Piotr DWORNICZAK

DECYZJE OPTYMALNE W ŚWIETLE TEORII RELACJI PREFERENCJI

1. Wprowadzenie

Jednym z podstawowych przejawów aktywności człowieka jest dokonywanie ocen, porównań i wyborów. Każdy wybór, każda decyzja podejmowana jest po mniej lub bardziej wnikliwym porównaniu z rozwiązaniami wariantowymi. W różnych sytuacjach gospodarczych czy społecznych, w których zobowiązani jesteśmy do podjęcia pewnego działania, można kierować się własną intuicją, zachowując tylko dla siebie przesłanki skłaniające nas do danego działania. W wielu przypadkach (zwłaszcza przy dużym stopniu złożoności problemu) postępujemy jednak inaczej. Konstruujemy pewną sformalizowaną reprezentację myślową rozważanej sytuacji opierającą się wyłącznie na faktach oraz danych ilościowych lub jakościowych wynikających z obserwacji. Reprezentacja taka to tzw. model matematyczny procesu decyzyjnego. Przedmiotem rozważań w tym artykule będzie sposób porównywania decyzji na podstawie rozmytych relacji preferencji według adekwatnego modelu matematycznego. Adekwatny model powinien umożliwić nam wskazanie optymalnej decyzji (lub pewnej grupy decyzji uznanych za optymalne). Oznacza to, że na podstawie modelu decydent ma wybrać pewne warianty (spośród wszystkich możliwych), ocenić je z punktu widzenia realizacji zamierzonego celu, i wskazać, które uznaje za najwłaściwsze. W przedstawionych rozważaniach sam rodzaj decyzji i jej przedmiot nie mają żadnego znaczenia.

Formalnie powyższe zadania można ująć w następujących punktach:

1. Dany jest pewien zbiór X zawarty w pewnej przestrzeni D (zbiór X to tzw. zbiór decyzji dopuszczalnych, a przestrzeń D to tzw. przestrzeń decyzyjna).

2. Dana jest funkcja kryterium $f: X \to K$ (gdzie K jest tzw. przestrzenią kryterialną lub przestrzenią ocen).

3. W przestrzeni K określona jest pewna relacja preferencji $R \subset K \times K$.

4. W zbiorze $Y = f(X) \subset K$ (Y to tzw. zbiór ocen rozwiązań dopuszczalnych) jest za pomocą relacji R określony pewien zbiór Y_{opt} (tzw. Zbiór optymalnych ocen rozwiązań dopuszczalnych) pozwalający wyznaczyć zbiór $X_{opt} \subset X$ (X_{opt} to tzw. zbiór decyzji optymalnych) definiowany jako $\{x \in X: f(x) \in Y_{opt}\}$.

Powyżej sformułowane zadanie nazywamy problemem optymalnego wyboru. W praktyce często decyzja oceniana jest z kilku punktów widzenia. Ocena $y \in Y$ decyzji $x \in X$ jest wtedy wektorem $[y_1, y_2 \ldots y_m]$ ocen cząstkowych (składowych). Mamy wtedy do czynienia z tzw. wielokryterialnym problemem optymalnego wyboru ([1],[3]).

W wielokryterialnych problemach optymalizacyjnych wybór decyzji optymalnej jest najczęściej trudny, gdyż decyzja optymalna z jednego punktu widzenia nie jest optymalna z innego (innych). Problemy tego typu mają istotne znaczenie w ekonomii. Stopień trudności pojawiający się przy ich rozwiązywaniu zależy od tego, jak są określone i jakie własności mają: zbiór X decyzji dopuszczalnych , funkcja f ocen, zbiór Y ocen decyzji dopuszczalnych oraz umożliwiająca optymalny wybór relacja preferencji.

Relacja preferencji powinna pozwolić na dokonanie pewnego wartościowania decyzji pod względem przydatności (według danego kryterium). Dlatego postuluje się, aby relacja ta posiadała pewne ściśle określone własności. Bardzo często w literaturze przedmiotowej zakłada się zwrotność, przechodniość i spójność relacji preferencji. Dla naszych rozważań wystarczy założenie zwrotności ([2]). Przyjmiemy zatem definicję, że relacją słabej preferencji nazywamy dowolną relację zwrotną. Preferencje są pewnym przedstawieniem subiektywnej opinii decydenta o poszczególnych wariantach. Nie wnikamy, czy powstają one na podstawie bliżej nieokreślonych odczuć decydenta, czy w wyniku badań empirycznych.

