacyjnych

Przypuśćmy, że zmienna losowa X_1 przybiera dwie wartości: 0,1 natomiast zmienna losowa Y przybiera 10 wartości: 0,1,...,9. Obliczenie iloczynu skalarnego tych zmiennych wymaga jednakowej ilości wartości każdej z tych zmiennych. Powstaje pytanie jak w próbie 10-elementowej powinny byłyby się ułożyć wartości zmiennej X_1 aby współczynnik korelacji między nimi był bliski 1, jeżeli zmienna X_2 przybierą rosnący ciąg wartości? Niełatwa w ogólnym przypadku odpowiedź na to pytanie prowadzi do wniosku, że wartość informacyjna zmiennych losowych ma wpływ na wartość współczynnika korelacji między nimi.

13. Zasadność warunków ortogonalności zmiennych resztkowych względem innych zmiennych równań regresji

Niech

$$Y_1 := G_{12}Y_2 + A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + Z_1$$

$$Y_2 := G_{21}Y_1 + A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + Z_2$$

lub krócej

$$Y_1 - G_{12}Y_2 = V_1$$

$$-G_{21}Y_1 + Y_2 = V_2$$

lub jeszcze krócej

$$GY = V.$$

Stąd

$$Y := G^{-1}V.$$

Otóż ten naturalny i prosty problem wyrażania Y poprzez X można skomplikować żądając aby $Z_1 \perp (Y_2,X_1,X_2)$ oraz $Z_2 \perp (Y_1,X_1,X_2)$ lub posuwając żądania jeszcze dalej aby $Z_1,Z_2 \perp (Y_1,Y_2,X_1,X_2)$. Można, rzecz oczywista, żądania te wysuwać dalej i dalej, rzecz w tym jednak, że nie wiadomo czy taka jest właśnie prawdziwa natura rzeczy i zjawisk przyrodniczych i społecznych.

14. Ortogonalność jako warunek addytywności wartości informacyjnej zmiennych

Jeżeli dwie zmienne losowe są ze sobą skorelowane, czyli jeżeli $r(X,Y) = r \neq 0$, to zmienna losowa $Z = Y - rX$ spełnia warunek

$$V(Z) = V(Y) - r^2V(X); \quad Z \perp X,$$

a to oznacza, że jeżeli wariancja jest miarą zasobu informacji, to zasób informacji zmiennej Z jest niewiększy od zasobu informacji zmiennej Y. Jeżeli zmienne są ortogonalne, to $r = 0$ i $V(Z) = V(Y)$. Te proste i intuicyjne spostrzeżenia komplikują się, gdy zmienna Y zależy od dwóch lub większej liczby zmiennych. Algebra miar informacji staje się bardziej zawiła.

Przypuśćmy, że zmienne Y, X_1, X_2 są unormowane na 0-1. W takim razie kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej wyraża się wzorem

$$r^2 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2.$$

Jeżeli równanie LSE zachowuje własność koincydencji to wartość informacyjną poszczególnych zmiennych objaśniających mierzą iloczyny $\alpha_i r_i$. Jeżeli tak nie jest, to każdemu składnikowi ujemnemu odpowiada jeden lub kilka iloczynów dodatnich, których suma majoryzuje wartość iloczynu ujemnego. W taki sposób, przez kojarzenia iloczynów w bloki o dodatniej sumie składników w blokach, powstaje możliwość otrzymania a g r e g a t ó w zmiennych, którym można już łatwo przypisać ich wartość informacyjną. Podział na bloki musi być tak przeprowadzony aby suma kwadratów różnic między dodatnimi iloczynami a iloczynem ujemnym w blokach była minimalna.

15. Klasyczna i zmodyfikowana miara informacji

Jak wiadomo zasób informacji można mierzyć. Istnieją różne jednostki informacji. Oznaczając literą E jakieś wyróżnione zdarzenie losowe, to za jednostkę informacji można przyjąć wielkość zależną od prawdopodobieństwa zdarzenia E:

$$H(E) := \log_2 \frac{1}{P(E)} \text{ bitów}$$

gdzie H(E) oznacza wyrażoną w bitach miarę informacji zwaną entropią zaś

$$\text{bit} = \log_2 \frac{1}{P(E_1)} = \frac{1}{\log_2 P(E_1)} = 1$$

gdzie $P(E_1) + P(E_2) = 1$ oraz

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}.$$

Wielkość H(E), zwana entropią, ma następujące własności:

