Bogusław Guzik
Witold Jurek

UKŁADANIE „PROSTYCH" ZADAŃ Z EKONOMETRII

W praktyce dydaktycznej często próbuje się opracować takie zadania polecające wyznaczenie parametrów klasyczną mnk, żeby po rozwiązaniu zadań okazywało się, że parametry wyrażają się „prostymi" liczbami (np. liczbami całkowitymi). Parametry modelu używane są bowiem zwykle do dalszych obliczeń i „proste" liczby są wygodne. W artykule chcemy przedstawić pewne podejście do opracowywania takich zadań wykorzystujące własności układu równań normalnych.

1. Układ równań normalnych

Niech $f(a,\underline{X})$ oznacza model ekonometryczny, w którym $a = (a_i)_{i=1,..I}$ jest wektorem parametrów, natomiast $\underline{X} = (X_j)_{j=1,...,J}$ jest wektorem zmiennych objaśniających.

Przypuśćmy na chwilę, że dysponujemy macierzą $X = (X_{lj})$ wyników obserwacji zmiennych objaśniających oraz wektorem $y=(y_l)$ wyników obserwacji zmiennej objaśnianej Y $(l=1,...,L;\ j=1,...,J)$, przy czym $L > I$. Przy danej macierzy X i danym wektorze Y wyznaczony klasyczną mnk wektor parametrów a minimalizuje sumę kwadratów reszt

$$S = \sum_{l=1}^{L} e_l^2 = \sum_{l=1}^{L} (y_l - f_l)^2 ,$$

gdzie $f_l = f(a,x_l)$ jest wartością z modelu dla l-tej obserwacji,

$x_l = (x_{l1},...,x_{lJ})$ jest wierszowym wektorem wyników obserwacji zmiennych objaśniających w obserwacji l-tej, tzn. jest l-tym wierszem macierzy X.

Wektor a minimalizujący sumę kwadratów reszt spełnia - jak wiadomo - - układ równań normalnych

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0 \qquad (i=1,\ldots,I).$$

Oczywiście

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = \frac{\partial\left(\sum_{l=1}^{L} e_l^2\right)}{\partial a_i} = \sum_{l=1}^{L} \frac{\partial e_l^2}{\partial a_i},$$

$$\frac{\partial e_l^2}{\partial a_i} = \frac{\partial (y_l - f_l)^2}{\partial a_i} = -2(y_l - f_l)\frac{\partial f_l}{\partial a_i} = -2\, e_l\, \partial_{il},$$

gdzie

$$\partial_{il} = \frac{\partial f_l}{\partial a_i}.$$

Dla wektora a minimalizującego sumę kwadratów reszt przy danych obserwacjach X, y spełniony jest więc układ równań

$$\sum_{l=1}^{L} \partial_{il}\, e_l = 0 \qquad (i=1,\ldots,I).$$

Z tego właśnie układu równań możemy skorzystać opracowując (generując) takie wartości zmiennych, którym odpowiadają „proste" liczbowo rozwiązania zadań.

2. Procedury generowania wartości zmiennych

Pierwsza procedura. Polega ona na wygenerowaniu, przy danym wektorze a i danej macierzy X, takiego wektora y, by po zastosowaniu klasycznej mnk do wyników obserwacji $\{y \mid X\}$ otrzymać wektor parametrów a_G równy danemu wektorowi a. Postępowanie może polegać na następującym:

1° Ustalamy „prosty" liczbowo wektor parametrów a.

2° Ustalamy macierz X.

3° Przy danym wektorze a i danej macierzy X rozwiązujemy układ

(1) $$\sum_{l=1}^{L} \partial_{il}\, e_l = 0 \qquad (i=1,\ldots,I)$$

względem e_l $(l=1,\ldots,L)$.

4° Poszukiwanie wartości y_l obliczamy ze wzoru

(2) $$y_l = f_l + e_l \qquad (l=1,\ldots,L).$$

Układ (1) jest układem jednorodnych równań liniowych względem $e_1,\ldots,e_L$ Współczynniki tego układu

$$\partial_{il} = \frac{\partial f(a,x_l)}{\partial a_i} \qquad (i=1,\ldots,I;\ l=1,\ldots,L) \tag{3}$$

są znane, gdyż a oraz x_l są dane. Ze względu na założenie $L>I$ układ równań (1) ma rozwiązanie niezerowe, tzn. istnieje spełniający (1) układ liczb $e_1,\ldots,e_L$, z których przynajmniej jedna jest różna od zera. Jeśli $e^1,\ldots,e^K$ są rozwiązaniami układu (1), $e^k = (e_l^k)_{l=1,\ldots,L}$, to rozwiązaniem układu jest też liniowa kombinacja wektorów $e^1,\ldots,e^K$

$$e^{k+1} = \sum_{k=1}^{K} c_k\, e^k .$$

Symbolem c_k oznaczono współczynniki kombinacji nie będące równocześnie zerami.