W sytuacjach wyboru decyzji optymalnej na podstawie m kryteriów K_l $(l = 1 \ldots m)$ musimy założyć, że dysponujemy relacjami R_l $(l = 1 \ldots m)$ słabej preferencji ocen według poszczególnych kryteriów.

Dla orzeczenia, które decyzje uznamy za optymalne, konieczne jest jednak stworzenie jednego kryterium K, a przede wszystkim podanie relacji słabej preferencji R uwzględniającej we właściwy sposób wszystkie relacje R_l według kryteriów cząstkowych. Jest to bardzo poważne zadanie i nadal podawane są nowe propozycje jego rozwiązania.

W dalszej części pracy przestawiona zostanie właśnie pewna konstrukcja i zastosowanie takiego kryterium.

2. Podstawowe definicje i pojęcia

W poprzednim rozdziale wprowadzone zostało pojęcie przestrzeni decyzyjnej D, zbioru decyzji dopuszczalnych X oraz zbioru kryteriów K. Na potrzeby naszych rozważań założymy, że zbiory X i K są skończone, a dokładniej $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, $K = \{K_1, K_2, \ldots K_m\}$. Przez R_l oznaczymy relację słabej preferencji ze względu na kryterium K_l. Zapis $x_i \, R_l \, x_j$, gdzie $x_i, x_j \in X$ czytamy decyzja x_i jest ze względu na kryterium K_l nie gorsza od decyzji x_j.

Gdy relacja R_l jest relacją rozmytą, to podawać ją będziemy za pomocą funkcji przynależności $\mu_{R_l} : X \times X \to [0,1]$, a przez $\mu_{R_l}(x_i, x_j)$ będziemy rozumieć stopień, w jakim decyzja x_i jest nie gorsza od decyzji x_j ze względu na kryterium K_l.

Do rozważań dotyczących wyboru optymalnego potrzebne jest także zdefiniowanie relacji odwrotnej do danej oraz dopełnienia relacji, a także zaostrzenia relacji.

Relację oznaczoną R^{-1} *nazywamy relacją odwrotną do relacji R (klasycznej), gdy*

$$xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx .$$

Relację rozmytą oznaczoną R^{-1} *nazywamy relację odwrotną do danej relacji R (rozmytej), gdy*

$$\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(y,x) .$$

Relacja oznaczona R' *jest dopełnieniem danej relacji R (klasycznej), gdy*

$$xR'y \Leftrightarrow \sim yRx .$$

Relację rozmytą oznaczoną R' *nazywamy dopełnieniem danej relacji R (rozmytej), gdy*

$$\mu_{R'}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y) .$$

Relację oznaczoną R^s *nazywamy zaostrzeniem relacji R (klasycznej) gdy* $R^s = R \setminus R^1$ *lub inaczej* $R^s = R \cap (R^1)'$

Relację rozmytą oznaczoną R^s *nazywamy zaostrzeniem relacji R (rozmytej), gdy jej funkcja przynależności określona jest następująco* $\mu_R^s(x,y) = \max\{\mu_R(x,y) - \mu_R(y,x), 0\}$

Liczbę $\mu_R^s(x,y)$ nazywamy stopniem, w jakim element x dominuje ściśle nad elementem y.

Decyzje optymalne wybierane powinny być zawsze ze zbioru tzw. elementów niezdominowanych (maksymalnych) relacji R definiowanego jako $X^{nd} = \{x \in X : \sim \exists\, y \in X : y R^s x\}$. Dla relacji rozmytej zbiór elementów niezdominowanych definiuje się jako zbiór rozmyty o funkcji przynależności $\mu_R^{nd}(x) = 1 - \sup_{y \in X} \mu_R^s(y,x)$. Liczbę $\mu_R^{nd}(x)$ nazywamy stopniem „niezdominowania" (lub stopniem „maksymalności") elementu x.

Dalsze niezbędne oznaczenia i definicje będą wprowadzane stopniowo w miarę potrzeb dla rozważań teoretycznych lub przykładowych.

3. Optymalny wybór na podstawie preferencji

Wprowadzone powyżej pojęcia pozwalają nam na szersze rozważania przy coraz większej złożoności problemu wyboru decyzji przy wielu kryteriach oceniających.

