Piotr DWORNICZAK

Katedra Matematyki Stosowanej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

PRZEGLĄD IMPLIKACJI ROZMYTYCH W KONTEKŚCIE WYZNACZANIA WAŻONYCH OCEN WARIANTÓW

Wprowadzenie

Dokonywanie ocen, porównań i wyborów jest jednym z podstawowych przejawów aktywności człowieka. Wybory o wielkim znaczeniu powinny być podejmowane po wszechstronnej i starannej ocenie, biorącej pod uwagę wszystkie istotne aspekty problemu. Wspomaganie podejmowania decyzji związane jest wtedy z rozpatrywaniem wielu kryteriów, według których dokonujemy oceny takiej decyzji. Mówimy wówczas o wielokryterialnym podejmowaniu decyzji. Najczęściej wyboru dokonuje się wtedy na podstawie pewnego kryterium „pośredniego", „ogólnego", otrzymanego z wielu branych pod uwagę.

Kryteria, w subiektywnej ocenie decydenta, mogą mieć różną ważność, wpływającą istotnie na ostateczną ocenę rozważanej opcji.

Każdą opcję (alternatywę, wariant, obiekt) można scharakteryzować za pomocą pewnego zbioru cech, często nazywanych własnościami. Własności przypisywane obiektom możemy podzielić na dwie grupy: własności, które dany obiekt albo w pełni ma, albo w pełni nie ma, oraz takie, które dany obiekt ma (wykazuje) częściowo, w pewnym stopniu, w zależności od subiektywnej oceny. Pierwsze to tzw. własności predykatywne, drugie – niepredykatywne. Pierwsze mogą więc być opisane za pomocą pewnej funkcji zdaniowej, której argumentem jest nazwa obiektu, a jej wartością jest prawda lub fałsz określone jednoznacznie, drugie natomiast są własnościami „miękkimi", a wartości logiczne „prawda" (1) lub „fałsz" (0) nie

wystarczają do ich oceny. Bierzemy wtedy pod uwagą również wartości pośrednie między prawdą a fałszem, stosując logikę wielowartościową. Wartość interpretujemy jako stopień, w jakim podany wariant wykazuje określoną własność. Stopień ten jest liczbą z przedziału [0, 1]. W szczególnym przypadku za własność może być uznane spełnienie przez daną opcję pewnego ograniczenia lub celu.

Danej opcji L przypisujemy zatem wektor ocen

$$[W(L, K_1), W(L, K_2), ..., W(L, K_k)] = [a_1, ..., a_k] \in [0, 1]^k,$$

gdzie $K = \{K_1, K_2, ..., K_k\}$ jest skończonym zbiorem kryteriów.

Ocena ogólna alternatywy L to liczba otrzymana z powyższych ocen dzięki ich agregacji.

Definicja 1. Funkcję $A : [0, 1]^k \to [0, 1]$, $k \in N$, spełniającą warunki:

- $(\forall i = 1, 2, ..., k : a_i \leqslant b_i) \Rightarrow A(a_1, a_2, ..., a_k) \leqslant A(b_1, b_2, ..., b_k)$,
- $A(0, 0, ..., 0) = 0$ i $A(1, 1, ..., 1) = 1$,
- $A(a) = a$,

nazywamy k-argumentowym operatorem agregacji (agregatorem, k-argumentową funkcją agregacji).

Liczbę $A(a_1, a_2, ..., a_k)$ nazywa się agregacją liczb $a_1, a_2, ..., a_k$.

Podstawowymi agregatorami są normy trójkątne, operatory kompensujące, operatory uśredniające i operatory uporządkowanej średniej ważonej (OWA).