Druga procedura. Polega ona na wygenerowaniu, przy danym wektorze a oraz danym wektorze e, takiej macierzy X, by stosując klasyczną mnk do wyników obserwacji $\{y \mid X\}$ otrzymać wektor a_G równy danemu wektorowi a. Procedura może polegać na następującym:

1° Ustalamy „prosty" liczbowo wektor parametrów a.

2° Ustalamy wektor reszt $e = (e_l)_{l=1,\ldots,L}$

3° Przy danym wektorze a i danym wektorze e rozwiązujemy układ

$$\sum_{l=1}^{L} \frac{\partial f(a,x_l)}{\partial a_i}\, e_l = 0 \qquad (i=1,\ldots,I) \tag{4}$$

względem x_{lj} $(l=1,\ldots,L;\ j=1,\ldots,J)$. Otrzymujemy wówczas macierz X.

4° Wartości y_l obliczamy według wzoru

$$y_l = f(a,x_l) + e_l \qquad (l=1,\ldots,L), \tag{5}$$

gdzie wektory x_l są rozwiązaniami etapu 3°.

Układ (4) jest układem I jednorodnych równań względem x_{lj}. Równania te są na ogół nieliniowe względem x_{lj} bowiem na ogół nieliniowe względem x_{lj} są pochodne $\partial f(a,x_l)/\partial a_i$. Współczynnikami tego układu są reszty e_l.

Procedura druga jest obliczeniowo trudniejsza od procedury pierwszej, gdyż wymaga rozwiązania układu I na ogół nieliniowych równań z $L \cdot J$ niewiadomymi. Procedura pierwsza sprowadza się natomiast do znalezienia rozwiązania układu I równań liniowych z L niewiadomymi. Niekiedy wygodnie jest korzystać jednocześnie z obu procedur np. generalnie stosując procedurę pierwszą możemy dokonywać lokalnych poprawek macierzy X za pomocą procedury drugiej.

3. Przypadek szczególny - model liniowy

Przyjmujemy, że

$$f = \sum_{i=1}^{L} a_i X_i \,. \tag{6}$$

W szczególności, jeśli a_j jest wyrazem wolnym modelu, to $X_j=1$.

Tak więc $f_l = \sum_{i=1}^{L} a_i x_{li}$ oraz

$$\partial_{il} = \frac{\partial f_l}{\partial a_i} = x_{li}. \tag{7}$$

Układ równań (1) bądź (4) przyjmuje zatem postać

$$\sum_{l=1}^{L} x_{li}\, e_l = 0 \qquad (i=1,\ldots,I). \tag{8}$$

Procedura pierwsza sprowadza się do znalezienia wektora reszt e ortogonalnego względem każdej kolumny danej macierzy X.[1] Procedura druga - - do znalezienia macierzy X, której każda kolumna jest ortogonalna względem ustalonego wektora e.

W układzie równań (8) nie występują parametry a_i. Oznacza to, że - na przykład - wektor e wyznaczony przy danej macierzy X jako rozwiązanie układu (8) może być wykorzystywany przy różnych ustalonych wektorach parametrów a.

Do generowania wartości zmiennych wykorzystywanych później w celu uzyskania „prostego" wektora a dogodniejsza - w przypadku modelu liniowego- wydaje się procedura pierwsza. Generowanie wektora y można wówczas zrealizować poprzez <u>próbowanie</u> różnych wektorów reszt przy danym wektorze a i danej macierzy X, tak aby spełniony był układ (8).

