Piotr DWORNICZAK

ZASTOSOWANIE LICZB ROZMYTYCH KLASY *L-R* DO OKREŚLANIA ZAKTUALIZOWANEJ WARTOŚCI NETTO INWESTYCJI

Wprowadzenie

Podstawą oceny projektu inwestycyjnego jest jego opłacalność. Może być ona wyznaczana za pomocą wielu różnych kryteriów i wskaźników. Podstawowym takim wskaźnikiem jest wartość zaktualizowana netto, oznaczana skrótem *NPV* (ang. *net present value*) obliczana według formuły:

$$NPV = \sum_{i=1}^{n} \frac{NCF_i}{(1+r)^i} - CF_0. \tag{1}$$

gdzie:

n – liczba okresów bazowych trwania inwestycji,
NCF_i – przepływ netto generowany przez inwestycję w okresie bazowym i,
CF_0 – nakład inwestycyjny konieczny do uruchomienia inwestycji,
r – wartość stopy dyskontowej w jednym okresie bazowym.

Przyjmuje się przy tym zazwyczaj, że przepływy pieniężne NCF_i pojawiają się na końcach okresów bazowych, a stopa dyskontowa r jest stała dla wszystkich okresów bazowych. Przy stopach dyskontowych zmieniających się w czasie formuła (1) przyjmuje następującą postać:

$$NPV = \sum_{i=1}^{n} \frac{NCF_i}{\prod_{k=1}^{i} (1+r_k)} - CF_0. \tag{2}$$

Zasada przyjęcia lub odrzucenia projektu na podstawie *NPV* jest następująca: jeżeli *NPV* jest niedodatnia, to projekt należy odrzucić, a jeżeli dodatnia, to poddać dalszej analizie, przy czym najlepszym projektem jest ten o największej wartości *NPV*. W praktyce przy obliczaniu *NPV* występować mogą problemy związane z koniecznością prognozowania przyszłych przepływów oraz stóp dyskontowych. Prognozowane wartości są często tylko przybliżone, gdyż na podstawie dzisiejszego stanu wiedzy tylko takie można uzyskać. Można jednak dzięki nim dojść do wniosków, wspomagających podjęcie decyzji ([1], s. 5). Takie właśnie podejście przedstawione zostanie w tym artykule.

1. Liczby rozmyte klasy *L-R*

Jednym ze sposobów reprezentacji niepewnych danych jest podanie ich w postaci liczb rozmytych.

Definicja 1. Liczbą rozmytą nazywamy (zob. [2]) zbiór rozmyty $A=\{(x, \mu_A(x)) : x \in \mathcal{R}\}$, o ciągłej funkcji przynależności $\mu_A : \mathcal{R} \to [0, 1]$ która jest:

- stała, równa 0, na przedziałach $(-\infty, c]$ oraz $[d, +\infty)$,
- ściśle rosnąca na przedziale $[c, a]$,
- stała, równa 1, na przedziale $[a, b]$,
- ściśle malejąca na przedziale $[b, d]$,

gdzie $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ oraz $c \leqslant a \leqslant b \leqslant d$.

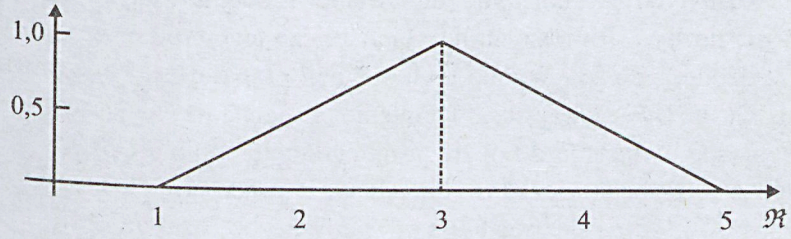
W szczególnym przypadku może być, że $c=-\infty$ lub $a=b$, lub $c=a$, lub $b=d$, lub $d=+\infty$.

Należy zauważyć, że w literaturze można spotkać także inne definicje liczby rozmytej. Na przykład w pracy [6] Matłoka określa liczbę rozmytą jako zbiór rozmyty, którego funkcja przynależności $\mu_A : \mathcal{R} \to [0, 1]$ spełnia warunki:

- istnieje liczba $x_0 \in \mathcal{R}$ taka, że $\mu_A(x_0)=1$,
- istnieje taki zbiór zwarty $K \subset \mathcal{R}$, że $\{x : \mu_A(x)>0\} \subset K$,
- dla dowolnego $\lambda \in (0, 1]$ zbiór $A^\lambda=\{x : \mu_A(x) \geqslant \lambda\}$, zwany λ-obcięciem zbioru A, jest zbiorem wypukłym,
- funkcja μ_A jest półciągła z góry, tzn. zbiór $\{x : \mu_A(x)<\lambda\}$ jest otwarty dla każdego $\lambda \in [0, 1]$.