- jeżeli X jest zmienną losową dyskretną przyjmującą wartość $x_1, x_2, \ldots, x_N$ z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, \ldots, p_N$ to

$$H(X) := -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i$$

- $$H(X) \geqslant 0$$

- H(X) jest nieujemną, addytywną funkcją zbioru wartości jakie przybiera zmienna losowa, może więc być użyta jako miara, w tym konkretnym przypadku, jako miara informacji.
- H(X) nie jest miarą unormowaną. Osiąga ona wartość maksymalną gdy $p_1 = p_2 = \ldots = p_N = \frac{1}{N}$. Wtedy

$$H(X) = \log N.$$

Oznacza to, że gdy N rośnie, rośnie również H(X).

- $H(X) \geqslant H[\varphi(X)]$ dla dowolnej funkcji $\varphi(\cdot)$.
- W przypadku pary zmiennych losowych (X_1, X_2) dyskretnych z których pierwsza przybiera N_1, a druga - N_2 wartości zachodzą związki

$$H(X_1, X_2) := H(X_2) + H(X_1|X_2) = H(X_1) + H(X_2|X_1)$$

gdzie

$$H(X_1|X_2) := -\sum_{i=1}^{N_1} p_{ij} \log p_{i|j}$$

$$H(X_2|X_1) := \sum_{j=1}^{N_2} P_{ij} \log P_{j|i}$$

W ogólnym przypadku:

$$H := H(X_1, X_2, \ldots, X_N) = H(X_1) + H(X_2|X_1) + \ldots +$$

$$+ H(X_N|X_1, X_2, \ldots; X_{N-1}).$$

Gdy zmienna $X_1, X_2, \ldots, X_i$ są niezależne to

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_N) = H(X_1) + H(X_2) \ldots H(X_N).$$

- Entropii nie można poprawnie zdefiniować gdy zmienna losowa X jest zmienną ciągłą. Dzieje się tak dlatego, że wielkość

$$H(X) := -\int_{\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx,$$

stanowiąca naturalne uogólnienie entropii zdefiniowanej dla przypadku ciągłego traci sens gdy zmienna losowa X ma rozkład jednostajny. Wtedy bowiem

$$H(X) := \log(b-a).$$

Jeżeli $b-a < 1$ to $\log(b-a) < 0$, co oznacza, że $H(X)$ nie spełnia pierwszego aksjomatu miary. Paradoksalny wynik otrzymuje się gdy $b-a = 1$. Wtedy entropia zamiast przyjmować wartość maksymalną lub wręcz nieskończoną przybiera wartość równą 0. Te poważne mankamenty pozwalają, mimo powszechnej akceptacji entropii jako miary informacji, zastąpić tę miarę jej pewną modyfikacją. Przystępujemy właśnie do podania definicji tzw. z m o d y f i k o w a n e j e n t r o p i i, którą oznaczać będziemy symbolem $M(X)$. Istota modyfikacji polega na tym aby zastąpić prawdopodobieństwa występujące w definicji entropii pewnymi momentami rozkładu zmiennej X. Chodzi o to, że z reguły nie znamy rozkładu X, a więc zmuszeni jesteśmy do korzystania z danych z próby losowej. Jeżeli nawet zmienna losowa jest dyskretna i przybiera tylko 10 wartości to próba konieczna do estymacji prawdopodobieństw rozkładu nie może być mniejsza od 100. W ekonometrii, skazanej na korzystanie z małych prób, tak liczną próbą nigdy nie dysponujemy, gdyż zwykle korzysta się z danych rocznych. Oznacza to dyskwalifikację entropii klasycznej jako miary przydatnej w ekonometrii. Tym także podyktowana jest konieczność pewnej modyfikacji definicji entropii. Ideą przewodnią tej modyfikacji jest myśl zastąpienia prawdopodobieństw rozkładu interweniujących w definicji entropii momentami tego rozkładu.