<u>Przykład 1</u>

Rozpatrujemy model liniowy $f=a_1X_1 + a_2$. Równania odpowiadające układowi (8) mają postać

$$\sum_{l=1}^{L} x_{l1}\, e_l = 0, \qquad \sum_{l=1}^{L} e_l = 0. \tag{9}$$

---

[1] Przy danej macierzy X układ (8) jest układem I równań o L „niewiadomych" resztach e_l. Macierz X mająca pełny rząd kolumnowy zawiera I wierszy liniowo niezależnych. Nic nie tracąc na ogólności przyjąć można, że są to wiersze o numerach 1,...,I. Ponieważ elementy $x_{li}(l,i=1,\ldots,I)$ tych wierszy tworzą macierz nieosobliwą, z układu równań (8)

$$\sum_{l=1}^{I} x_{li}\, e_l = -\sum_{l=I+1}^{L} x_{li}\, e_l \qquad (i=1,\ldots,I)$$

wynika, że znajdując wektor e tylko L-I jego składowych (np. $e_{I+1},\ldots,e_L$) można przyjąć dowolnie. Pozostałe składowe, w tym przypadku $e_1,\ldots,e_I$ są liniową funkcją składowych $e_{I+1},\ldots,e_L$. Mówi o tym np. H.Theil w[1] na s.215.

Przyjmijmy, że przy macierzy X,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix},$$

chcemy ustalić taki wektor y, ażeby wektorem parametrów modelu wyznaczonym klasyczną mnk był

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Tabela 1

x_{11}	e_1^1	$\sum_1^1$	e_1^2	$\sum_1^2$	e_1^3	$\sum_1^3$	e_1^4	$\sum_1^4$
1	1	1	0	0	1	1	-1	-1
2	1	2	-1	-2	1	2	-1	-2
3	0	0	1	3	-1	-3	3	9
4	-4	-16	-1	-4	-1	-4	2	8
5	1	5	2	10	-1	-5	-2	-10
6	0	0	-1	-6	-1	-6	-1	-6
7	0	0	1	7	1	7	-2	-14
8	1	8	-1	-8	1	8	2	16

W tabeli 1 podano przykłady różnych wektorów o spełniających przy podanej macierzy X postulaty (9). Procedura ustalania tych wektorów polegała na próbowaniu różnych wartości e_1 z jednoczesnym kontrolnym sprawdzaniem na ile spełnione są postulaty (9). Oczywiście każdy wektor będący liniową kombinacją tych wektorów spełnia też postulaty (9). Symbolem $\sum_i$ w Tabeli 1 oznaczono „kontrolne" wartości $x_{1i}\, e_1$ przy próbowanych wartościach e_1.

Przyjmijmy dla dalszych obliczeń pierwszy wektor reszt, tzn. $e = e^1$. Ponieważ wektorem wartości $f_1 = 3\, x_{11} + 2$ jest

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \\ 14 \\ 17 \\ 20 \\ 23 \\ 26 \end{bmatrix}, \text{ więc } y = \underline{f} + e = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \\ 10 \\ 18 \\ 20 \\ 23 \\ 27 \end{bmatrix} \text{ bowiem } e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tekst zadania mógłby być sformułowany następująco:

„do wyników obserwacji

x_{11}	1	2	3	4	5	6	7	8
y_1	6	9	11	10	18	20	23	27

dopasować klasyczną mnk funkcję $f = a_1 X_1 + a_2$".

Można sprawdzić, że model wyznaczony na podstawie podanych wyników obserwacji ma postać $f = 3X_1 + 2$.

Niekiedy na spełniające układ (8) reszty e_1 możemy narzucać pewne dodatkowe postulaty. W dalszym ciągu rozważymy dwa takie postulaty - aby oszacowanie wariancji składników losowych wyrażało się „prostą" liczbą oraz aby oszacowanie współczynnika autokorelacji sąsiednich składników losowych było „proste" liczbowo. Załóżymy, że liczba wyników obserwacji L znacznie przekracza liczbę parametrów I, bowiem dodatkowe postulaty oznaczają wprowadzenie dodatkowych warunków oprócz warunków (8).

„Proste" oszacowanie wariancji składnika losowego

Przyjmijmy założenia klasycznej regresji liniowej. Realizacją nieobciążonego estymatora wariancji składnika losowego (oceną wariancji składnika losowego) jest wówczas

$$(10) \qquad s^2 = \frac{S}{L-I}, \quad \text{gdzie} \quad S = \sum_{l=1}^{L} e_l^2 .$$

Chcemy wygenerować takie wartości zmiennych, aby s^2 wyrażało się „prostą" liczbą. Wartość s^2 (albo s) występuje bowiem we wzorach określających np. szacunkowe błędy średnie, wariancję prognozy. Zagadnienie wyznaczania reszt gwarantujących określoną wartość s^2 sprowadza się w istocie do wyznaczenia reszt e_l charakteryzujących się określoną sumą kwadratów S. Można to uczynić na dwa sposoby: odpowiednio normując wektor reszt spełniający układ równań (8) albo wyznaczając spełniający układ (8) wektor reszt, przy którym S ma określoną wartość.