Kryteriom, według których oceniany jest rozważany wariant, mogą być przypisane pewne stopnie ważności $w_1, w_2, ..., w_k \in [0, \infty]$. Wówczas agregacja, będąca ogólną oceną wariantu, powinna uwzględniać nie tylko wartości ocen według poszczególnych kryteriów, ale też stopnie ważności tych kryteriów. Podstawowymi agregatorami w takiej sytuacji są:

- t-norma z wagami $A(a_1, a_2, ..., a_k) = a_1^{w_1} t\, a_2^{w_2} t ... t\ a_k^{w_k}$,
- ważone średnie matematyczne:
  arytmetyczna

$$A(a_1, a_2, ..., a_k) = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i \cdot a_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i},$$

geometryczna

$$G(a_1, a_2, ..., a_k) = \left(\prod_{i=1}^{k} a_i^{w_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} w_i}},$$

gdzie $w_i \geqslant 0$ (przy czym $\sum_{i=1}^{k} w_i > 0$ oraz gdy $k=1$, wtedy $w_1 = 1$).

Najczęściej przyjmuje się, że stopnie $w_1, w_2, ..., w_k$ są liczbami z przedziału [0, 1] oraz $\sum_{i=1}^{k} = 1$ i nazywa się je wagami.

Podejmując próbę agregacji wielu ocen przy różnej ważności kryteriów, powinniśmy sobie zadać pytanie, jak uwzględnić wartości kryteriów i stopnie ich ważności w ocenie ogólnej. Problem ten można rozbić na dwa etapy. W pierwszym na podstawie oceny i ważności kryterium, według którego ocena ta została dokonana, wyznaczamy ocenę „ważoną". W drugim etapie z ocen ważonych tworzy się jedną liczbową ocenę zagregowaną.

Poniżej przedstawione zostaną uwagi dotyczące etapu uzyskiwania ocen ważonych. Jeżeli oceną danej opcji L według kryterium i o ważności w_i jest a_i, to oceną „ważoną" jest $b_i = f(w_i, a_i)$. Przyjmuje się, że funkcja $f: [0, 1]^2 \to \Re$ powinna być monotoniczna względem każdego z argumentów, przy czym ze względu na ocenę wariantu powinna być niemalejąca. Zatem dla dowolnych a i b jeśli $a > b$, to $f(w_i, a) \geqslant f(w_i, b)$. Jest to wynik założenia, że przy danej wadze kryterium większa ocena wariantu powinna powodować uzyskanie niemniejszej oceny ważonej. Ponadto przyjmuje się, że funkcja f powinna spełniać warunki brzegowe $f(0, a_i) = id$, $f(1, a_i) = a_i$, gdzie id to element jednostkowy agregacji, tzn. taki, że dołożenie go do wartości agregowanych nie zmienia wyniku operacji (zachodzi zatem $A(a_1, ..., id, ..., a_k) = A(a_1, ..., a_k)$). Najczęściej $id = 1$. Nie można zatem rozpatrywać uzyskiwania oceny ważonej w oderwaniu od sposobu agregacji.

Postać funkcji f nie jest jednoznacznie określona. Jej wartości powinny być jednak związane z wartością logiczną stwierdzenia: „*Jeżeli* kryterium jest ważne, *to* jest spełnione".

1. Implikacja rozmyta

Implikacja jest jednym z funktorów zdaniotwórczych. Wartość logiczna zdania złożonego, otrzymanego przez użycie implikacji, zależy od wartości logicznych poprzednika p i następnika q. W logice klasycznej implikacja

jeżeli p to q jest zdaniem fałszywym tylko wówczas, gdy jej poprzednik *p* jest zdaniem prawdziwym, a następnik *q* – fałszywym. W przypadku ocen wartości logicznych zdań składowych z przedziału [0, 1] używamy pewnego uogólnienia takiej implikacji.

Definicja 2. Implikacją rozmytą[1] nazywamy funkcję $I: [0, 1]^2 \to [0, 1]$ spełniającą warunki:

- $I(0, 0) = I(0, 1) = I(1, 1) = 1$, $I(1, 0) = 0$,
- jeżeli $x < z$, to $I(x, y) \geqslant I(z, y)$ dla dowolnego $y \in [0, 1]$,
- jeżeli $x < z$, to $I(y, x) \leqslant I(y, z)$ dla dowolnego $y \in [0, 1]$.