DEFINICJA 1 (przypadek dyskretny)
Zmodyfikowaną entropią dyskretnej zmiennej losowej X przybierającej N wartości, lub i-entropią nazywana będzie wielkość

$$M(X) := c\left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{V(I)}{\sqrt{\mu_4(I)}}$$

gdzie I oznacza zmienną otrzymaną ze zmiennej losowej X w sposób następujący: jeżeli X jest zmienną losową przybierającą ciąg różnych wartości

$$x_1 < x_2 < \dots < x_N$$

z prawdopodobieństwami

$$p_1, p_2, \dots, p_N$$

to wartościami zmiennej losowej I są:

$$1, 2, \dots, N;$$

to znaczy numery uporządkowanego ciągu wartości zmiennej X. Aby nie komplikować zapisu będziemy, tam gdzie niespowoduje to nieporozumień, zastępować zmienną X za pomocą zmiennej I zachowując jednak zwykły symbol X.
Stała $C = 1.341640787$ natomiast $m \geqslant 1$ jest liczbą naturalną oznaczającą liczbę przypadków gdy $p_i \geqslant \frac{1}{N}$. Wyjaśniamy dalej, że

$$V(X) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [x_i - E(X)]^2$$

oraz

$$\mu_4(X) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i[x_i - E(X)]^4$$

i

$$E(X) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i[x_i - E(X)]$$

Z definicji 1 wynika, że gdy zmienna losowa X degeneruje się do pewnej stałej S to

$$M(X) = M(S) = c(1-1)\cdot\frac{V(X)}{\sqrt{\mu_4(X)}} = 0.$$

Jest to wynik identyczny jak w przypadku entropii zwykłej H(X).
Niech X_B oznacza zmienną losową binarną przyjmującą dwie wartości 0,1 z jednakowymi prawdopodobieństwami w takim razie

$$V(X_B) = \frac{1}{4}, \quad \sqrt{\mu_4(X_B)} = \frac{1}{4}, \quad \frac{V(X_B)}{\sqrt{\mu_4(X_B)}} = 1.$$

Oznacza to, że gdy ignoruje się współczynnik skalujący $c(1 - \frac{1}{m})$ to za jednostkę informacji przyjmuje się ilość informacji zawartej w zmiennej losowej binarnej przyjmującej wartości 0,1 z prawdopodobieństwami jednakowymi i równymi 1/2. Stąd

$$\frac{V(X_B)}{\sqrt{u_4(X_B)}} = 1 \text{ bit}.$$

Uwzględniając współczynnik skalujący otrzymuje się równość:

$$M(X) = c(1 - \frac{1}{2})\frac{V(X_B)}{\sqrt{\mu_4(X_B)}} = 0{,}6708.$$

Zmodyfikowana entropia M(X) zdefiniowana była dla przypadku dyskretnego. Obecnie podane zostaną dwie definicje odnoszące się do przypadku ciągłego.

DEFINICJA 2a.
Niech X oznacza ciągłą zmienną losową o gęstości f(X) rozpiętej nad skończonym przedziałem D = [a,b]. Tak więc $f(X) > 0$; $X \in [a,b]$. W takim razie

$$M(X) = \frac{c(1-1/m)V(X)}{\sqrt{\mu_4(X)}}$$

gdzie m jest liczbą podprzedziałów D_j przedziału $D, D_i, D_j \subset D$, $D_i \cap D_j = \emptyset$, $\bigcup_j D_j = D_0 \subset D$ takich że

$$\forall_{D_j \subset D} \; \forall_{x \in D_j} \; f(x) \neq \frac{1}{b-a}.$$

DEFINICJA 2b.

Niech X oznacza zmienną losową ciągłą o gęstości f( ) rozpiętej nad nieskończonym przedziałem. W takim razie

$$M(X) = c\,\frac{V(X)}{\sqrt{\mu_4(X)}}\,.$$

Rozważmy zmienną losową X_N o rozkładzie normalnym N(0,1). W takim razie

$$V(X_N) = 1; \qquad \sqrt{\mu_4}(X_N) = \sqrt{3}.$$

Stąd

$$M(X_N) = c\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}7746.$$

Niech teraz X_W oznacza zmienną losową o rozkładzie wykładniczym. Ponieważ

$$V(X_W) = \frac{1}{\lambda^2}\,; \qquad \sqrt{\mu_4(X_W)} = \frac{3}{\lambda^2}$$

więc

$$M(X_W) = c\,\frac{1}{3} = \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0{,}4472.$$

