Zbigniew ŚWITALSKI
Katedra Badań Operacyjnych
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

PARETO-OPTYMALNE MECHANIZMY ROZDZIAŁU DÓBR NIEPODZIELNYCH

Wstęp

Problem rozdziału (podziału, przydziału, alokacji) pewnego zestawu niepodzielnych dóbr pomiędzy n osób może być zdefiniowany następująco (zob. [1], [3], [4])[1]. Dany jest skończony, m-elementowy zbiór $X=\{A, B, C, ...\}$ złożony z niepodzielnych, niejednorodnych dóbr (mogą to być przedmioty materialne na przykład domy, meble, maszyny lub niematerialne – stanowiska w pewnej instytucji, miejsca na uczelni, wyjazdy na staże zagraniczne itp.). Przedmiotami ze zbioru X zainteresowanych jest n osób ze zbioru $N=\{1, 2, ..., n\}$ $(n \leqslant m)$, przy czym zakładamy, że osoba i posiada preferencje w zbiorze X, przedstawione za pomocą ostrego liniowego porządku P_i (tzn. niemożliwe są równoważności między przedmiotami ze zbioru X). Chcemy każdej osobie przyporządkować dokładnie jedno dobro tak, żeby w jak największym stopniu uwzględnić preferencje wszystkich osób.

Formalizacja podanego zagadnienia wymaga precyzyjnego sformułowania warunków, które powinna spełniać odpowiednia „reguła przydziału". Przez regułę przydziału (którą dalej będziemy nazywali również „mechanizmem rozdziału") rozumiemy funkcję, która każdemu ciągowi preferencji $(P_1, P_2, ..., P_n)$ przyporządkowuje iniektywne (tzn. różnowartościowe) odwzorowanie zbioru N w zbiór X (odwzorowanie to wyznacza przydział każdej osobie dokładnie jednego dobra ze zbioru X). W literaturze sformułowano wiele warunków, które powinna spełniać „dobra" reguła przydziału. Bada się związki między tymi warunkami oraz charakteryzuje się różne reguły przydziału za pomocą różnych układów tych warunków. Na przykład w pracy [4] Svensson

[1] Problem, który rozważamy, jest szczególnym przypadkiem ogólnego problemu sprawiedliwego podziału, którym zajmował się m.in. H. Steinhaus (zob. [2, [5]).

udowodnił, że pewne warunki nazywane w literaturze warunkami neutralności, niemanipulowalności (*strategy-proofness*) i „niewładczości" (*nonbossiness*) jednoznacznie charakteryzują tzw. regułę kolejkową, tzn. regułę, według której najpierw ustawiamy osoby w pewnej kolejności (tworzymy „kolejkę"), a następnie przydzielamy dobra zgodnie z tą kolejnością (pierwsza osoba w „kolejce" otrzymuje najlepsze dla siebie dobro, a każda następna – najlepsze spośród tych, które nie zostały wcześniej przydzielone).

W pracy definiujemy tzw. uogólnioną regułę kolejkową i dowodzimy, że jest to jedyna reguła, spełniająca warunek Pareto-optymalności. Charakteryzujemy też reguły Pareto-optymalne i neutralne oraz formułujemy (dla reguł Pareto-optymalnych) warunek wystarczający niemanipulowalności. Przedstawione wyniki są częściową odpowiedzią na problem postawiony przez Svenssona [4], dotyczący pełnej charakteryzacji reguł Pareto-optymalnych, neutralnych i niemanipulowalnych.

1. Mechanizmy rozdziału dóbr

Załóżmy, że ustalone są zbiory X i N. *Ostrym liniowym porządkiem* w zbiorze X nazywamy relację w zbiorze X, która jest przechodnia, asymetryczna i zupełna. Ostry liniowy porządek ustawia elementy zbioru X w jednoznacznie określonej kolejności, a więc wyznacza pewną permutację zbioru X. Jeśli na przykład $X=\{A, B, C\}$, to zapis $P: BCA$ oznacza, że liniowy porządek P ustawia element B na pierwszym miejscu, C – na drugim, a A – na trzecim. Dla elementów $x, y \in X$ będziemy też używali zapisu $x>y$ zamiast xPy (oznaczającego, że x jest lepszy od y w sensie relacji P). Zbiór wszystkich ostrych liniowych porządków w zbiorze X będziemy oznaczali przez $L(X)$, a n-krotny iloczyn kartezjański zbioru $L(X)$ przez siebie – przez $[L(X)]^n$.