W standardowym podejściu do wielokryterialnego wspomagania decyzji na podstawie klasycznych relacji słabej preferencji R_l; $l = 1, \ldots, m$ podanych w przestrzeniach kryterialnych K_l; $l = 1, \ldots, m$ należy wyznaczyć relację

$$R = \bigcap_{l=1}^{m} R_l, \tag{3.1}$$

a następnie elementy niezdominowane tej relacji. Te elementy to tzw. optima Pareto. Optymalny wybór powinien być dokonywany właśnie spośród optimów Pareto.

Niestety, takie postawienie zagadnienia w większości rzeczywistych problemów, a zwłaszcza takich, w których kryteria ocen są przeciwstawne lub sprzeczne, powoduje niewielkie (lub żadne) ułatwienie wyboru decyzji optymalnej.

Zobaczmy to na poniższym przykładzie.

Przykład 1.

Rozważmy zbiór decyzji dopuszczalnych $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Każda z decyzji oceniana jest na podstawie czterech kryteriów A, B, C i D. Dla poszczególnych kryteriów dane są macierze relacji (klasycznych) słabych preferencji R_A, R_B, R_C, R_D

R_A	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	1	1	1	0
x_3	1	0	1	1
x_4	1	0	0	1

R_B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	1	1	1	0
x_3	1	1	1	0
x_4	1	1	1	1

R_C	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	0	1	1	1
x_3	0	0	1	1
x_4	0	0	1	1

R_D	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	1	1	1	0
x_3	1	1	1	0
x_4	1	1	1	1

Na podstawie powyższych danych wyznaczymy zbiór Pareto.

Zgodnie z formułą (3.1) wyznaczamy najpierw relację R, a następnie jej zaostrzenie.

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	0	0	1

R^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0
x_2	0	0	1	0
x_3	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0

oraz elementy niezdominowane, którymi są x_1, x_2 i x_4.

Zbiór Pareto przyjmuje więc postać $\{x_1, x_2, x_4\}$.

Zauważmy, że rozważania dotyczące wyboru optymalnej decyzji można zawęzić tylko do zbioru Pareto, traktując decyzje z tego zbioru jako indyferentne, co w efekcie tylko w niewielkim stopniu ułatwia decydentowi wybór.

Aby uniknąć takiej sytuacji, można wyznaczyć relację R jako relację rozmytą, a następnie wyznaczyć jej elementy niezdominowane.

Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ będzie skończonym zbiorem decyzji dopuszczalnych, a $K = \{K_1, K_2, \ldots K_m\}$ skończonym zbiorem kryteriów. Niech dane będą macierze R_l ; l=1,...,m relacji słabych preferencji (klasycznych lub rozmytych) w zbiorach ocen K_l. Przez $r^l_{i,j}$ oznaczmy stopień przynależności pary (x_i, x_j) w relacji R_l. Wtedy stopień przynależności pary (x_i, x_j) w relacji R oznaczony $r_{i,j}$ określimy następująco

$$r_{i,j} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} r_{i,j}^{l} \tag{3.2}$$

Ostatecznie wyznaczymy elementy niezdominowane relacji R i ich stopnie niezdominowania. Przez najbardziej optymalną decyzję rozumieć będziemy decyzję o maksymalnym stopniu niezdominowania.

Prześledźmy to rozumowanie dla danych z przykładu 1.
Macierz relacji R będzie miała postać

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,25	0,25	0,25
x_2	0,75	1	1	0,25
x_3	0,75	0,5	1	0,5
x_4	0,75	0,5	0,75	1

a jej zaostrzenie

R^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0
x_2	0,5	0	0,5	0
x_3	0,5	0	0	0
x_4	0,5	0,25	0,25	0

Stopnie niezdominowania to $\mu_R^{nd}(x_1)=0,5$, $\mu_R^{nd}(x_2)=0,75$, $\mu_R^{nd}(x_3)=0,5$ i $\mu_R^{nd}(x_4)=1$. Najbardziej optymalną jest zatem decyzja x_4.

W dotychczasowych rozważaniach kryteria traktowane były jako jednakowo ważne dla ustalenia decyzji optymalnej. W praktyce często zachodzi sytuacja, że kryteria mają różne subiektywne stopnie ważności. Można wtedy przypisać poszczególnym kryteriom pewne wagi $a_l \in [0,1]$; $l = 1,\ldots, m$ takie, że $\sum_{l=1}^{m} a_l = 1$ i zamiast średniej arytmetycznej (3.2) wyznaczyć relację R za pomocą średniej ważonej .