Normowanie wektora reszt

Niech e oznacza niezerowy wektor reszt spełniający układ (8) przy danych wynikach obserwacji zmiennych objaśniających. Ponieważ wtedy również wektor $e_* = c\,e$ spełnia układ równań (8) dla dowolnej różnej od zera stałej c, zawsze można dobrać tę stałą tak, aby

$$(11) \qquad \sum_{l=1}^{L} e_{*l}^2 = S.$$

Naturalnie

$$(12) \qquad c = \sqrt{\frac{S}{\sum_{l=1}^{L} e_l^2}} .$$

Przykład 2

Na podstawie wektora $e = e^1$ z Przykładu 1 wyznaczyć taki wektor reszt e_*, przy którym $s^2 = 30$.

Ponieważ $L = 8$ oraz $I = 2$ takiej ocenie wariancji składnika losowego towarzyszy suma kwadratów reszt $S = 180$. Suma kwadratów reszt e_1 wynosi 20 (zob. Przykład 1) i dlatego $c = \sqrt{\frac{180}{20}} = 3$. Tak więc wektorem reszt, któremu odpowiada założona wartość s^2 jest

$$e_* = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -12 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{i stąd} \quad y = \underline{f} + e_* = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 11 \\ 2 \\ 20 \\ 20 \\ 23 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

Tekst zadania mógłby brzmieć następująco

„na podstawie wyników obserwacji

x_{11}	1	2	3	4	5	6	7	8
y_1	8	11	11	2	20	20	23	29

klasyczną mnk wyznaczyć parametry modelu $f = a_1 x_1 + a_2$. Oszacować wariancję składnika losowego".

Można się przekonać, że modelem wyznaczonym na podstawie przytoczonych danych jest $f = 3x_1 + 2$, a ocena wariancji składnika losowego ma wartość $s^2 = 30$.

To czy reszty e_{*1} są liczbowo „proste" czy nie, zależy - przy danych resztach e_1 spełniających (8) - od stałej normującej c. Gdyby w przykładzie 2 chodziło o otrzymanie $s^2 = 10$, odpowiedni mnożnik zastosowany do wektora e^1 celem otrzymania wektora e_* byłby równy $c = \sqrt{3}$. Reszty e_{*1} nie byłyby „proste" liczbowo. Dlatego wygodniej jest wyznaczać reszty bezpośrednio z układu (8).

Bezpośrednie wyznaczanie reszt

W tym wypadku można zastosować procedurę pierwszą i przy danym wektorze a oraz danej macierzy X próbować różne wektory reszt e, przy których spełniony jest układ (8), i przy których suma kwadratów reszt jest równa założonej wartości S. W praktyce wygodnie jest znaleźć rozłożenie S na składniki e_1^2, a następnie numerom obserwacji tak przyporządkować (brane z odpowiednimi znakami) pierwiastki tych składników aby spełniony był układ (8). W szczególności, jeśli model zawiera wyraz wolny, rozłożenie S na składniki musi być takie, by możliwe było uzyskanie zerowej sumy reszt.

Przykład 3

Chcemy przy $f = a_1 x_1 + a_2$ i wektorze $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ oraz macierzy X podanej w Przykładzie 1 wygenerować taki wektor y, ażeby $s^2 = 1$, tzn. ażeby $s = 6$.

Rozłożenie S na składniki może być na przykład następujące $\{4,1,1,0,0,0,0,0\}$, $\{1,1,1,1,1,1,0,0\}$. Uwzględniając drugi warunek (9) - postuluje on by suma reszt była zerowa - moglibyśmy przykładowo dla pierwszego rozłożenia S rozważyć układ reszt $\{2,-1,-1,$ pozostałe $0\}$. Przyporządkowując odpowiednie wartości numerom obserwacji w taki sposób, by spełniony był pierwszy warunek (9) mamy na przykład

$$e^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad e^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tym wektorom reszt odpowiadają wektory $y = \underline{f} + e$

$$y^1=\begin{bmatrix}5\\7\\11\\16\\17\\19\\23\\26\end{bmatrix},\quad y^2=\begin{bmatrix}5\\8\\11\\13\\17\\22\\23\\25\end{bmatrix},\quad y^3=\begin{bmatrix}5\\7\\11\\14\\19\\20\\23\\25\end{bmatrix},\quad \text{gdyż } \underline{f}=\begin{bmatrix}5\\8\\11\\14\\17\\20\\23\\26\end{bmatrix}.$$

