## SPIS TREŚCI

**WYKAZ WAŻNIEJSZYCH SYMBOLI MATEMATYCZNYCH ..... 5**

**WSTĘP ..... 9**

### CZĘŚĆ 1. TEORIA POPYTU KONSUMENTA

*(Roman Kiedrowski, Michał Konopczyński)*

**ROZDZIAŁ 1. POLE PREFERENCJI KONSUMENTA ..... 11**

1.1. Przestrzeń towarów ..... 11
1.2. Relacja preferencji konsumenta ..... 16
1.3. Optymalny koszyk towarów i warunki jego istnienia ..... 21
1.4. Zadania ..... 29

**ROZDZIAŁ 2. FUNKCJA UŻYTECZNOŚCI ..... 31**

2.1. Funkcja użyteczności jako liczbowa charakterystyka relacji preferencji konsumenta ..... 31
2.2. Warunki istnienia i własności funkcji użyteczności ..... 33
2.3. Użyteczności krańcowe towarów i prawo Gossena ..... 37
2.4. Krańcowa stopa substytucji i elastyczność substytucji towarów ..... 45
2.5. Zadania ..... 53

**ROZDZIAŁ 3. FUNKCJA POPYTU KONSUMENTA ..... 57**

3.1. Zadanie maksymalizacji użyteczności konsumpcji ..... 57
3.2. Funkcja popytu konsumenta i jej własności ..... 68
3.3. Funkcja kompensacyjnego popytu ..... 87
3.4. Równanie Słuckiego – substytucyjne i dochodowe efekty zmiany ceny ..... 92
3.5. Zadania ..... 98