Z jeszcze dalej idącym rozszerzeniem pojęcia liczby rozmytej można się spotkać w pracy [4] Grabischa, który nie nakłada żadnych ograniczeń na funkcję $\mu_A : \mathcal{R} \to [0, 1]$.

Przykładem liczby rozmytej jest „liczba rzeczywista około 3". Jej funkcję przynależności można przedstawić jak na rysunku 1. Przyjąłem, że na przykład stopień przynależności liczby 2 do zbioru określonego jako „liczba rzeczywista około 3" wynosi 0,5. Taki sam stopień przynależności przypisany jest liczbie 4. Nie jest to konieczne. Stopień przynależności jest miarą subiektywnej oceny prawdziwości (w logice wielowartościowej) zdania orzekającego, że dany element spełnia podaną własność nieostrą. W naszym przypadku własność, że „liczba 2 (lub 4) jest liczbą rzeczywistą około 3".



Rys. 1. Funkcja przynależności liczby rozmytej „około 3"

Funkcja przynależności została tutaj określona wzorem

$$\mu_A(x)=\begin{cases}-0{,}5x+2{,}5 & \text{dla } x\in[3,\,5],\\ 0{,}5x-0{,}5 & \text{dla } x\in[1,\,3),\\ 0 & \text{dla } x\notin[1,\,5].\end{cases}$$

Szczególnym typem liczb rozmytych są liczby klasy *L-R* wprowadzone w pracy [2] przez Duboisa i Pradego.

Definicja 2. Liczbą rozmytą klasy *L-R* nazywamy liczbę rozmytą o funkcji przynależności

$$\mu(x)=\begin{cases}L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & \text{dla } x\leqslant m\\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & \text{dla } x>m,\end{cases}$$

gdzie L i R są ciągłymi funkcjami z $\mathcal{R}$ do $[0, 1]$, spełniającymi następujące warunki:

$L(-x)=L(x)$ i $R(-x)=R(x)$,

$L(0)=1$ i $R(0)=1$,
L i R są nierosnące na przedziale $[0, \infty)$.

Parametry $m \in \mathcal{R}$, $\alpha>0$ i $\beta>0$ to odpowiednio wartość średnia oraz rozrzut lewostronny i prawostronny liczby rozmytej A. Liczbę rozmytą A klasy L-R zapisuje się często w postaci trójparametrycznej $(m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$. Przyjmując dodatkowo, że dla $\alpha=0$ i $\beta=0$ wartości funkcji L i R wynoszą 1 dla $x=a$ oraz 0 dla $x \neq a$, można utożsamiać liczbę rzeczywistą a z trójką $(a, 0, 0)_{LR}$ przy dowolnych funkcjach L i R.

Na liczbach rozmytych klasy L-R można, znacznie łatwiej niż na dowolnych liczbach rozmytych, wykonywać dodawanie i odejmowanie. Wyznaczenie odwrotności liczby L-R, iloczynu lub ilorazu liczb tego typu może być również przeprowadzone, jednakże wyniki tych operacji mogą być jedynie przybliżone liczbami klasy L-R. Wszystkie wymienione działania mają tę zaletę, że sprowadzają się wyłącznie do operacji na parametrach m, α i β.

Niech A i B będą liczbami określonymi przez trójki $(m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$ i $(m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LR}$. Sumą liczb A i B nazywamy liczbę rozmytą

$$A+B=(m_A+m_B, \alpha_A+\alpha_B, \beta_A+\beta_B)_{LR}.$$

Różnicę określa się analogicznie. Iloczyn liczb A i B można przybliżyć liczbą rozmytą klasy L-R reprezentowaną przez trójkę

$$(m_A \cdot m_B, m_B \cdot \alpha_A + m_A \cdot \alpha_B, m_B \cdot \beta_A + m_A \cdot \beta_B)_{LR}.$$

Przybliżenie to jest tym dokładniejsze, im mniejsze są stosunki

$$\frac{\alpha_A}{m_A}, \quad \frac{\alpha_B}{m_B}, \quad \frac{\beta_A}{m_A}, \quad \frac{\beta_B}{m_B}.$$