Przyjmijmy pierwszy wektor y. Zadanie mogłoby mieć następujące brzmienie

„Na podstawie wyników obserwacji

Y	5	7	11	16	17	19	23	26
X_1	1	2	3	4	5	6	7	8

wyznaczyć klasyczną mnk parametry modelu $f = a_1 X_1 + a_2$ i oszacować odchylenie standardowe składnika losowego".
Można się przekonać, że $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $s = 1$.

<u>„Proste" oszacowanie współczynnika autokorelacji składników losowych.</u>

Przyjmijmy, że składniki losowe generowane są przez proces autoregresyjny rzędu pierwszego

$$E_l = \varrho E_{l-1} + U_l \qquad (l = \ldots,-1,0,1,\ldots) \tag{13}$$

gdzie $|\varrho|<1$; natomiast U_l jest składnikiem losowym spełniającym założenia klasycznej regresji liniowej.
Oszacowaniem współczynnika ϱ jest

$$r = \frac{\sum_{l=2}^{L} e_l\, e_{l-1}}{\sqrt{\sum_{l=2}^{L} e_l^2 \quad \sum_{l=2}^{L} e_{l-1}^2}} \tag{14}$$

gdzie e_l $(l=1,\ldots,L)$ są resztami modelu wyznaczonego klasyczną mnk. Chcemy tak wygenerować wartości zmiennych ażeby r wyrażało się „prostą" liczbą. Przykładowo jeśli bowiem r jest istotnie różne od zera, to parametry modelu należałoby wyznaczyć uogólnioną mnk, w której macierz uogólnionych wag jest funkcją r, bądź też klasyczną mnk na podstawie danych przekształconych $x^*_{li} = x_{li} - r\, x_{l-1,i}$ $y^*_l = y_l - r\, y_{l-1}$.

Z uwagi na to, że r jest dość skomplikowaną funkcją reszt z klasycznej mnk w obecnym zagadnieniu dogodniejsza wydaje się procedura druga (generowanie macierzy X przy danym wektorze parametrów a i danym wektorze reszt e). Procedura może polegać na następującym:
1° Ustalamy „prosty" liczbowo wektor a.
2° Ustalamy taki wektor reszt e, że na podstawie wzoru (14) otrzymamy złożoną wartość r.

3^o Przy danym wektorze e generujemy macierz X spełniającą postulaty (8).

4^o Obliczamy wartości $y_l = \sum_{i=1}^{I} a_i x_{li}$, gdzie x_{li} są rozwiązaniami etapu 3^o ($l=1,\ldots,L$; $i=1,\ldots,I$).

W szczególności, jeśli zakłada się, że model zawiera wyraz wolny, to wektor e należy tak ustalić, ażeby suma reszt była zerowa. W etapie 3^o generowalibyśmy wówczas wartości autentycznych zmiennych objaśniających (nie będących zmienną sztuczną przyjmującą wartość 1).

W praktyce ustalając wektor e wygodnie jest przyjąć, że kwadraty reszty pierwszej i ostatniej są równe. Wówczas mianownikiem wzoru określającego r jest $\sum_{l=2}^{L} e_l^2 = \sum_{l=2}^{L} e_{l-1}^2$.

Przykład 4

Chcemy aby wektorem parametrów modelu $f = a_1 X_1 + a_2$ wyznaczonego klasyczną mnk był $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, a współczynnik r był równy 0,5.

Przyjmijmy, że $\sum_{l=2}^{L} e_l^2 , \sum_{l=2}^{L} e_{l-1}^2 = 8$. Przy założonej wartości r=0,5 wektor reszt musi więc być taki, iż $\sum_{l=2}^{L} e_l e_{l-1} = 4$. Ponadto wobec występowania wyrazu wolnego, suma reszt musi być zerowa. Wektorami reszt spełniającymi te postulaty są na przykład

$$e^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5 \\ -1 \\ -1,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 1 \\ 1 \\ 1,5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,6 \\ 1 \\ 0,6 \\ 1,2 \\ -0,4 \\ -2 \\ -0,8 \\ -0,2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Drugą kolumną macierzy X jest kolumna jedynek bowiem a_2 jest wyrazem wolnym. Ustalając wektory e zachowaliśmy warunek $\sum_{l=1}^{L} x_{12} e_l = \sum_{l=1}^{L} e_l = 0$.