Jest to wynik zgodny z oczekiwaniem: $M(X_N) > M(X_W)$. Obliczmy teraz $M(X_P)$ gdzie X_P oznacza rozkład prostokątny o gęstości rozpiętej nad przedziałem $\left[-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right]$. Ponieważ

$$V(X_P) = \frac{1}{12}\,; \qquad \sqrt{\mu_4(X_P)} = \sqrt{\frac{1}{80}} = \frac{1}{4\sqrt{5}}$$

więc

$$M(X_P) = c\,\frac{4\sqrt{5}}{12} = c\,\frac{\sqrt{5}}{3} = 1$$

jeżeli $c = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Tak więc

$$M(X_P) > M(X_N) > M(X_W).$$

16. Estymacja zmodyfikowanej entropii

W praktyce nie zna się rozkładu zmiennej losowej X. Estymator M(X) zmodyfikowanej entropii wyznacza się za pomocą danych z próby losowej. Oto opis procedury estymacyjnej.

Niech $\omega := [x_1, x_2, \ldots, x_K]$ oznacza próbę losową pobraną z rozkładu zmiennej losowej X (dyskretnego lub ciągłego). Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $X = X_P$, tzn. jest zmienną losową o rozkładzie prostokątnym rozpiętym nad przedziałem [0,1]. Oto 10 liczb Fibonacciego otrzymanych z pary: 0,5802 i 0,1481: 0,5802, 0,1481, 0,7283, 0,8764, 0,6047, 0,4811, 0,0858, 0,5667, 0,6525, 0,2292.

Dalsze postępowanie przebiega następująco:

1. Znajduje się liczby $a = \min_i x_i$ oraz $b = \max_i x_i$. W naszym przykładzie, po zaokrągleniu, są to

$$a = 0{,}09 \quad b = 0{,}88.$$

2. Porządkuje się liczby w kolejności rosnącej.
3. Dzieli się przedział b-a na K części.
4. Oblicza się częstości $f_i = k_i/K$ gdzie k_i oznacza liczbę wartości, które trafiły do i-tego przedziału.
5. Zastępuje się oryginalne wartości zmiennej losowej X liczbami naturalnymi = 1,2,...,K.
6. Oblicza się wartości

$$\hat{V}(I_X) = \frac{\sum_{i=1}^{K}(i-\bar{i})^2 k_i}{K}, \qquad \sqrt{\hat{\mu}_4}(I_X) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{K}(i-\bar{i})^4 k_i}{K}\right]^{1/2}$$

Punkty od 1-6 algorytmu warto ująć w następującą tablicę:

i	Liczby Fibonacciego x_i	Uporząd. liczby x_i	Przedziały D_i	f_i	if_i	$i-\bar{i}$	$(i-\bar{i})^2$	$f_i(i-\bar{i})^2$	$(i-\bar{i})^4$	$f_i(i-\bar{i})^4$
1	0,5802	.0858	0,08-0,16	0,2	0,2	-4,8	23,04	4,608	530,84	106,17
2	0,1481	.1481	0,16-0,24	0,1	0,2	-3,8	14,44	1,444	208,51	20,85
3	0,7283	.2292	0,24-0,32	0	0	0	0	0	0	0
4	0,8764	.4811	0,32-0,40	0	0	0	0	0	0	0
5	0,6047	.5667	0,40-0,48	0	0	0	0	0	0	0
6	0,4811	.5802	0,48-0,56	0,1	0,6	0,2	0,04	0,004	0	0
7	0,0858	.6047	0,56-0,64	0,3	2,1	1,2	1,44	0,432	2,07	0,62
8	0,5667	.6595	0,64-0,72	0,1	,8	2,2	4,84	0,484	23,42	2,34
9	0,6525	.7283	0,72-0,80	0,1	,9	3,2	10,24	1,024	104,86	10,49
10	0,2292	.8764	0,80-0,88	0,1	1,0	4,2	17,64	1,764	311,17	31,12

$\bar{i} = 5{,}8 \quad \hat{V}(I) = 9{,}76 \quad \hat{\mu}_4(I)\ 171{,}59$

$$\sqrt{\hat{\mu}_4}(I) = 13{,}1, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{7}, \quad 1 - \frac{1}{7} = .857$$

$$M(X) = 1.34 \cdot 0{,}857\ \frac{9.76}{13.1} = 0{,}856.$$

Komentarz: Ładunek informacyjny zmiennej losowej X oszacowany za pomocą M(X) jest wysoki; wskazuje to, że zmienna ta ma rozkład zbliżony do rozkładu jednostajnego.