Rozdziałem dóbr ze zbioru X pomiędzy osoby ze zbioru N nazywamy iniekcję (funkcję różnowartościową) ze zbioru N do zbioru X. Rozdział dóbr polega więc na przyporządkowaniu (przydzieleniu) każdej osobie dokładnie jednego dobra ze zbioru X, przy czym żadnego dobra nie można przydzielić dwóm różnym osobom (jeśli $m>n$, to oczywiście pozostaną dobra nieprzydzielone żadnej osobie). Zbiór wszystkich iniekcji ze zbioru N do zbioru X będziemy oznaczali symbolem $I(N, X)$.

Mechanizmem rozdziału dóbr nazywamy funkcję ze zbioru $[L(X)^n]$ do zbioru $I(N, X)$. Mechanizm rozdziału przyporządkowuje więc każdemu układowi preferencji indywidualnych $(P_1, P_2, ..., P_n)$ pewien rozdział dóbr, innymi słowy pokazuje, jak należy rozdzielić dobra pomiędzy osoby przy danych

preferencjach tych osób. Przykładowo, zapis $M(P_1, P_2, P_3)=BAC$ oznacza, że przy zastosowaniu mechanizmu M (i przy preferencjach P_1, P_2, P_3), pierwszej osobie zostało przydzielone dobro B, drugiej – A, trzeciej – C, tzn. $M(P_1, P_2, P_3)(1)=B$, $M(P_1, P_2, P_3)(2)=A$, $M(P_1, P_2, P_3)(3)=C$.

Najprostsze mechanizmy rozdziału są to mechanizmy „kolejkowe". Załóżmy, że dane są preferencje $(P_1, P_2, ..., P_n)$ oraz pewna permutacja zbioru N, oznaczona przez δ. Permutacja δ wyznacza pewną kolejność osób („kolejkę"), a mianowicie $\delta(1), \delta(2), ..., \delta(n)$. *Rozdziałem zgodnym z kolejnością* δ nazywamy rozdział polegający na tym, że osobie $\delta(1)$ przydzielamy dobro znajdujące się na pierwszym miejscu jej listy preferencji (oznaczmy je przez d_1), osobie $\delta(2)$ – dobro znajdujące się na pierwszym miejscu listy preferencji tej osoby, ale po odrzuceniu dobra d_1 (dobro przydzielone osobie $\delta(2)$ oznaczamy przez d_2) itd. Inaczej mówiąc, osobie $\delta(k)$ przydzielamy najlepsze dla niej dobro w zbiorze $X\setminus\{d_1, d_2, ..., d_{k-1}\}$. *Mechanizm kolejkowy zgodny z kolejnością* δ jest to mechanizm, który każdemu ciągowi $(P_1, P_2, ..., P_n)$ przyporządkowuje rozdział zgodny z kolejnością (rozdział ten będziemy oznaczali symbolem $\delta(P_1, P_2, ..., P_n)$).

Przykład 1. Załóżmy, że $N=\{1, 2, 3\}$ oraz $X=\{A, B, C\}$, $P_1: BAC$, $P_2: CAB$, $P_3: BCA$. Kolejka $\delta=312$ (tzn. w pierwszej kolejności dokonujemy przydziału trzeciej osobie, potem pierwszej, a na końcu drugiej, czyli $\delta(1)=3$, $\delta(2)=1$, $\delta(3)=2$), wyznacza rozdział $\delta(P_1, P_2, P_3)=ACB$ (tzn. pierwsza osoba otrzymuje dobro A, druga – C, trzecia – B).

Przykład 2. Podajemy przykład mechanizmu, który nie jest mechanizmem kolejkowym dla żadnej kolejki δ (zbiory X i N są takie same jak w poprzednim przykładzie). Jeśli osoby 1 i 2 mają różne preferencje, to dokonujemy przydziału zgodnie z kolejnością 312, a jeśli osoby 1 i 2 mają jednakowe preferencje, to przydział jest zgodny z kolejnością 1 2 3. Wówczas na przykład dla preferencji $P_1: BAC$, $P_2: BAC$, $P_3: BCA$ otrzymujemy rozdział $\delta(P_1, P_2, P_3)=BAC$.

Zdefiniujemy teraz różne własności mechanizmów rozdziału. Są to własności, które powinny mieć „dobre" mechanizmy rozdziału dóbr.