Pozostaje wygenerować pierwszą kolumnę macierzy X, tzn. wygenerować wartości x_{l1} ($l=1,\ldots,L$) tak, aby spełniony był warunek $\sum_{l=1}^{L} x_{l1} e_l = 0$.

Weźmy wektor $e = e^1$. Wektorem $x_1 = (x_{l1})$ spełniającym ten postulat jest na przykład

$$x_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{ bowiem } e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ założyliśmy, że $f = 2X_1 + 1$ więc przy tym wektorze x_1

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} 15 \\ 17 \\ 11 \\ 13 \\ 9 \\ 13 \\ 17 \\ 17 \\ 15 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \text{i w rezultacie} \quad y = \underline{f} + e = \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \\ 13 \\ 13 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \\ 17 \\ 15 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Tekst zadania mógłby mieć formę następującą:

„na podstawie wyników obserwacji

Y	15	18	13	13	8	12	16	17	15	13
X_1	7	8	5	6	4	6	8	8	7	6

wyznaczyc klasyczną mnk parametry modelu $f = a_1X_1 + a_2$ oraz oszacować współczynnik autokorelacji składników losowych". Można się przekonać, że dla tych danych $a_1=2$, $a_2=1$ oraz $r=0,5$. Ponadto $s^2=1$ (to ostatnie zapewniliśmy sobie poprzez ustalenie $L=10$ i ustalenie takich reszt, że $\sum_{l=1}^{L} e_l^2 = 8$).

4. Przypadek szczególny - modele nieliniowe

Korzystając z przedstawionych procedur można generować wartości zmiennych modelu nieliniowego gwarantujących „proste" liczbowo wartości parametrów tego modelu.

Generowanie jest szczególnie proste w przypadku modeli liniowych względem parametrów. Wielkości ∂_{il} są wtedy funkcjami (nie koniecznie liniowymi) wartości zmiennych objaśniających, co sprawia, że zastosowanie procedury pierwszej (generowanie reszt przy danych wartościach zmiennych objaśniających) jest numerycznie prostsze niż zastosowanie procę-

dury drugiej (generowanie wartości zmiennych objaśniających przy danych resztach modelu). Generowanie reszt dla modelu liniowego względem parametrów nie różni się istotnie od generowania reszt dla modelu liniowego. Trzeba tylko zamiast oryginalnych zmiennych objaśniających brać „pomocnicze" zmienne objaśniające, będące określonymi funkcjami oryginalnych zmiennych objaśniających. Np. w przypadku paraboli trzeba brać zmienne $Z_1=1$, $Z_2=X$, $Z_3=X^2$.

Generowanie wartości zmiennych dla modelu nieliniowego względem parametrów może być rozumiane dwojako: (a) jako wygenerowanie wartości oryginalnych zmiennych, przy których stosując bezpośrednio klasyczną mnk do modelu nieliniowego otrzymuje się założone wartości parametrów tego modelu, (b) jako wygenerowanie wartości zmiennych formy zlinearyzowanej (jeśli ona istnieje) w taki sposób, że parametry bądź inne charakterystyki związane z formą zlinearyzowaną są „proste" liczbowo. To ostatnie możemy zrealizować według procedur podanych dla przypadku modelu liniowego biorąc jednak pod uwagę zmienne formy zlinearyzowanej.

Generowanie wartości zmiennej objaśnianej modelu nieliniowego, który zamierza się wyznaczyć bezpośrednio klasyczną mnk ilustruje

Przykład 5

Chcemy wygenerować takie wartości y_1 zmiennej Y modelu potęgowego $f = a_1 x_1^{a_2}$, aby przy wektorze wartości zmiennej objaśnianej

$x_1' = [1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8]$

wektor parametrów modelu wyznaczony klasyczną mnk był równy $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Dla modelu potęgowego $f = a_1 x_1^{a_2}$, przy podanych wartościach parametrów, układ równań (1) przyjmie następującą postać

$$\sum_{i=1}^{L} e_1 x_{11}^2 = 0, \qquad \sum_{i=1}^{L} x_{11} e_1 = 0.$$

Przykładowe wektory reszt spełniające podany układ równań przedstawiono w Tabeli 2. W ostatniej kolumnie tabeli podano wektor reszt e^4 będący liniową kombinacją trzech pierwszych wektorów reszt

$$e^4 = 0{,}6\, e^1 + 0{,}4\, e^2 + 0{,}2\, e^3 .$$

Do dalszych obliczeń przyjmiemy wektor $e^1 = e$. Wektorem wartości $f_1 = 3 x_{11}^2$ jest