W literaturze przedmiotu wyróżnia się trzy główne klasy implikacji rozmytych: *S*-implikacje, *R*-implikacje oraz *T*-implikacje.

Definicja 3. *S*-implikacja to funkcja I_S definiowana formułą

$$I_S(x, y) = S(N(x), y),$$

gdzie *S* jest dowolną *s*-normą, a *N* dowolną negacją[2].

Definicja 4. *R*-implikacja to funkcja I_R definiowana formułą

$$I_R(x, y) = \sup\{z \in [0, 1] : T(x, z) \leqslant y\},$$

gdzie *T* jest dowolną, ciągłą *t*-normą.

Implikacja ta jest inaczej mówiąc implikacją indukowaną przez *t*-normę.

Trzecią klasą są funkcje używane jak implikacje w pewnych zastosowaniach, między innymi z dziedziny sterowania rozmytego.

Definicja 5. *T*-implikacja to funkcja I_T definiowana formułą

$$I_T(x, y) = T(x, y),$$

gdzie *T* jest dowolną *t*-normą.

Funkcje I_T nie spełniają warunków definicji 2. Można łatwo zauważyć, że równości $I(0, 0) = I(0, 1) = 1$ z pierwszego warunku w definicji implikacji nie są spełnione. Ze względu na użycie *t*-normy takie implikacje

---

[1] Nazwę „implikacja rozmyta" przyjąłem zgodnie z: [3, s. 147]. Wielu autorów nazywa powyższą funkcję „implikacją w logice wielowartościowej".

[2] Definicję podaję za: [2, s. 59]. Dubois D., Prade H. w [3] zastrzegają, że negacja powinna być silna (*strong*), tzn. ściśle malejąca, ciągła i inwolutywna.

odpowiadają bardziej formule „kryterium jest ważne *i* jest spełnione" aniżeli „*jeżeli* kryterium jest ważne, *to* jest spełnione". Z własności *t*-normy wynika, że przy zerowym stopniu ważności kryterium oraz dowolnym stopniu jego spełnienia wartość *T*-implikacji wynosi zero. Mamy tu zatem znaczną utratę posiadanych informacji. Ponadto wynik ten może powodować zerowanie zagregowanej oceny wariantu. Nie jest to również zgodne z przyjęciem naturalnego założenia, że zerowy stopień ważności kryterium powinien powodować pominięcie tego kryterium w wyznaczeniu oceny zagregowanej. Funkcje tej klasy bywają jednak nazywane implikacjami (np. [6, s. 162]). *S*-implikacje są uogólnieniem implikacji klasycznej $p \Rightarrow q$, korzystającym z prawa logiki $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$. Ponieważ *s*-norma jest uogólnieniem alternatywy, więc przy wprowadzeniu dowolnej negacji *N* definicja *S*-implikacji staje się oczywista.

W literaturze można zauważyć kilkanaście podstawowych implikacji rozmytych. Charakteryzują się one różnymi własnościami, a stosowane są w różnych sytuacjach. W tabeli 1 przedstawione zostały niektóre z nich.

Implikacje 6, 8, 9 są uogólnieniami, wynikającymi z przeniesienia na grunt logiki wielowartościowej praw logiki klasycznej:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee (p \wedge q),$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q,$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q \vee (\sim p \wedge \sim q),$$

gdzie *s*-norma, wyrażająca klasyczne *lub*, *t*-norma, wyrażająca *i*, oraz negacja $\sim$ zostały skonkretyzowane jako operatory maksimum, minimum i negacji standardowej. Implikacja 7 wprowadzona została w oryginale przez Łukasiewicza jako aksjomat w definicji operatora logiki wielowartościowej $Ł_\infty$. Jest to również *S*-implikacja przy negacji standardowej oraz *s*-normie $S(a, b) = \min\{1, a+b\}$, nazywanej sumą ograniczoną lub *s*-normą Łukasiewicza. Implikacja 10 jest *S*-implikacją przy negacji standardowej oraz *s*-normie $S(a, b) = a + b - ab$ nazywanej sumą algebraiczną. Implikacje 1, 2, 3, 14 nie są *S*-implikacjami, *T*-implikacjami ani *R*-implikacjami. Implikacja 4 jest *R*-implikacją przy *t*-normie standardowej $T(a, b) = \min\{a, b\}$, natomiast 5 jest *R*-implikacją przy *t*-normie produktowej (iloczynie algebraicznym) $T(a, b) = ab$.