Mówimy, że rozdział $f: N \to X$ jest *Pareto-optymalny*, jeśli nie istnieje rozdział $g: N \to X$ taki, że $g(i) P_i f(i)$ lub $g(i)=f(i)$ dla każdego i oraz $g(i) P_i f(i)$ dla przynajmniej jednego i. Inaczej mówiąc, rozdział jest Pareto-optymalny, jeśli nie można polepszyć sytuacji żadnej osoby, nie pogarszając przy tym sytuacji innej osoby. Mechanizm rozdziału M będziemy nazywali *Pareto-optymalnym*, jeśli $M(P_1, P_2, ..., P_n)$ jest rozdziałem Pareto-optymalnym dla każdego ciągu preferencji $(P_1, P_2, ..., P_n)$.

Drugą ważną własnością mechanizmów rozdziału jest tzw. neutralność. Mechanizm M jest neutralny, jeśli wyznaczony przez ten mechanizm rozdział $M(P_1, P_2, ..., P_n)$ zależy tylko od „struktury" preferencji $P_1, P_2, ..., P_n$, a nie zależy od tego, jakie konkretne przedmioty są ustawione na listach preferencji $P_1, P_2, ..., P_n$. Formalnie własność taką można zdefiniować następująco. Dla danej relacji $P_i \in L(X)$ oraz danej permutacji $\mu : X \to X$ definiujemy relację P_i^μ za pomocą zależności:

$$xP_i^\mu y \Leftrightarrow \mu(x) P_i \mu(y) \qquad (x, y \in X).$$

Dla danej funkcji $f : N \to A$ definiujemy funkcję $f^\mu : N \to A$ za pomocą wzoru:

$$f^\mu(i) = \mu^{-1} f(i) \qquad (i \in N).$$

Jeśli M jest mechanizmem rozdziału, to definiujemy mechanizm M^μ następująco:

$$M^\mu(P_1, P_2, ..., P_n) = [M(P_1, P_2, ..., P_n)]^\mu.$$

Mechanizm M będziemy nazywali *neutralnym*, jeśli dla dowolnych preferencji $P_1, P_2, ..., P_n$ i dowolnej permutacji $\mu : X \to X$ spełniony jest warunek:

$$M(P_1^\mu, P_2^\mu, ..., P_n^\mu) = M^\mu(P_1, P_2, ..., P_n).$$

Przykład 3. Załóżmy, że $P_1 : BAC$, $P_2 : CAB$, $P_3 : BCA$. Określamy permutację $\mu : X \to X$ następująco: $\mu(A) = B$, $\mu(B) = C$, $\mu(C) = A$. Wówczas $P_1^\mu : ACB$, $P_2^\mu : BCA$, $P_3^\mu : ABC$. Załóżmy, że $M(P_1, P_2, P_3) = BCA$. Wówczas $M^\mu(P_1, P_2, P_3) = \mu^{-1}(BCA) = ABC$. A więc jeśli mechanizm M jest neutralny, to musimy mieć $M(P_1^\mu, P_2^\mu, P_3^\mu) = ABC$.

Zdefiniujemy teraz mechanizmy niemanipulowalne. Są to mechanizmy, które nie pozwalają żadnej osobie, poprzez podanie nieprawdziwych preferencji, na polepszenie swojej sytuacji (tzn. otrzymanie dobra lepszego od dobra, które ta osoba otrzymałaby, gdyby podała prawdziwe preferencje). Zdefiniujemy najpierw, dla danej relacji $P_i \in L(X)$, relację słabej preferencji Q_i za pomocą wzoru:

$$xQ_i y \Leftrightarrow xP_i y \vee x = y.$$

Mechanizm M nazywa się *mechanizmem niemanipulowalnym*, jeśli dla dowolnej osoby $i \in N$ oraz dla dowolnych preferencji $P_1, P_2, ..., P_i, ..., P_n$ oraz P_i' spełniony jest warunek:

$$M(P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_n)(i)\ Q_i\ M(P_1, \ldots, P_i', \ldots, P_n)(i),$$

tzn. jeśli przy dowolnych preferencjach $P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_n$ dobro przydzielone osobie i jest dla tej osoby co najmniej tak samo cenne jak dobro przydzielone tej osobie w sytuacji, gdy osoba ta deklaruje inne preferencje P_i', a pozostałe osoby pozostają przy „starych" preferencjach $P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_n$.