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 27 \\ 48 \\ 75 \\ 108 \\ 147 \\ 192 \end{bmatrix}, \quad \text{a ponieważ} \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dlatego} \quad y = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 28 \\ 48 \\ 74 \\ 108 \\ 146 \\ 193 \end{bmatrix}.$$

Tabela 2

x_{11}	e_1^1	e_1^2	e_1^3	e_1^4
1	1	0	2	1,0
2	0	2	-6	-0,4
3	1	0	1	0,8
4	0	0	1	0,2
5	-1	0	1	-0,4
6	0	-2	1	-0,6
7	-1	0	0	-0,6
8	1	1	-1	0,8

Tekst zadania mógłby brzmieć następująco:
„do wyników obserwacji

X_1	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	4	12	28	48	74	108	146	193

dopasować klasyczną mnk funkcję $f = a_1 x_1^{a_2}$."

Wyznaczony na podstawie przedstawionych danych model będzie miał postać $f = 3 x_1^2$.

Generowanie wartości zmiennych modeli nieliniowych przy ustalonych wartościach parametrów tych modeli może być zastosowane dla oceny jakości różnych sposobów wyznaczania parametrów modeli nieliniowych. Jeśli bowiem znany jest „punkt docelowy", którym jest ustalony wektor parametrów modelu i materiał liczbowy, przy którym po zastosowaniu klasycznej mnk otrzymuję się ten założony wektor parametrów, to bardzo łatwo można ocenić szybkość z jaką algorytmy iteracyjne zbliżają się do tego punktu, bądź odległość parametrów uzyskanych tymi algorytmami od „punktu docelowego".

5. Ustalenie współczynnika zbieżności

Model wyznaczony na podstawie wygenerowanych wartości zmiennych może źle pasować do wartości zmiennej objaśnianej. Ograniczmy się do przypadku <u>modelu liniowego z wyrazem wolnym</u>. Dopasowanie takiego modelu do wartości zmiennej objaśnianej można ocenić za pomocą współczynnika zbieżności wz, który - po prostych przekształceniach - można wyrazić wzorem

$$(15) \qquad wz = \frac{S}{\sum_{l=1}^{L}(y_l-\bar{y})^2} = \frac{S}{\sum_{l=1}^{L}(f_l-\bar{f})^2+S} = \frac{S}{S+F},$$

gdzie $F = \sum_{l=1}^{L} (f_l - \bar{f})^2$, $S = \sum_{l=1}^{L} (y_l - f_l)^2$.

Przy generowaniu wartości zmiennych modelu liniowego pożądaną wartość współczynnika zbieżności można zagwarantować sobie na dwa sposoby

- wymuszając niską wartość S,
- wymuszając wysoką wartość F.

Pierwszy sposób sprowadza się do ustalenia spełniającego układ (8) wektora reszt charakteryzującego się niską sumą kwadratów. Szerzej na temat generowania reszt pisaliśmy w paragrafie 3 przy okazji omawiania procedur generowania reszt, przy których ocena wariancji składnika losowego ma określoną wartość. Ten sposób może jednak okazać się zawodny w sytuacji gdy także F jest małą liczbą.

Bardziej niezawodnym i prostszym sposobem jest wymuszenie - przy danym wektorze reszt e - wysokiej wartości F poprzez zmianę skali wartości z modelu (i w konsekwencji poprzez zmianę poziomu wartości zmiennej objaśnianej, gdyż są one sumą wartości z modelu i reszty). Rozpatrzmy dwa wyrażenia

(16) $F = \sum_{l=1}^{L} (f_l - \bar{f})^2$ oraz $F_* = \sum_{l=1}^{L} (cf_l - \bar{cf})^2 = c^2 \sum_{l=1}^{L} (f_l - \bar{f})^2$.