Tabela 1. Podstawowe implikacje rozmyte

Lp.	Nazwa implikacji	Definicja	Typ
1	minimalna	$I(x,y)=\begin{cases}1, & \text{gdy } x=0 \text{ lub } y=1\\ 0 & \text{w innym przypadku}\end{cases}$	–
2	maksymalna	$I(x,y)=\begin{cases}0, & \text{gdy } x=1 \text{ lub } y=0\\ 1 & \text{w innym przypadku}\end{cases}$	–
3	ścisła (ścisła standardowa)	$I(x,y)=\begin{cases}1, & \text{gdy } x\leqslant y\\ 0 & \text{w innym przypadku}\end{cases}$	–
4	Gödla	$I(x,y)=\begin{cases}1, & \text{gdy } x\leqslant y\\ y & \text{w innym przypadku}\end{cases}$	R
5	Gainesa/Goguena	$I(x,y)=\begin{cases}1, & \text{gdy } x\leqslant y\\ y/x & \text{w innym przypadku}\end{cases}$	R
6	Zadeha	$I(x,y)=\max\{1-x, \min\{x,y\}\}$	S
7	Łukasiewicza	$I(x,y)=\min\{1, 1-x+y\}$	S
8	Kleene-Dienesa	$I(x,y)=\max\{1-x, y\}$	S
9	rozszerzona	$I(x,y)=\max\{y, \min\{1-x, 1-y\}\}$	S
10	Kleene-Dienesa-Łukasiewicza/ /Reichenbacha	$I(x,y)=1-x+xy$	S
11	Mamdaniego	$I(x,y)=\min\{x,y\}$	T
12	Larsena	$I(x,y)=xy$	T
13	t-norma Łukasiewicza	$I(x,y)=\max\{x+y-1, 0\}$	T
14	Yagera	$I(x,y)=\begin{cases}1, & \text{gdy } x=y=0\\ y^x & \text{w innym przypadku}\end{cases}$	–

Należy uświadomić sobie, że użycie różnych typów implikacji może prowadzić do określenia różnych ważonych ocen wariantów, a w konsekwencji do innej relacji preferencji między nimi. Nieznane są ogólne zasady wyboru implikacji właściwej dla danego problemu. Można co najwyżej podać pewne wskazówki lub określić własności, jakie implikacja powinna

spełniać. Wartość logiczna zdania złożonego zapisanego za pomocą implikacji jest oczywiście zależna od jej rodzaju.

W szczególności dla poszczególnych typów implikacji zachodzą poniższe warunki brzegowe.

Jeśli implikacja I jest S-implikacją, to

$$I(0, y)=1, \qquad I(1, y)=y, \qquad I(x, 0)=N(x), \qquad I(x, 1)=1.$$

Jeśli implikacja I jest R-implikacją, to

$$I(0, y)=1, \quad I(1, y)=y, \quad I(x, 0)=\sup\{z\in[0, 1]: T(x, z)=0\}, \quad I(x, 1)=1.$$

Jeśli implikacja I jest T-implikacją, to

$$I(0, y)=0, \qquad I(1, y)=y, \qquad I(x, 0)=0, \qquad \mathrm{I}(x, 1)=x.$$

Równości te wynikają łatwo z odpowiednich definicji.