Z określenia iloczynu wynika łatwo wzór na potęgę A^k liczby A o postaci $(m_A^k, k \cdot m_A \cdot \alpha_A, k \cdot m_A \cdot \beta_A)_{LR}$. Podobnie tylko w postaci przybliżonej można przedstawić odwrotność liczby rozmytej A. Jest nią liczba

$$\left(\frac{1}{m_A}, \frac{\beta_A}{m_A^2}, \frac{\alpha_A}{m_A^2}\right)_{RL}.$$

Przybliżenie to jest tym dokładniejsze, im mniejsze są stosunki $\frac{\alpha_A}{m_A}$ i $\frac{\alpha_B}{m_B}$ (por. [7], s. 107-119).

Zobaczmy, jak opisane działania można wykorzystać do szacowania liczby rozmytej, będącej wartością zaktualizowaną netto pewnego projektu inwestycyjnego, dla którego wpływy i wydatki oraz stopy dyskontowe przyjęte zostały jako liczby klasy *L-R*.

2. Rozmyta wartość *NPV*

Rozważmy projekt inwestycyjny o nakładzie początkowym CF_0^- oraz późniejszych wydatkach CF_1^-, CF_2^-, ..., CF_n^- i wpływach CF_1^+, CF_2^+, ..., CF_n^+ ponoszonych na końcach kolejnych n okresów bazowych. Wpływy netto wynoszą $NCF_i = CF_i^+ - CF_i^-$ dla $i = 1, ..., n$. Załóżmy, że wydatki i wpływy nie są znane dokładnie, lecz obecna wiedza na ich temat pozwala wyrazić je jako liczby rozmyte klasy *L-R*. Przyjmijmy, że przewidywane wydatki i wpływy wynoszą „około CF_0^-", „około CF_1^- itd., które to wielkości można przedstawić w postaci trójparametrycznej odpowiednio jako

$$(m_0^-, \alpha_0^-, \beta_0^-)_{LR}, (m_1^-, \alpha_1^-, \beta_1^-)_{LR}, ..., (m_1^+, \alpha_1^+, \beta_1^+)_{LR}, ..., (m_n^+, \alpha_n^+, \beta_n^+)_{LR}.$$

Przyjmijmy, że stopa dyskontowa za każdy okres bazowy będzie stała, równa „około r", przy czym dziś można jedynie oszacować jej wartość jako $(m_r, \alpha_r, \beta_r)_{RL}$. Przy tych założeniach dla $i = 1, ..., n$, zachodzą wzory:

$$NCF_i = (m_i, \alpha_i, \beta_i)_{LR},$$

$$1 + r = (1 + m_r, \alpha_r, \beta_r)_{RL},$$

$$(1+r)^i \approx ((1+m_r)^i, i \cdot (1+m_r) \cdot \alpha_r, i \cdot (1+m_r) \cdot \beta_r)_{RL},$$

$$\frac{1}{(1+r)^i} \approx \left(\frac{1}{(1+m_r)^i}, \frac{i \cdot (1+m_r) \cdot \beta_r}{(1+m_r)^{2i}}, \frac{i \cdot (1+m_r) \cdot \alpha_r}{(1+m_r)^{2i}} \right)_{LR}.$$

Poszczególne składniki sumy (1) wyrażone są zatem formułą

$$\frac{NCF_i}{(1+r)^i} \approx$$

$$\approx \left(\frac{m_i}{(1+m_r)^i}, \frac{\alpha_i}{(1+m_r)^i} + \frac{i \cdot (1+m_r) \cdot \beta_r \cdot m_i}{(1+m_r)^{2i}}, \frac{\beta_i}{(1+m_r)^i} + \frac{i \cdot (1+m_r) \cdot \alpha_r \cdot m_i}{(1+m_r)^{2i}} \right)_{LR}.$$

Ostatecznie

$$NPV = \sum_{i=0}^{n} \frac{NCF_i}{(1+r)^i} \approx$$

$$\approx \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{m_i}{(1+m_r)^i}, \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i \cdot (1+m_r)^i + i \cdot (1+m_r) \cdot \beta_r \cdot m_i}{(1+m_r)^{2i}}, \right.$$

$$\left. \sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i \cdot (1+m_r)^i + i \cdot (1+m_r) \cdot \alpha_r \cdot m_i}{(1+m_r)^{2i}} \right)_{LR}. \qquad (3)$$

Wzór (3) pozwala na wyznaczenie najbardziej możliwej wartości *NPV*, a ponadto niesie informację o możliwości wystąpienia wartości zbliżonych.