Wtedy

$$r_{i,j} = \sum_{l=1}^{m} a_l \cdot r_{i,j}^{l} \tag{3.3}$$

W końcu wyznaczamy stopnie niezdominowania wszystkich elementów, a za decyzję najbardziej optymalną przyjmujemy decyzję o maksymalnym stopniu niezdominowania.

Rozważmy po raz trzeci dane z przykładu 1, przyjmując dodatkowo, że decydent uznaje wagi poszczególnych kryteriów następująco : $a_A=0,5$, $a_B=0,2$, $a_C=0,1$ i $a_D=0,2$.

Macierz relacji R będzie wówczas postaci

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,1	0,1	0,1
x_2	0,9	1	1	0,1
x_3	0,9	0,4	1	0,6
x_4	0,9	0,4	0,5	1

a jej zaostrzenie

R^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0
x_2	0,8	0	0,6	0
x_3	0,8	0	0	0,1
x_4	0,8	0,3	0	0

stąd stopnie niezdominowania wynoszą $\mu_R^{nd}(x_1)=0{,}2$, $\mu_R^{nd}(x_2)=0{,}7$, $\mu_R^{nd}(x_3)=0{,}4$ i $\mu_R^{nd}(x_4)=0{,}9$. Optymalną decyzją jest zatem decyzja x_4, a w dalszej kolejności x_2, x_3 i x_1.

Rozważmy teraz sytuacje, gdy stopnie „ważności" poszczególnych kryteriów (czyli wagi α_l) nie są znane, określona jest natomiast pewna hierarchia ważności kryteriów, czyli relacja $W \subset K^2$. W przypadku relacji klasycznej W definiujemy następująco:

$K_u W K_v \Leftrightarrow$ ocena według kryterium K_u jest co najmniej tak ważna jak ocena według kryterium K_v. W przypadku relacji rozmytej relacja W definiowana jest przez funkcję przynależności $\mu: K \times K \to [0,1]$, a $\mu(K_u, K_v)$ to stopień przynależności pary (K_u, K_v).

Na podstawie podanej relacji W oraz relacji słabych preferencji R_l tworzymy relację Q według formuły $\mu_Q(x_i, x_j) = \sup\limits_{K_u, K_v \in K} \min \{\mu^{nd}(x_i, K_u), \mu^{nd}(x_j, K_v), \mu(K_u, K_v)\}$, gdzie $\mu^{nd}(x_i, K_u)$ jest stopniem niezdominowania elementu x_i w relacji słabej preferencji R_u dla kryterium K_u, natomiast $\mu(K_u, K_v) = \begin{cases} 1 & gdy\ K_u W K_v \\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku \end{cases}$ dla relacji klasycznej W, albo jest stopniem przynależności pary (K_u, K_v) w relacji rozmytej W.

Ostatecznie wyznaczamy stopnie niezdominowania $\mu_Q^{nd}(x_i)$ elementów $x_i \in X$ w relacji Q oraz tzw. poprawione stopnie niezdominowania $\mu^{ndp}(x_i) = \min \{\mu_Q^{nd}(x_i), \sup\limits_{K_u \in K} \mu^{nd}(x_i, K_u)\}$

Na tej podstawie wybieramy najbardziej optymalną decyzję, którą jest decyzja o maksymalnym stopniu μ^{ndp}.

Zobaczmy teraz, jak wygląda problem wyznaczenia decyzji optymalnej dla danych jak w przykładzie 1., przy czym załóżmy, że dana jest macierz subiektywnej ważności ocen W postaci

W	A	B	C	D
A	1	1	1	1
B	1	1	1	1
C	0	0	1	0
D	0	0	1	1

Wyznaczmy najpierw stopnie niezdominowania poszczególnych elementów według kryteriów A, B, C i D.