2. Monotoniczność implikacji i oceny ważone a preferencje wariantów

Przy uzyskiwaniu ocen ważonych postuluje się, aby przy stałej ważności kryterium, przy wzroście oceny wariantu, wzrastała (a przynajmniej nie malała) ocena ważona. Analogicznie: przy zmniejszaniu ważności kryterium, a stałej ocenie wariantu ocena ważona powinna również wzrastać (przynajmniej nie maleć). Nie zawsze jednak tak właśnie jest. Przy stałej ocenie y wariantu, funkcje określające wartość implikacji niekoniecznie są monotoniczne. Jeżeli monotoniczność występuje, to może mieć różny charakter. T-implikacje są zawsze niemalejące (ze względu na dowolny argument), co wynika z definicji t-normy. Nie spełniają tym samym drugiego warunku z definicji 2. Pozostałe (oprócz 6) są nierosnące ze względu na poprzednik. Szczególnie „dziwnie" zachowuje się implikacja Zadeha. Dla wartości poprzednika większej od 0,5 nie jest monotoniczna.

W tabeli 2 zostały podane zakresy monotoniczności poszczególnych implikacji w całej dziedzinie poprzednika.

Tabela 2. Monotoniczność implikacji względem następnika

Lp.	Nazwa implikacji	Zakres wartości następnika y, dla którego implikacja jest w całej dziedzinie poprzednika x:				
		nie-rosnąca	nie-malejąca	malejąca	rosnąca	stała
1	minimalna	$y \in [0, 1]$	$y=1$	–	–	$y=1$
2	maksymalna	$y \in [0, 1]$	$y \neq 0$	–	–	$y \neq 0$
3	ścisła (ścisła standardowa)	$y \in [0, 1]$	$y=1$	–	–	$y=1$
4	Gödla	$y \in [0, 1]$	$y=1$	–	–	$y=1$
5	Gainesa/Goguena	$y \in [0, 1]$	$y=1$	–	–	$y=1$
6	Zadeha	$y \leqslant 0,5$	–	$y=0$	–	–
7	Łukasiewicza	$y \in [0, 1]$	$y=1$	$y=0$	–	$y=1$
8	Kleene-Dienesa	$y \in [0, 1]$	$y=1$	$y=0$		$y=1$
9	rozszerzona	$y \in [0, 1]$	$y \geqslant 0,5$	$y=0$	–	$y \geqslant 0,5$
10.	Kleene-Dienesa-Łukasiewicza/ /Reichenbacha	$y \in [0, 1]$	$y=1$	$y \in [0, 1)$	–	$y=1$
11	Mamdaniego	$y=0$	$y \in [0, 1]$	–	$y=1$	$y=0$
12	Larsena	$y=0$	$y \in [0, 1]$	–	$y \in (0, 1]$	$y=0$
13	t-norma Łukasiewicza	$y=0$	$y \in [0, 1]$	–	$y=1$	$y=0$
14	Yagera	$y \in [0, 1]$	$y=1$	$y \in (0, 1)$	–	$y=1$

Analogicznie, ze względu na następnik implikacji wszystkie funkcje (oprócz – w pewnych przypadkach – 9) są niemalejące. Zatem przy przyjętej ważności kryterium wraz ze wzrostem oceny wariantu wartości ocen ważonych nie maleją. Jest to korzystna własność, ponieważ zazwyczaj przy ustalaniu ważonej oceny wariantu ustalane są wpierw stopnie ważności kryteriów. Wtedy implikacje (oprócz 9) są już monotoniczne (a nawet ściśle monotoniczne). W tabeli 3 zostały podane szczegółowo zakresy monotoniczności poszczególnych implikacji w całej dziedzinie następnika. W szczególny sposób zachowuje się tutaj implikacja rozszerzona. Dla wartości poprzednika mniejszej od 0,5 nie jest ona monotoniczna.

Wybór rodzaju implikacji powodować może zmianę wartości oceny ważonej. W konsekwencji może to prowadzić do zmian preferencji wariantów.