Gdy wartości przyszłych przepływów uznane są za dokładne, wzór (3) sprowadza się oczywiście do wzoru klasycznego (1). Zobaczmy działanie opisanej procedury na podstawie przykładowych danych liczbowych. Ze względu na możliwość intuicyjnej kontroli wyników rozważane są tylko cztery okresy bazowe.

PRZYKŁAD 1

Przepływy netto związane z pewną inwestycją w postaci liczb klasy *L-R*:

Tabela 1. Prognozowane przepływy netto inwestycji

Numer okresu bazowego i	Przewidywana wielkość NCF_i		
	środek m_i	rozrzut lewostronny α_i	rozrzut prawostronny β_i
0	−100	0	0
1	−20	5	5
2	50	8	9
3	70	9	9
4	120	10	8

Źródło: Dane przykładowe.

Stopa dyskontowa wynosi: $r = (5\%, 1\%, 2\%)_{RL}$.

Wartości ilorazów $\frac{NCF_i}{(1+r)^i}$ są wtedy następujące:

Tabela 2. Wartości ilorazów $\frac{NCF_i}{(1+r)^i}$

Numer okresu bazowego i	Wartości $\frac{NCF_i}{(1+r)^i}$		
	środek m_i	rozrzut lewostronny α_i	rozrzut prawostronny β_i
0	−100	0	0
1	−19,048	4,38095	4,57143
2	45,3515	8,98391	9,0271
3	60,4686	11,0653	9,41994
4	98,7243	15,0496	9,99289

Ostatecznie $NPV=(85{,}4968;\ 39{,}4798;\ 33{,}0114)_{LR}$.

3. Procedury defuzyfikacyjne

Podanie *NPV* w postaci liczby rozmytej może być przez wielu uznane za niezadowalające. Praktycy chcieliby zazwyczaj odpowiedzi na pytanie o najbardziej możliwą wartość. W teorii zbiorów rozmytych jest to związane z tzw. defuzyfikacją. Działanie to polega na znalezieniu liczby rzeczywistej M „najbardziej zbliżonej" do danej liczby rozmytej. Opracowano już wiele sposobów rozwiązania tego zagadnienia. Podstawowe to metoda środka (metoda średniej) oraz metoda środka ciężkości. Pierwsza z nich, najprostsza, uznaje liczbę $M=m_A$ za przybliżenie liczby rozmytej $A=(m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$. Podejście to jest jednak krytykowane, gdyż nie zauważa się tu prawo- i lewostronnego rozrzutu.

Wady tej nie ma już metoda środka ciężkości. Liczbę M wyznacza się według formuły

$$M=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\mu_A(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty}\mu_A(x)dx}.$$

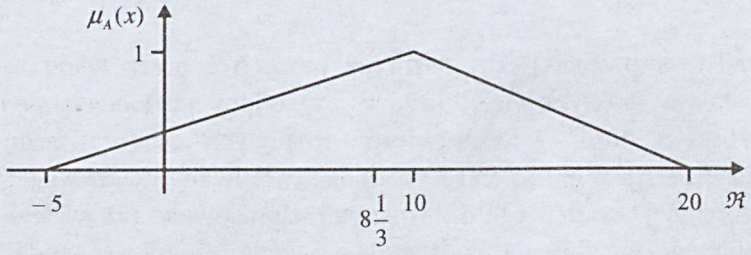
Jeżeli funkcje L i R oraz prawo- i lewostronne rozrzuty są równe, to obie metody są identyczne. Metodę środka ciężkości bardzo łatwo zastosować w przypadku tzw. trójkątnej liczby rozmytej, tzn. liczby rozmytej o funkcji przynależności podanej formułą:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\alpha}{m-\alpha}, & \text{gdy } x\in[\alpha, m],\\ \dfrac{\beta-x}{\beta-m}, & \text{gdy } x\in(m, \beta],\\ 0, & \text{gdy } x\notin[\alpha, \beta].\end{cases}$$

Z elementarnej geometrii analitycznej wiadomo, że pierwsza współrzędna środka ciężkości ma wartość $M=\dfrac{m+\alpha+\beta}{3}$.