Na podstawie zaostrzeń R_A^s, R_B^s, R_C^s i R_D^s

R_A^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0
x_2	1	0	1	0
x_3	1	0	0	1
x_4	1	0	0	0

R_B^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0
x_2	1	0	0	0
x_3	1	0	0	0
x_4	1	1	1	0

R_C^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	0	0	1	1
x_3	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0

R_D^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0
x_2	1	0	0	0
x_3	1	0	0	0
x_4	1	1	1	0

mamy

μ^{nd}	A	B	C	D
x_1	0	0	1	0
x_2	1	0	0	0
x_3	0	0	0	0
x_4	0	1	0	1

oraz

Q	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	1	1	0	1
x_3	0	0	0	0
x_4	1	1	1	1

Teraz na podstawie macierzy Q wyznaczamy Q^s

Q^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0
x_2	1	0	0	0
x_3	0	0	0	0
x_4	1	0	0	0

a dalej stopnie niezdominowania $\mu_Q^{nd}(x_1) = 0$, $\mu_Q^{nd}(x_2) = 1$, $\mu_Q^{nd}(x_3) = 1$, $\mu_Q^{nd}(x_4) = 1$ i poprawione stopnie niezdominowania $\mu^{ndp}(x_1) = 0$, $\mu^{ndp}(x_2) = 1$, $\mu^{ndp}(x_3) = 0$, $\mu^{ndp}(x_4) = 1$. Na tej podstawie stwierdzamy, że najbardziej optymalne decyzje to x_2 oraz x_4.

Rozważane do tej pory przykłady bazowały na relacjach słabych preferencji podanych w postaci klasycznej. Można tę sytuację uogólnić, biorąc pod uwagę relacje rozmyte, tzn. wszystkie relacje R_i, R_i^s, R, R^s, W, Q i Q^s mogą być relacjami rozmytymi podanymi przez odpowiednie funkcje przynależności [2]. Pokażemy to w przykładzie.

Przykład 2.

Dany jest zbiór decyzji dopuszczalnych $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Każda z decyzji oceniana jest na podstawie czterech kryteriów K_1, K_2, K_3, K_4. Rozmyte relacje preferencji według poszczególnych kryteriów podane są w postaci macierzy

R_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,4	0,1	0
x_2	1	1	1	1
x_3	0,8	0	1	0
x_4	0	0	0	1

R_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0,5	0,3
x_2	0	1	0,8	0
x_3	0,5	0,3	1	0,1
x_4	0,8	0,8	0,8	1

R_3	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0,4	0
x_2	0	1	0	0
x_3	0,9	0	1	1
x_4	1	1	0	1

R_4	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0,2	1
x_2	1	1	0,8	0
x_3	0,6	0	1	0,4
x_4	0,8	1	1	1

Dana jest również rozmyta relacja względnej ważności kryteriów W

W	K_1	K_2	K_3	K_4
K_1	1	1	1	0,2
K_2	1	1	0	0,8
K_3	0,8	1	1	1
K_4	0,6	0	0,4	1

Na podstawie powyższych danych wyznaczymy zbiór rozmyty niezdominowanych decyzji oraz decyzję najbardziej optymalną.

Po wyznaczeniu zaostrzeń R_1^s, R_2^s, R_3^s i R_4^s

R_1^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0
x_2	0,6	0	1	1
x_3	0,7	0	0	0
x_4	0	0	0	0

R_2^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0
x_2	0	0	0,5	0
x_3	0	0	0	0
x_4	0,5	0,8	0,7	0

R_3^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0
x_3	0,5	0	0	1
x_4	1	1	0	0

R_4^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0,2
x_2	0	0	0,8	0
x_3	0,4	0	0	0
x_4	0	1	0,6	0

znajdujemy stopnie niezdominowania poszczególnych elementów przy każdym z kryteriów

μ^{nd}	K_1	K_2	K_3	K_4
x_1	0,3	0,5	0	0,6
x_2	1	0,2	0	0
x_3	0	0,3	1	0,2
x_4	0	1	0	0,8

a dalej relacje Q i Q^s

Q	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,6	0,6	0,4	0,6
x_2	0,5	1	1	1
x_3	0,6	0,8	1	1
x_4	0,6	1	0,4	1

Q^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0,1	0	0
x_2	0	0	0,2	0
x_3	0,2	0	0	0,6
x_4	0	0	0	0

oraz stopnie niezdominowania $\mu_Q^{nd}(x_1) = 0{,}8$; $\mu_Q^{nd}(x_2) = 0{,}9$; $\mu_Q^{nd}(x_3) = 0{,}8$; $\mu_Q^{nd}(x_4) = 0{,}4$, a w końcu poprawione stopnie niezdominowania $\mu^{ndp}(x_1) = 0{,}6$; $\mu^{ndp}(x_2) = 0{,}9$; $\mu^{ndp}(x_3) = 0{,}8$; $\mu^{ndp}(x_4) = 0{,}4$.