Tabela 3. Monotoniczność implikacji względem poprzednika

Lp.	Nazwa implikacji	Zakres wartości poprzednika x, dla którego implikacja jest w całej dziedzinie następnika y:				
		nie-rosnąca	nie-malejąca	malejąca	rosnąca	stała
1	minimalna	$x=0$	$x\in[0, 1]$	–	–	$x=0$
2	maksymalna	$x\neq 1$	$x\in[0, 1]$	–	–	$x\neq 1$
3	ścisła (ścisła standardowa)	$x=0$	$x\in[0, 1]$	–	–	$x=0$
4	Gödla	$x=0$	$x\in[0, 1]$	–	–	$x=0$
5	Gainesa/Goguena	$x=0$	$x\in[0, 1]$	–	–	$x=0$
6	Zadeha	$x\leqslant 0{,}5$	$x\in[0, 1]$	–	$x=1$	$x\leqslant 0{,}5$
7	Łukasiewicza	$x=0$	$x\in[0, 1]$	–	$x=1$	$x=0$
8	Kleene-Dienesa	$x=0$	$x\in[0, 1]$	–	$x=1$	$x=0$
9	rozszerzona	–	$x\geqslant 0{,}5$	–	$x=1$	–
10	Kleene-Dienesa-Łukasiewicza/ /Reichenbacha	$x=0$	$x\in[0, 1]$	–	$x\neq 0$	$x=0$
11	Mamdaniego	$x=0$	$x\in[0, 1]$	–	$x=1$	$x=0$
12	Larsena	$x=0$	$x\in[0, 1]$	–	$x\in(0, 1]$	$x=0$
13	t-norma Łukasiewicza	$x=0$	$x\in[0, 1]$	–	$x=1$	$x=0$
14	Yagera	$x=0$	$x\in[0, 1]$	–	$x\in(0, 1]$	$x=0$

Dla zilustrowania rozważań prześledźmy poniższy **przykład**.

Dokonano ocen wariantów A, B, C, D, E według kryterium, którego stopień ważności oceniono na a) 0,8 , b) 0,2. Uznano, że wariant A spełnia to kryterium w stopniu 0,1, wariant B w stopniu 0,3, wariant C w 0,8, wariant D w 0,9, a E w pełni. Na podstawie ocen ważonych ustalono preferencje wariantów, przyjmując, że wariant jest tym lepszy, im wyższa jest jego ocena. Wartości ocen ważonych oraz wynikające z nich preferencje podane zostały w tabelach 4 i 5.

Zauważmy, że wybór rodzaju implikacji może wpływać na ocenę siły preferencji i uznanie jej za ścisłą lub nie. Gdyby rozważać jedynie występowanie słabej preferencji pomiędzy wariantami, wówczas przy ustalonej wadze kryterium $x=0{,}8$ jest ona zawsze taka sama. Wynika to z faktu, że przy tej wadze kryterium wszystkie funkcje określające wartość implikacji są funkcjami niemalejącymi wartości poprzednika x.

Tabela 4. Ważone oceny wariantów dla danych z powyższego przykładu oraz preferencje wariantów

Lp.	Nazwa implikacji	Ocena wariantu dla wagi kryterium równej 0,8					
		A	B	C	D	E	preferencja
		0,1	0,3	0,8	0,9	1	
1	minimalna	0	0	0	0	1	A=B=C=D<E
2	maksymalna	1	1	1	1	1	A=B=C=D=E
3	ścisła (ścisła standardowa)	0	0	1	1	1	A=B<C=D=E
4	Gödla	0,1	0,3	1	1	1	A<B<C=D=E
5	Gainesa/Goguena	0,125	0,375	1	1	1	A<B<C=D=E
6	Zadeha	0,2	0,3	0,8	0,8	0,8	A<B<C=D=E
7	Łukasiewicza	0,3	0,5	1	1	1	A<B<C=D=E
8	Kleene-Dienesa	0,2	0,3	0,8	0,9	1	A<B<C<D<E
9	rozszerzona	0,2	0,3	0,8	0,9	1	A<B<C<D<E
10	Kleene-Dienesa-Łukasiewicza/Reichenbacha	0,28	0,44	0,84	0,92	1	A<B<C<D<E
11	Mamdaniego	0,1	0,3	0,8	0,8	0,8	A<B<C=D=E
12	Larsena	0,08	0,24	0,64	0,72	0,8	A<B<C<D<E
13	*t*-norma Łukasiewicza	0	0,1	0,6	0,7	0,8	A<B<C<D<E
14	Yagera	0,158	0,382	0,837	0,919	1	A<B<C<D<E