PRZYKŁAD 2

Niech liczba A będzie liczbą trójkątną $(10, 15, 10)_{LR}$. Wykres funkcji przynależności podany jest na rysunku 2. Metoda środka wskazuje 10 jako liczbę rzeczywistą najbardziej zbliżoną do liczby A. Metoda środka ciężkości nakazuje natomiast przyjąć liczbę $8\frac{1}{3}$.



Rys. 2. Wykres funkcji przynależności liczby trójkątnej $(10, 15, 10)_{LR}$

Nie można w ogólności podać wzoru na środek ciężkości dla liczby klasy *L-R*. Łatwo jednak w tym przypadku określić środek liczby $A=(m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$ – jest nim liczba rzeczywista m_A. Jeżeli jednak zbiór $\{x: \mu_A(x)=1\}$ jest przedziałem $[a, b]$, to za środek liczby A przyjmuje się zazwyczaj liczbę $\dfrac{a+b}{2}$ lub nawet dowolną liczbę z przedziału $[a, b]$.

4. Inne sposoby interpretacji wyniku

W przypadku wyznaczenia rozmytej *NPV* istotne jest stwierdzenie, czy wartość ta jest większa od zera. Dla liczby rozmytej nie jest to jednoznaczne. Jednym ze sposobów stwierdzenia dodatniości liczby rozmytej może być posłużenie się

wskaźnikiem ρ, mierzącym stosunek pola obszaru pod wykresem funkcji gęstości dla dodatnich argumentów x do wielkości pola pod całym wykresem funkcji gęstości. Jest to oczywiście możliwe do obliczenia, gdy pola te są skończone. Dla danych z przykładu 2 wskaźnik ma wartość $\rho = \frac{14}{15}$. Im większy wskaźnik ρ, w tym większym stopniu liczba rozmyta uznana jest za dodatnią.

W przypadku porównywania wielu projektów inwestycyjnych potrzebne może być porównywanie wielu liczb rozmytych. Jest to zagadnienie mające liczne rozwiązania. Kilka z nich przedstawionych zostało w pracy [3].

W zagadnieniach związanych z planowaniem inwestycji uwzględnia się coraz częściej wiele wskaźników i stosuje wiele różnorodnych metod oceny inwestycji. Uznałem więc za celowe schematyczne przedstawienie pewnej propozycji. Tak jak inne i ta propozycja może być brana pod uwagę. Jej skuteczność można będzie ocenić dopiero po wielu latach praktyki.

Literatura

[1] Dałkowski B.T., Kuchta D., *Modele matematyczne w analizie ryzyka projektu*, w: *Materiały konferencyjne z Seminarium Project Management, Zarządzanie ryzykiem, Warszawa 2001*, Ośrodek Doradztwa i Treningu Kierowniczego Gdańsk oraz Stowarzyszenie Project Management Polska, Gdańsk 2001

[2] Dubois D., Prade H., *Operations on Fuzzy Numbers*, International Journal Systems Science vol. 9, 1978, 6, 613-626

[3] Dworniczak P., *Wybrane metody porównywania liczb rozmytych*, w: *Matematyka w ekonomii*, red. E. Panek, Zeszyty Naukowe nr 41, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2004

[4] Grabisch M., *Fuzzy Integral in Multicriteria Decision Making*, Fuzzy Sets and Systems vol. 69, Elsevier 1995, 279-298

[5] Kuchta D., *Rozmyte metody wyboru i oceny inwestycji*, w: *Metody i zastosowania badań operacyjnych*, cz. 2, red. T. Trzaskalik, Wydawnictwo AE, Katowice 1998

[6] Matłoka M., *Przedziałowe i rozmyte modele regresji*, w: *Prace z ekonometrii finansowej*, red. W. Jurek, Zeszyty Naukowe nr 18, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2002

[7] Łachwa A., *Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji*, Wydawnictwo AOW Exit, Warszawa 2001

APPLICATION OF FUZZY NUMBERS OF *L-R* CLASS FOR CALCULATIONS OF NET PRESENT VALUE

Summary

The basis of the valuation of the investment project is its profitability. This can be estimated using various criteria and indices. One of the indices is the net present value, known as *NPV*. When calculating *NPV* we might encounter problems connected with today's estimation of the future flows and the values of discount rates needed for the calculations. In this paper a proposition of application of fuzzy number of *L-R* class for calculation of *NPV* is put forward. Like other methods, this method might be taken into account. Its efficiency may be evaluated only after several years of practice.