Interesująca jest interpretacja niemanipulowalności na gruncie teorii gier. Jeśli dla danego mechanizmu M określimy grę $G(M)$, której uczestnikami są osoby ze zbioru N, ich decyzjami – preferencje ze zbioru $L(X)$, a wypłatami – dobra przydzielone poszczególnym osobom, to mechanizm M jest niemanipulowalny, jeśli w grze $G(M)$ wszystkie możliwe układy decyzji $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ są równowagami Nasha[2].

2. Uogólnione mechanizmy kolejkowe

Mechanizmy kolejkowe zdefiniowane w poprzednim punkcie wymagały jednoznacznego określenia kolejności osób, które wybierają dobra zgodnie z tą wcześniej ustaloną kolejnością. Kolejność ta nie zależy więc od preferencji deklarowanych przez wybierające osoby. Mechanizm taki można uogólnić, zakładając, że kolejność wyboru może zależeć od struktury preferencji poszczególnych osób. Możemy na przykład przyjąć, że kolejność wybierania jest inna przy jednakowych preferencjach, a inna przy zróżnicowanych preferencjach (zob. przykład 2). Mechanizmy tego rodzaju nazwiemy *uogólnionymi mechanizmami kolejkowymi*. Aby je formalnie zdefiniować, wprowadzamy następujące oznaczenia. Zbiór wszystkich permutacji zbioru N oznaczymy symbolem $P(N)$. Jeśli $\delta \in P(N)$ oraz $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ jest pewnym ciągiem preferencji, to $\delta(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ oznacza rozdział dóbr zgodny z kolejnością δ. Niech F będzie funkcją ze zbioru $[L(X)]^n$ do zbioru $P(N)$.

Definicja. *Uogólnionym mechanizmem kolejkowym* wyznaczonym przez funkcję $F: [L(X)]^n \to P(N)$ nazywamy mechanizm M_F zdefiniowany za pomocą wzoru:

$$M_F(P_1, P_2, \ldots, P_n) = [F(P_1, P_2, \ldots, P_n)](P_1, P_2, \ldots, P_n).$$

Uogólniony mechanizm kolejkowy działa więc w sposób następujący. Dla dowolnego ciągu preferencji $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ tworzymy kolejkę

[2] Na taką interpretację niemanipulowalności zwrócił mi uwagę prof. Antoni Smoluk.

$F(P_1, P_2, ..., P_n)$, a następnie dokonujemy przydziału zgodnego z tą kolejką (przydział ten oznaczony jest symbolem $[F(P_1, P_2, ..., P_n)](P_1, P_2, ..., P_n)$. Oczywiście jeśli funkcja F jest stała, tzn. jeśli dla dowolnych $P_1, P_2, ..., P_n$ i dla pewnej ustalonej permutacji δ, $F(P_1, P_2, ..., P_n) = \delta$, to uogólniony mechanizm kolejkowy jest mechanizmem kolejkowym zgodnym z δ opisanym w poprzednim punkcie.

Okazuje się, że uogólnione mechanizmy kolejkowe są jedynymi mechanizmami Pareto-optymalnymi. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Mechanizm* $M: [L(X)]^n \to I(N, X)$ *jest mechanizmem Pareto-optymalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest uogólnionym mechanizmem kolejkowym.*

Dowód. Łatwo sprawdzić, ze rozdział zgodny z kolejnością δ jest Pareto-optymalny. Jeśli bowiem osoba $\delta(k)$ otrzymuje przy tym rozdziale dobro d_k, to polepszenie sytuacji tej osoby może się odbyć tylko przez pogorszenie sytuacji którejś z osób $\delta(1), \delta(2), ..., \delta(k-1)$ (gdyż dobra lepsze od dobra d_k dla osoby $\delta(k)$ zostały wybrane wcześniej przez osoby $\delta(1), \delta(2), ..., \delta(k-1)$. Wynika stąd, ze każdy mechanizm kolejkowy, a także każdy uogólniony mechanizm kolejkowy jest Pareto-optymalny. Załóżmy teraz, że pewien mechanizm M jest Pareto-optymalny. Aby udowodnić, że jest to uogólniony mechanizm kolejkowy, wystarczy udowodnić, że dla każdego ciągu $(P_1, P_2, ..., P_n)$ istnieje kolejka δ taka, że rozdział $M(P_1, P_2, ..., P_n)$ pokrywa się z rozdziałem $\delta(P_1, P_2, ..., P_n)$. Udowodnimy najpierw pomocniczy lemat.