Wartości z modelu odpowiadające wyrażeniu F_* mierzone są w jednostkach c-krotnie mniejszych niż wartości z modelu odpowiadające wyrażeniu F. Zadamy sobie pytanie czy można dobrać takie jednostki miary wartości z modelu (a więc czy można dobrać taką wartość stałej c^2), aby współczynnik zbieżności był równy ustalonej liczbie wz^o?. Z równania (15) wynika, że wartość owej stałej jest równa

(17) $$c^2 = \frac{1 - wz^o}{wz^o} \cdot \frac{S}{F}$$

Ponieważ c^2 (a tym bardziej c) wyznaczona według (17) nie musi wyrażać się „prostą" liczbą, wygodniej zamiast postulatu $wz=wz^o$ postawić postulat, aby współczynnik zbieżności był co najwyżej równy stałej wz^o. Wartość c^2 rozwiązująca ten problem spełnia nierówność

(18) $$c^2 \geqslant \frac{1 - wz^o}{wz^o} \cdot \frac{S}{F} .$$

Spośród wartości c^2 spełniających postulat (18) można zawsze wybrać wartość będącą „prostą" liczbą.

Zauważmy na zakończenie, że zmiana jednostek miary wartości z modelu oznacza zmianę wartości parametrów przy danych wartościach zmiennych objaśniających i danych resztach. Jest bowiem

$$cf_l = \sum_{i=1}^{L} (ca_i)\, x_{li} .$$

Tak więc jeśli model o parametrach a_i wyznaczamy na podstawie wygenerowanych danych liczbowych $\{\underline{f} + e \mid X\}$ nie jest dobrze dopasowany do tych danych, to dobrze dopasowany jest model o parametrach $a_{*i} = ca_i$, wyznaczony na podstawie danych $\{c\underline{f} + e \mid X\}$. Współczynnik zbieżności dla tego modelu nie przekracza wz^o, jeśli c spełnia nierówność (18).

Przykład 6

Współczynnik zbieżności dla modelu $f = 2X_1 + 1$ wyznaczonego klasyczną mnk na podstawie danych liczbowych wygenerowanych w Przykładzie 4, wynosi wz=0,108, co jest wartością niezbyt małą. Jakie „proste" parametry modelu o tej samej postaci i jakie wartości zmiennej objaśnianej gwarantują - przy tych samych wartościach zmiennej objaśnianej i przy tym samym wektorze reszt co w Przykładzie 4 - współczynnik zbieżności równy co najwyżej 0,05?

Ponieważ S=8, a F=66 dlatego

$$c^2 \geqslant \frac{0,95}{0,05} \cdot \frac{8}{66} = 2\frac{10}{33}.$$

Do dalszych obliczeń przyjmiemy, że $c^2 = 4$, a stąd

$$\underline{f}_* = 2\underline{f} = \begin{bmatrix} 30 \\ 34 \\ 22 \\ 26 \\ 18 \\ 26 \\ 34 \\ 34 \\ 30 \\ 26 \end{bmatrix}, \text{ a ponieważ } e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ stąd } y = \underline{f}_* + e = \begin{bmatrix} 30 \\ 35 \\ 24 \\ 26 \\ 17 \\ 25 \\ 33 \\ 34 \\ 30 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Model wyznaczony klasyczną mnk na podstawie wartości zmiennych objaśniających podanych w Przykładzie 4 i wygenerowanych tu wartości zmiennej objaśnianej ma postać $f_* = 4X_1 + 2$ i charakteryzuje się współczynnikiem zbieżności $wz_* = 0,029$.

Dodajmy, że ocena wariancji składników losowych oraz ocena współczynnika autokorelacji składników losowych pozostaje - w porównaniu z wynikami uzyskanymi w Przykładzie 4 - nie zmieniona, ponieważ nie zmieniliśmy reszt.

Literatura

[1] H.Theil, Zasady ekonometrii, PWN, Warszawa 1979.

Construction of „Easy" Econometric Problems

Summary

In the paper there is presented the problem of generating such a statistical material that the least squares method gives estimates in the form of „simple numbers", and the models themselves have some additional properties. The following conditions are given:

- for the vector of numbers to be a vector of residuals of an econometric model of given „simple" estimates obtainable by standard least square method on the basis of statistical material $\{y|X\}$, where x stands for a given matrix of observations on exogeneous variables, and y stands for a vector of observation on endogeneous variable dependent on the residuals vector
- for the vectors of numbers to be columns of a matrix X, which is the basis for standard least squares method to produce „simple" estimates of parameters and the given residuals vector.

Certain suggestions concerning the generation of statistical material providing „simple" least square estimates of parameters of linear econometric models, a given variance of disturbance terms, a given estimate of coefficient of autocorrelation of disturbance terms and a given coefficient of determination are also given in the paper.