## CZĘŚĆ 2. TEORIA PRODUKCJI

*(Roman Kiedrowski, Krzysztof Malaga)*

**ROZDZIAŁ 4. PRZESTRZENIE PRODUKCYJNE I FUNKCJE PRODUKCJI ..... 103**

4.1. Przestrzenie produkcyjne ..... 103

4.2. Funkcja produkcji i wybrane charakterystyki procesu produkcji ..... 110

4.3. Podstawowe funkcje produkcji i ich własności ..... 118

4.4. Zadania ..... 141

**ROZDZIAŁ 5. NEOKLASYCZNA TEORIA PRZEDSIĘBIORSTWA ..... 147**

5.1. Przedsiębiorstwo w warunkach konkurencji doskonałej – strategia długookresowa ..... 148

5.2. Przedsiębiorstwo w warunkach konkurencji doskonałej - strategia krótkookresowa ..... 165

5.3. Przedsiębiorstwo w warunkach monopolu ..... 179

5.4. Zadania ..... 196

## CZĘŚĆ 3. TEORIA RÓWNOWAGI OGÓLNEJ

*(Roman Kiedrowski, Michał Konopczyński,*

*Piotr Maćkowiak, Krzysztof Malaga)*

**ROZDZIAŁ 6. STATYCZNE MODELE RÓWNOWAGI ..... 203**

6.1. Prosty model wymiany ..... 203

6.2. Model Arrowa-Hurwicza ..... 209

6.3. Model Arrowa-Debreu-McKenziego ..... 225

6.4. Zadania ..... 243

**ROZDZIAŁ 7. STABILNOŚĆ RÓWNOWAGI W MODELACH DYNAMICZNYCH . 245**

7.1. Dynamiczny model Arrowa-Hurwicza ..... 245

7.2. Dynamiczny model Arrowa-Debreu-McKenziego ..... 271

7.3. Zadania ..... 278

**BIBLIOGRAFIA ..... 281**

## Wykaz ważniejszych symboli matematycznych

$x \in A$ - element $x$ należy do zbioru $A$

$x \notin A$ - element $x$ nie należy do zbioru $A$

$\{x \mid P\}$ - zbiór elementów $x$ mających własność $P$

$\{x^1,...,x^n\}$ - zbiór złożony z elementów $x^1,...,x^n$

$A \subset B$ - zbiór $A$ jest podzbiorem właściwym zbioru $B$

$A \subseteq B$ - zbiór $A$ jest podzbiorem właściwym zbioru $B$ lub $A = B$

$A \cup B$ - suma zbiorów $A$ i $B$

$A \cap B$ - iloczyn zbiorów $A$ i $B$

$A \setminus B$ - różnica zbiorów $A$ i $B$

$\forall x \ P(x)$ - dla każdego $x$ spełniony jest warunek $P(x)$

$\exists x \ P(x)$ - istnieje takie $x$, które spełnia warunek $P(x)$

$\neg P$ - negacja zdania $P$ (nieprawda, że zachodzi $P$)

$P \wedge Q$ - koniunkcja zdań $P$ i $Q$ (zachodzi równocześnie $P$ i $Q$)

$P \Rightarrow Q$ - implikacja zdań $P$ i $Q$ (jeżeli zachodzi $P$, to zachodzi $Q$)

$P \Leftrightarrow Q$ - równoważność zdań $P$ i $Q$ ($P$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $Q$)

$P \vee Q$ - alternatywa zdań $P$ i $Q$ (zachodzi $P$ lub $Q$)

$x$ - skalar (liczba)

$\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)$ - wektor

$\mathbf{x}^T$ - wektor transponowany

$U_\varepsilon(\mathbf{x})$ - otoczenie wektora $\mathbf{x}$ o promieniu $\varepsilon$

$\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$ - norma przyporządkowująca wektorowi $\mathbf{x} \in R^n$ maksymalną spośród wartości bezwzględnych jego współrzędnych

$\|\mathbf{x}\|_E = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ - norma Euklidesa

$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$ - odległość Euklidesa pomiędzy wektorami $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$

$S^n(r) = \{\mathbf{p} \in R^n \mid \|\mathbf{p}\|_E = r\}$ - powierzchnia kuli $n$-wymiarowej (sfera) o promieniu $r$ i środku w początku układu współrzędnych

$\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ - oznacza, że $x_i \geq y_i$, $i=1,\ldots,n$

$\mathbf{x} > \mathbf{y}$ - oznacza, że $x_i > y_i$, $i=1,\ldots,n$

$\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}$ - oznacza, że $\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ - „koszyk **x** jest lepszy od koszyka **y** (silnie preferowany nad koszyk **y**)"

$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ - „koszyki **x** i **y** są jednakowo dobre (indyferentne)"

$\mathbf{x} \precsim \mathbf{y}$ - „koszyk **x** jest nie gorszy od koszyka **y** (preferowany nad koszyk **y**)"

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ - iloczyn wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$

$R^n$ - przestrzeń wektorowa $n$-wymiarowa

$R_+^n = \left\{ \mathbf{x} \in R^n \middle| \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$ - nieujemny orthant przestrzeni $R^n$

$\operatorname{int} R_+^n = \left\{ \mathbf{x} \in R^n \middle| \mathbf{x} > \mathbf{0} \right\}$ - wnętrze przestrzeni $R_+^n$

$X$ - macierz

$X^T$ - macierz transponowana

$|X| = \det X$ - wyznacznik macierzy $X$

$X^{-1}$ - macierz odwrotna do kwadratowej macierzy $X$

$f: A \to B$ - odwzorowanie $f$ z $A$ do $B$

$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ - pochodna funkcji $f: R^1 \to R^1$ w punkcie $x$

$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}}$ - wartość pochodnej funkcji $f: R^1 \to R^1$ w punkcie $\bar{x}$

$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ - pochodna cząstkowa funkcji $f: R^n \to R^1$ $(i = 1,\ldots,n)$

$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$ - druga pochodna cząstkowa funkcji $f: R^n \to R^1$ $(i, j = 1,\ldots,n)$

$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)$ - gradient funkcji $n$-zmiennych $f : R^n \to R^1$ w punkcie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}}$ - wektor wartości gradientu funkcji $f : R^n \to R^1$ w punkcie $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$