Lemat. Jeśli rozdział M jest Pareto-optymalny, to istnieje osoba, która przy tym rozdziale otrzymuje najlepsze dla siebie dobro.

Dowód. Dla $n = 1$ lemat jest oczywisty. Przyjmijmy więc, że $n \geqslant 2$. Załóżmy nie wprost, że przy rozdziale M każda osoba otrzymuje dobro, które znajduje się na drugim lub na dalszych miejscach jej listy preferencji. Niech osoba i otrzymuje przy rozdziale dobro d_i. Znajdziemy ciąg osób $\varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(k)$ oraz ciąg dóbr $c_{\varphi(1)}, c_{\varphi(2)}, ..., c_{\varphi(k)}$ o następujących własnościach:

(W1) $c_{\varphi(t)} > d_{\varphi(t)}$ dla osoby $\varphi(t)$ $(t = 1, 2, ..., k)$,

(W2) dobra $c_{\varphi(1)}, c_{\varphi(2)}, ..., c_{\varphi(k)}$ są różne między sobą i różne od wszystkich dóbr d_i dla $i \neq \varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(k)$.

Znalezienie ciągu dóbr o powyższych własnościach oznacza, że rozdział M można „polepszyć", przydzielając każdej osobie $\varphi(t)$ $(t = 1, 2, ..., k)$ dobro $c_{\varphi(t)}$ zamiast dobra $d_{\varphi(t)}$ (a wszystkim pozostałym osobom te same dobra co poprzednio). Będzie stąd wynikało, że rozdział M nie jest Pareto-optymalny.

Ciąg $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(k)$ konstruujemy rekurencyjnie w następujący sposób:

Krok 1. Wybieramy dowolnie osobę $\varphi(1)$ i znajdujemy dobro $c_{\varphi(1)}$ lepsze od $d_{\varphi(1)}$ dla tej osoby (takie dobro istnieje na mocy założenia).

Krok 2. Załóżmy, że znaleźliśmy już dobra $c_{\varphi(1)}, c_{\varphi(2)}, \ldots, c_{\varphi(r)}$ takie, że spełniony jest warunek (W1) dla $t=1, 2, \ldots, r$. Rozpatrujemy trzy przypadki:

Przypadek 2.1. Dobro $c_{\varphi(r)}$ jest różne od wszystkich dóbr d_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Wówczas przyjmujemy $k=r$, tzn. ciągiem $c_{\varphi(1)}, \ldots, c_{\varphi(k)}$ jest ciąg $c_{\varphi(1)}, \ldots, c_{\varphi(r)}$.

Przypadek 2.2. Dobro $c_{\varphi(r)}$ jest jednym z dóbr $d_{\varphi(1)}, \ldots, d_{\varphi(r-1)}$. Załóżmy na przykład, że $d_{\varphi(l)}=c_{\varphi(r)}$ $(1 \leqslant l<r)$. Wówczas jako ciąg $c_{\varphi(1)}, \ldots, c_{\varphi(k)}$ przyjmujemy ciąg $c_{\varphi(l)}, c_{\varphi(l+1)} \ldots, c_{\varphi(r)}$.

Przypadek 2.3. Dobro $c_{\varphi(r)}$ jest jednym z dóbr d_i dla $i \neq \varphi(1), \ldots, \varphi(r-1)$. Przyjmujemy wówczas $\varphi(r+1)=i$, a więc $d_{\varphi(r+1)}=c_{\varphi(r)}$. Znajdujemy dobro $c_{\varphi(r+1)}$ takie, że $c_{\varphi(r+1)} > d_{\varphi(r+1)}$ dla osoby $\varphi(r+1)$ i przechodzimy do kroku 2 (podstawiając $r:=r+1$).

Ponieważ $c_{\varphi(r)} \neq d_{\varphi(r)}$, więc przypadki 2.1, 2.2 i 2.3 wyczerpują wszystkie możliwości.