Tabela 5. Ważone oceny wariantów dla danych z powyższego przykładu oraz preferencje wariantów

Lp.	Nazwa implikacji	Ocena wariantu dla wagi kryterium równej 0,2					
		A	B	C	D	E	preferencja
		0,1	0,3	0,8	0,9	1	
1	minimalna	0	0	0	0	1	A=B=C=D<E
2	maksymalna	1	1	1	1	1	A=B=C=D=E
3	ścisła (ścisła standardowa)	0	1	1	1	1	A<B=C=D=E
4	Gödla	0,1	1	1	1	1	A<B=C=D=E
5	Gainesa/Goguena	0,5	1	1	1	1	A<B=C=D=E
6	Zadeha	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	A=B=C=D=E
7	Łukasiewicza	0,9	1	1	1	1	A<B=C=D=E
8	Kleene-Dienesa	0,8	0,8	0,8	0,9	1	A=B=C<D<E
9	rozszerzona	0,8	0,7	0,8	0,9	1	B<A=C<D<E
10	Kleene-Dienesa-Łukasiewicza/Reichenbacha	0,82	0,86	0,96	0,98	1	A<B<C<D<E
11	Mamdaniego	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	A<B=C=D=E
12	Larsena	0,02	0,06	0,16	0,18	0,2	A<B<C<D<E
13	*t*-norma Łukasiewicza	0	0	0	0,1	0,2	A=B=C<D<E
14	Yagera	0,631	0,786	0,956	0,979	1	A<B<C<D<E

W stosunku do wyników dla wartości 0,8 w przypadku wartości 0,2 ocena siły preferencji może ulec zmianie. Ponadto implikacja rozszerzona ze względu na brak monotoniczności zmienia nawet porządek preferencyjny. Pozostałe implikacje są niemalejące, tak jak dla wartości 0,8.

Podsumowanie

Porównanie różnych typów i rodzajów implikacji, przedstawione w artykule, jest istotne w ocenianiu wariantów na podstawie wielu niejednakowo ważnych kryteriów. Przy wyznaczaniu ocen ważonych można stosować implikacje rozmyte. Bardzo ważna dla poprawnego przebiegu procesu wspomagania podejmowania decyzji jest znajomość monotoniczności implikacji. Jest ona szczególnie ważna, jeśli z wielu ocen ważonych otrzymuje się ocenę zagregowaną. Propozycje takich agregacji w powiązaniu z przykładowymi implikacjami nie zostały tu podane. Dla każdej implikacji powinno się dobrać agregację nieredukującą informacji zawartych w ocenach wariantu i ocenach ważonych.

Literatura

[1] *Aggregation Operators. New Trends and Applications*, red. T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Physica-Verlag, Heidelberg – New York 2002.
[2] Carlsson C., Fullér R., *Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization*, Physica-Verlag, Heidelberg – New York 2002.
[3] *Fundamentals of Fuzzy Sets*, red. D. Dubois, H. Prade, Kluwer Academic Publishers, Boston 2000.
[4] Kacprzyk J., *Wieloetapowe sterowanie rozmyte*, WNT, Warszawa 2001.
[5] Łachwa A., *Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji*, AOW Exit, Warszawa 2001.
[6] Piegat A., *Modelowanie i sterowanie rozmyte* AOW Exit, Warszawa 1999.

FUZZY IMPLICATIONS REVIEW IN CONTEXT DETERMINATION OF THE WEIGHTED DEGREE OF SATISFACTION OF THE CRITERIA

Summary

In this paper we present the fuzzy implications review and its application to obtain weighed degree of satisfaction of the criteria. The range of monotonicity of the particular implication are presented. The recognize of monotonicity is important for the comparison of the alternatives by multicriteria decision aid. The use of various types of implications is illustrated by a simple example. The knowledge of those issues is important in evaluation of some variants on the basis of many diverse important criteria.