$H(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = \left( \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}$ - hesjan funkcji $f : R^n \to R^1$

$\int f(x)dx$ - całka nieoznaczona funkcji $f : R^1 \to R^1$

$\lim_{x \to a} f(x)$ - granica funkcji $f : R^1 \to R^1$ w punkcie $a$

$\lim_{x \to a^+} f(x)$ - granica funkcji $f : R^1 \to R^1$, gdy $x$ zmierza do $a$ z prawej strony (granica prawostronna funkcji $f$ w punkcie $a$)

$\lim_{x \to a^-} f(x)$ - granica funkcji $f : R^1 \to R^1$, gdy $x$ zmierza do $a$ z lewej strony (granica lewostronna funkcji $f$ w punkcie $a$)

$\max_{x \in A} f(x)$ - maksymalna wartość funkcji $f$ na zbiorze $A$

$\arg\max_{x \in A} f(x)$ - argument, dla którego funkcja $f$ osiąga maksymalną wartość na zbiorze $A$

# Wstęp

Praca stanowi materiał pomocniczy do przedmiotu „Ekonomia matematyczna" wykładanego aktualnie w Akademii Ekonomicznej w Poznaniu na III roku studiów dziennych i wieczorowych oraz na II roku studiów uzupełniających magisterskich. Nawiązuje do treści podręcznika *Elementy ekonomii matematycznej* , t. I: *Statyka* (Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993, oraz t. II: *Równowaga i wzrost* (Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997), a także do fragmentów obszernego podręcznika *Ekonomia matematyczna* , jaki ukaże się z początkiem roku 2000 nakładem Wydawnictwa Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.

Celem pracy jest przedstawienie studentom w przystępnej formie problematyki będącej przedmiotem wspomnianych podręczników. Opracowanie, poprzez zawarte w nim liczne przykłady, ilustracje geometryczne i wyniki symulacji komputerowych, ma ułatwić samodzielne studiowanie przedmiotu, co jest szczególnie ważne w przypadku studentów zaocznych. Ważną cechą opracowania są zamieszczone w nim liczne zadania. Rozwijana na ćwiczeniach i w ramach prac domowych studentów umiejętność ich rozwiązywania jest ważnym elementem aktywnej nauki przedmiotu.

Praca, zgodna z programem nauczania „Ekonomii matematycznej", składa się z trzech części. Pierwsza część poświęcona jest teorii popytu konsumenta i obejmuje zagadnienia związane z relacją preferencji konsumenta, funkcją użyteczności i funkcją popytu. Druga część dotyczy teorii produkcji. Rozpoczyna ją przegląd podstawowych informacji o przestrzeniach produkcyjnych i przykładowych funkcjach produkcji. Następnie prezentowana jest neoklasyczna teoria przedsiębiorstwa w przypadku doskonałej konkurencji i monopolu. Omawiane są optymalne strategie przedsiębiorstwa w długim i krótkim horyzoncie czasowym.

Przedmiotem ostatniej, trzeciej części jest teoria równowagi ogólnej. Rozpoczyna ją prezentacja dwóch modeli wymiany, których założenia i konstrukcja związane są ściśle z teorią popytu konsumenta z części pierwszej. Uogólnieniem tych modeli jest model równowagi ogólnej Arrowa-Debreu-McKenziego. Jest on zwornikiem spinającym w jedną spójną konstrukcję całość wcześniej omówionego materiału, dotyczącego zarówno teorii popytu, jak i teorii produkcji.

W ramach trzeciej części, oprócz zagadnień związanych z istnieniem, jednoznacznością i własnościami stanów równowagi ogólnej, rozpatruje się także problematykę stabilności systemów ekonomicznych, czyli ich zdolności do osiągania stanów równowagi. W tym celu prezentowane są dwa modele dynamiczne i otrzymane na ich podstawie wyniki komputerowej analizy stabilności.

Emil Panek