Łatwo zauważyć, że podana procedura zatrzymuje się po skończonej liczbie kroków (bo zbiór osób jest skończony) i że otrzymany ciąg $c_{\varphi(1)}, \ldots, c_{\varphi(k)}$ ma własności (W1) i (W2). Własność (W1) w oczywisty sposób wynika z konstrukcji podanego ciągu, a własność (W2) wynika z następujących faktów:

(i) $c_{\varphi(1)}=d_{\varphi(2)}, c_{\varphi(2)}=d_{\varphi(3)}, \ldots, c_{\varphi(k-1)}=d_{\varphi(k)}$,
(ii) $c_{\varphi(k)}$ jest równe $d_{\varphi(1)}$ lub jest różne od wszystkich d_i $(i=1, 2, \ldots, n)$,
(iii) dobra $d_{\varphi(1)}, d_{\varphi(2)}, \ldots, d_{\varphi(k)}$ są parami różne i różne od dóbr d_i dla $i \neq \varphi(1), \ldots, \varphi(k)$ (bo przy podziale M wszystkie osoby otrzymują różne dobra).

W ten sposób zakończyliśmy dowód lematu.

Na podstawie powyższego lematu wnioskujemy, że dla rozdziału $M(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ (który jest z założenia Pareto-optymalny) istnieje osoba i, która otrzymuje najlepsze dla niej dobro (powiedzmy d_i). Możemy więc przyjąć $\delta(1)=i$. Odrzucając ze zbioru X dobro d_i, a ze zbioru N osobę i, otrzymujemy znowu rozdział Pareto-optymalny i analogicznie jak poprzednio wyznaczamy osobę $\delta(2)$. W ten sam sposób możemy wyznaczyć całą kolejkę δ i łatwo zauważyć, ze rozdziały $M(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ i $\delta(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ są identyczne.

3. Charakteryzacja mechanizmów neutralnych i Pareto-optymalnych

Rozważmy ponownie funkcję $F: [L(X)]^n \to P(N)$, generującą uogólniony mechanizm kolejkowy. Będziemy mówili, ze funkcja F jest *niezmiennicza ze względu na permutacje w zbiorze dóbr* (w skrócie: *niezmiennicza*), jeśli spełniony jest warunek:

$$F(P_1^\mu, P_2^\mu, \ldots, P_n^\mu) = F(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

dla dowolnego ciągu preferencji $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ oraz dowolnej permutacji $\mu: X \to X$.

Okazuje się, ze uogólnione mechanizmy kolejkowe generowane przez niezmiennicze funkcje F są jedynymi mechanizmami, spełniającymi warunek neutralności i Pareto-optymalności. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Mechanizm $M: [L(X)]^n \to I(N, X)$ jest mechanizmem Pareto-optymalnym i neutralnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest uogólnionym mechanizmem kolejkowym, generowanym przez pewną niezmienniczą funkcję $F: [L(X)]^n \to P(N)$* (tzn. $M = M_F$).

Dowód. Mechanizm M_F dla funkcji niezmienniczej F jest oczywiście Pareto-optymalny, co wynika z twierdzenia 1. Aby udowodnić, że jest to mechanizm neutralny, wystarczy zauważyć, że każdy mechanizm kolejkowy jest neutralny. Jeśli bowiem $\delta: N \to N$ jest kolejką, a $\mu: X \to X$ dowolną permutacją i rozdział $\delta(P_1^\mu, P_2^\mu, \ldots, P_n^\mu)$ przydziela osobie i dobro d_i, to rozdział $\delta(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ przydziela osobie i dobro $\mu(d_i)$, a więc rozdział $[\delta(P_1, P_2, \ldots, P_n)]^\mu$ przydziela osobie i dobro $\mu^{-1}\mu(d_i) = d_i$. Stąd

$$\delta(P_1^\mu, P_2^\mu, \ldots, P_n^\mu) = [\delta(P_1, P_2, \ldots, P_n)]^\mu.$$

Oznacza to, że mechanizm kolejkowy wyznaczony przez kolejkę δ jest neutralny. Dla dowolnego uogólnionego mechanizmu kolejkowego M_F, generowanego przez niezmienniczą funkcję F, mamy więc:

$$\begin{aligned} M_F(P_1^\mu, P_2^\mu, \ldots, P_n^\mu) &= [F(P_1^\mu, P_2^\mu, \ldots, P_n^\mu)](P_1^\mu, P_2^\mu, \ldots, P_n^\mu) = \\ &= [F(P_1, P_2, \ldots, P_n)](P_1^\mu, P_2^\mu, \ldots, P_n^\mu) = \\ &= [[F(P_1, P_2, \ldots, P_n)](P_1, P_2, \ldots, P_n)]^\mu = \\ &= [M_F(P_1, P_2, \ldots, P_n)]^\mu, \end{aligned}$$

czyli mechanizm M_F jest również neutralny.