Na tej podstawie stwierdzamy, że najbardziej optymalne decyzje to kolejno x_2, x_3, x_1 i x_4.

4. Podsumowanie

W większości problemów optymalizacyjnych występuje bardzo dużo rozwiązań Pareto–optymalnych, co powoduje, że ze względów teoretycznych, a zwłaszcza aplikacyjnych, nie można w ogóle mówić o jakimkolwiek praktycznym rozwiązaniu problemu.

Wprowadzenie średniej lub średniej ważonej jako kryterium ogólnego, powstałego na podstawie kryteriów cząstkowych niweluje znaczną część sytuacji pierwotnie nierozstrzygalnych. Podejście to wymaga jednak co najmniej założenia przechodniości relacji względnej ważności kryteriów (nie jest możliwe np. podanie wag dla kryteriów K_1, K_2, K_3, których preferencje W określone są następująco $K_1 W K_2$, $K_2 W K_3$ i nie $K_3 W K_2$ i $K_3 W K_1$). Z kolei w przypadku, gdy podanie wag jest możliwe to może być bardzo trudne ze względu na konieczność uwzględnienia powiązań w całym zbiorze kryteriów, a także wybór odpowiedniej skali ([1]). Zdecydowanie łatwiej uzyskać odpowiedź na pytanie, która z dwóch decyzji jest według danego kryterium lepsza i w jakim stopniu oraz które z dwóch kryteriów jest ważniejsze i w jakim stopniu.

Ze względu na istotność informacji o preferencjach dla każdego kryterium oraz preferencji kryteriów konstrukcja relacji Q zależy od stopnia niezdominowania odpowiednich elementów oraz od względnej ważności kryteriów.

Weźmy pod uwagę decyzje $x, y \in X$, wtedy $\mu^{nd}(x, K_i)$ oraz $\mu^{nd}(y, K_j)$ są funkcjami przynależności opisującymi podzbiory rozmyte zbioru decy-

zji dopuszczalnych X. Jeżeli $\mu(K_i K_j)$ jest stopniem, w jakim kryterium K_i jest nie gorsze od K_j, to stopień, w jakim decyzja x jest nie gorsza od od decyzji y przy uwzględnieniu ważności kryteriów opisany jest formułą

$$\mu_{\mathcal{Q}}(x,y) = \sup_{K_u, K_v \in K} \min\left\{\mu^{nd}(x, K_i), \mu^{nd}(y, K_j), \mu(K_i K_j)\right\}.$$

Wstępne idee na podstawie których powstał ten wzór dotyczące obrazu zbioru rozmytego w relacji rozmytej podał Zadech w artykule *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes* w Trans. Systems, Man and Cybernetics wydanym przez Institute of Electrical and Electronics Engineers w 1973 roku. Rozumowanie to podjął i uzupełnił Orlovski [2], podając sposób porównywania zbiorów rozmytych za pomocą relacji rozmytych. Ostatecznie, ponieważ zbiór elementów wykazujących pewną nie predykatywną własność jest pewnym zbiorem rozmytym, można było to porównanie zastosować do porównywania alternatyw o określonych własnościach.
Skonstruowanie w ten sposób relacji $\mathcal{Q}$ powoduje zredukowanie wielu kryteriów do jednego. Wyznaczając optymalną decyzję, postępujemy dalej w sposób klasyczny dla wyborów w warunkach rozmytości.

Wyznaczenie jednego kryterium ogólnego w sposób powyższy pozwala więc sensownie wskazać optymalne decyzje w przypadkach, w których nie można zastosować podejścia opartego na uśrednianiu. Niedogodnością tej metody jest jej stosunkowo duża złożoność, jednak dzięki rozwojowi techniki bariera ta jest coraz łatwiej pokonywana.

Literatura

[1] Z. Galas, I. Nykowski, Z. Żółkiewski, *Programowanie wielokryterialne*, PWE, Warszawa 1987
[2] S. Orlovski, *Calculus of decomposable properties, fuzzy sets, and decisions*, Allerton Press, Inc. New York 1994
[3] B. Roy, *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*, WNiT, Warszawa 1990