Załóżmy teraz, że mamy pewien mechanizm M, który jest Pareto-optymalny i neutralny. Z twierdzenia 1 wynika, że istnieje funkcja F taka, że $M=M_F$. W ogólnym przypadku funkcja F nie musi być niezmiennicza. Udowodnimy jednak, że jeśli M_F jest neutralny, to istnieje niezmiennicza funkcja G taka, że $M_F=M_G$.

Aby zdefiniować funkcję G, ustalmy najpierw pewną relację $P\in L(X)$. Zauważmy, że dla dowolnej relacji $Q\in L(X)$ istnieje dokładnie jedna permutacja $\varepsilon: X\to X$ taka, że $P=Q^{\varepsilon}$. Weźmy dowolną funkcję $F:[L(X)]^n\to P(N)$ i zdefiniujmy dla niej funkcję $G:[L(X)]^n\to P(N)$ następująco:

$$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)=F(P, P_2^{\varepsilon}, \ldots, P_n^{\varepsilon}),$$

gdzie ε jest permutacją taką, że $P=P_1^{\varepsilon}$.

Udowodnimy następujące fakty:

(F1) G jest funkcją niezmienniczą.

(F2) Jeśli mechanizm M_F jest neutralny, to $M_F=M_G$.

Fakt (F1) wynika stąd, że jeśli $\mu: X\to X$ jest dowolną permutacją oraz $P=P_1^{\varepsilon}$, to $P=(P_1^{\mu})^{\mu^{-1}\varepsilon}$, a więc:

$$G(P_1^{\mu}, P_2^{\mu}, \ldots, P_n^{\mu})=F\left(P, (P_2^{\mu})^{\mu^{-1}\varepsilon}, \ldots, (P_n^{\mu})^{\mu^{-1}\varepsilon}\right)=$$
$$=F(P, P_2^{\varepsilon}, \ldots, P_n^{\varepsilon})=G(P_1, P_2, \ldots, P_n).$$

Fakt (F2) wynika stąd, że jeśli mechanizm M_F jest neutralny, G jest funkcją niezmienniczą (a więc M_G jest również neutralny), to dla dowolnego ciągu $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ oraz dla permutacji ε takiej, że $P=P_1^{\varepsilon}$ otrzymujemy:

$$M_F(P_1, P_2, \ldots, P_n)=[M_F(P_1^{\varepsilon}, P_2^{\varepsilon}, \ldots, P_n^{\varepsilon})]^{\varepsilon^{-1}}=$$
$$=[F(P_1^{\varepsilon}, P_2^{\varepsilon}, \ldots, P_n^{\varepsilon})(P_1^{\varepsilon}, P_2^{\varepsilon}, \ldots, P_n^{\varepsilon})]^{\varepsilon^{-1}}=$$
$$=[G(P_1, P_2, \ldots, P_n)(P_1^{\varepsilon}, P_2^{\varepsilon}, \ldots, P_n^{\varepsilon})]^{\varepsilon^{-1}}=$$
$$=[G(P_1^{\varepsilon}, P_2^{\varepsilon}, \ldots, P_n^{\varepsilon})(P_1^{\varepsilon}, P_2^{\varepsilon}, \ldots, P_n^{\varepsilon})]^{\varepsilon^{-1}}=$$
$$=[M_G(P_1^{\varepsilon}, P_2^{\varepsilon}, \ldots, P_n^{\varepsilon})]^{\varepsilon^{-1}}=M_G(P_1, P_2, \ldots, P_n).$$

4. Niemanipulowalność

Wiadomo, że mechanizmy kolejkowe są Pareto-optymalne, neutralne i niemanipulowalne (zob. [4]). Własności te nie charakteryzują jednak wyłącznie mechanizmów kolejkowych, gdyż istnieją mechanizmy niekolejkowe, które są

również Pareto-optymalne, neutralne i niemanipulowalne. Przykład takiego mechanizmu podał Svensson ([4], s. 563). W przykładzie Svenssona występują 4 osoby i 4 dobra. Dobra są wybierane w kolejności (osób) 1, 2, 3, 4 oprócz przypadku, gdy osoby 1 i 2 posiadają te same preferencje. Wówczas kolejnością wyboru jest 1, 2, 4, 3. Z kolei uogólnione mechanizmy kolejkowe, nawet jeśli są neutralne, mogą być manipulowalne, o czym świadczy następujący przykład.

Przykład 4. Załóżmy, że mamy trzy dobra, które chcemy rozdzielić pomiędzy trzy osoby. Załóżmy, że kolejka, zgodnie z którą osoby te wybierają dobra, ma postać 1, 2, 3, chyba że preferencje wszystkich osób są jednakowe i wtedy kolejka ta ma postać 3, 2, 1. Jest to oczywiście uogólniony mechanizm kolejkowy, który, jak łatwo sprawdzić, jest mechanizmem neutralnym (dla dowolnej permutacji μ oba ciągi preferencji (P_1, P_2, P_3) oraz $(P_1^\mu, P_2^\mu, P_3^\mu)$ są albo jednocześnie ciągami preferencji jednakowych, albo jednocześnie ciągami preferencji niejednakowych). Jest to jednak mechanizm manipulowalny. Jeśli na przykład $P_1 : ABC$, $P_2 : ABC$, $P_3 : ACB$, to osoba 3 otrzyma dobro C. Jednak przy zmianie preferencji P_3 na $P_3' : ABC$, osoba ta otrzymałaby dobro A, które jest dla niej lepsze od dobra C.

Jak podaje Svensson, nie jest znana pełna charakteryzacja mechanizmów Pareto-optymalnych, neutralnych i niemanipulowalnych. Poniżej (twierdzenie 3) podajemy przykład warunku wystarczającego, charakteryzującego takie mechanizmy (warunek ten jest spełniony przez przykład Svenssona). W podanym niżej twierdzeniu symbol $F(P_1, P_2, \ldots, P_n)(l)$ oznacza numer osoby, która w kolejce $F(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ znajduje się na pozycji l.

Twierdzenie 3. *Jeśli M_F jest uogólnionym mechanizmem kolejkowym oraz dla funkcji F spełniony jest warunek:*

(NM) *Dla dowolnych preferencji $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_n$ oraz P_i', jeśli $F(P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_n)(k) = i$,*

to dla dowolnego $l = 1, 2, \ldots, k$

$$F(P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_n)(l) = F(P_1, P_2, \ldots, P_i', \ldots, P_n)(l),$$

to mechanizm M_F jest mechanizmem niemanipulowalnym.

Warunek (NM) oznacza, że jeśli przy pewnych preferencjach osoba i znajduje się w kolejce na pozycji k, to przy zmianie preferencji tej osoby, wszystkie osoby, które znajdowały się na pozycjach wcześniejszych, zachowają swoją pozycję (to samo dotyczy osoby i).

Dowód podanego twierdzenia jest natychmiastowy. Teza twierdzenia wynika stąd, że jeśli wszystkie osoby wybierające przed osobą i (łącznie z tą osobą) zachowują swoje pozycje przy zmianie preferencji osoby i, to wybiorą one dokładnie te same dobra, które wybrały przy pierwotnych preferencjach osoby i, a więc osoba i w żaden sposób nie może polepszyć swojej sytuacji (poprzez zmianę swoich preferencji).

Podane twierdzenie można uznać za częściową charakteryzację mechanizmów Pareto-optymalnych i niemanipulowalnych (zauważmy, że nie zakładamy tutaj neutralności). Otwarty pozostaje problem, czy warunek (NM) jest warunkiem koniecznym (a nie tylko wystarczającym) niemanipulowalności.

Literatura

[1] M. Kuc, *Analiza zasad sprawiedliwości Klemensa Szaniawskiego*, Studia Socjologiczne 2000, nr 1-2, s. 167-195
[2] H. Steinhaus, *The Problem of Fair Division*, Econometrica 16, 1948, s. 101-104
[3] K. Szaniawski, *O pojęciu podziału dóbr*, w: K. Szaniawski, *O nauce, rozumowaniu i wartościach. Pisma wybrane*, wybrał i opracował J. Woleński, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994
[4] L.G. Svensson, *Strategy-Proof Allocation of Indivisible Goods*, Social Choice and Welfare 16, 1999, 557-567
[5] H.P. Young, *Sprawiedliwy podział*, Wydawnictwo Naukowe „Scholar", Warszawa 2003

PARETO-OPTIMAL MECHANISMS OF ALLOCATION OF INDIVISIBLE GOODS

Summary

In the paper we consider mechanisms of allocation of a finite number of indivisible goods among a finite number of individuals. We define generalized queue allocations and prove theorems about characterization of such mechanisms (using properties of Pareto-optimality and neutrality). Our paper is a partial answer to a question posed by Svensson (Social Choice and Welfare, 16, 1999, 557-567.