Elżbieta RYCHŁOWSKA-MUSIAŁ
Katedra Matematyki Stosowanej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

WPŁYW POSTĘPU TECHNICZNO-ORGANIZACYJNEGO NA OPTYMALNĄ STRATEGIĘ ALOKACJI KAPITAŁU FIRMY

W firmie prowadzącej działalność produkcyjną w kilku zakładach kluczowym problemem strategicznym jest podział kapitału pomiędzy poszczególne oddziały. Zarządzający firmą stają wówczas przed dylematem określenia kryterium podziału. W spółkach akcyjnych, które będziemy rozważać w niniejszym artykule, celem wszelkich działań podejmowanych przez firmę, a więc również decyzji alokacyjnych, jest pomnażanie wartości spółki dla akcjonariuszy. Zobaczymy, jak w świetle tego kryterium zostanie sformułowana optymalna strategia alokacji kapitału firmy, prowadzącej działalność produkcyjną w dwóch zakładach. Techniki produkcyjne stosowane w każdym z zakładów różnią się między sobą wskaźnikami kapitało- i pracochłonności. Ze względu na zachodzące w procesie produkcyjnym zmiany techniczno-organizacyjne oba wskaźniki, charakteryzujące każdą z technik, mogą maleć w czasie. Tempo tych zmian jest w każdym z zakładów inne. Zastanowimy się zatem, co przesądza o wyborze odpowiedniej techniki, czy większy wpływ na decyzję ma tempo postępu techniczno-organizacyjnego, czy stały czynnik kosztowy i w jakim horyzoncie decydującą rolę gra każda z determinant.

1. Sformułowanie modelu

Strukturę produkcyjną i finansową przedsiębiorstwa oraz powiązania między poszczególnymi wielkościami opisują następujące równania[1]:

- Produkcja firmy jest sumą produkcji obu zakładów:

[1] Prezentowany model jest dynamiczną wersją zadania przedstawionego w [7].

$$Q((K_1(t), K_2(t), t) = Q_1((K_1(t), t) + Q_2(K_2(t), t) = q_1(t)K_1(t) + q_2(t)K_2(t), \quad (1)$$

gdzie:

$Q(K_1(t), K_2(t), t)$ – poziom produkcji łącznej obu zakładów w momencie t,

$Q_j(K_j(t), t)$ – poziom produkcji wytworzonej w zakładzie j w momencie t,

$K_j(t)$ – wielkość majątku zakładu j w momencie t,

$q_j(t)$ – współczynnik produktywności majątku w zakładzie j.

- Majątek i zatrudnienie firmy są sumą majątku i zatrudnienia poszczególnych zakładów:

$$K(t) = K_1(t) + K_2(t), \qquad L(t) = L_1(t) + L_2(t) = l_1 K_1(t) + l_2 K_2(t), \quad (2)$$

gdzie:

$L_j(t)$ – poziom zatrudnienia w zakładzie j w momencie t,

l_j – odwrotność technicznego uzbrojenia pracy w zakładzie j.

- Wskaźniki kapitało- i pracochłonności:

$$\frac{1}{q_j(t)} = \frac{K_j(t)}{Q_j(K_j(t), t)}, \qquad \frac{l_j}{q_j(t)} = \frac{L_j(t)}{Q_j(K_j(t), t)} \qquad j = 1, 2, \quad (3)$$

gdzie $q_j(0) > 0$ są malejącymi funkcjami czasu: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q_j}\right) < 0$.

- Łączny zysk netto obu zakładów jest dzielony na dywidendę i zwiększenie majątku całkowitego, co zapisujemy:

$$ZN(Q, K, L, t) = (1 - f)(S(Q) - wL(t) - aK(t)) = D(t) + \dot{K}(t), \quad (4)$$

gdzie:

$ZN(Q, K, L, t)$ – wartość zysku netto przy poziomie majątku K i zatrudnieniu L w momencie t,

$S(Q) = P(Q)Q(K(t), t)$ – rosnąca, wklęsła funkcja przychodu ze sprzedaży,

$P(Q)$ – malejąca funkcja jednostkowej ceny sprzedaży przy poziomie produkcji Q,

$D(t)$ – wielkość dywidendy w momencie t,

f – stawka podatku dochodowego od osób prawnych,

w – stawka płac,

a – stopa deprecjacji (równa w obu zakładach).

- Inwestycje w każdym z zakładów mogą być finansowane przez zysk zatrzymany oraz fundusz amortyzacyjny:

$$I_j(t)=\dot{K}_j(t)+aK_j(t), \qquad j=1, 2, \tag{5}$$

gdzie:

$I_j(t)$ – wielkość inwestycji w technikę j, w momencie t.

- W ustalonym horyzoncie zakład 1 stosuje technikę kapitałochłonną i pracooszczędną, a zakład 2 technikę kapitałooszczędną i pracochłonną. Zatem:

$$\frac{1}{q_1(t)}>\frac{1}{q_2(t)} \quad \text{oraz} \quad \frac{l_1}{q_1(t)}<\frac{l_2}{q_2(t)} \quad \text{dla każdego } t\in[0, z].$$

- Ponadto zakładamy, że spełniony jest warunek:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial K}\right|_{K=K(0)} \geqslant a+\frac{i}{1-f}. \tag{6}$$

Aby sformułować powyższy problem w postaci zadania sterowania optymalnego, wprowadzamy współczynnik podziału majątku między zakłady

$$s(t)=\frac{K_1(t)}{K(t)}.$$

Zakładać będziemy, że s jest funkcją przedziałami ciągłą i przyjmuje wartości z przedziału [0, 1].

Przekształcenia warunków (5)-(6) prowadzą do następującego zadania sterowania optymalnego:

Zadanie

Znaleźć:

$$\max_{I(t), s(t)} \left\{ \int_0^z (CF(K(t), s(t), t)-I(t))e^{-it}\,dt+K(z)e^{-iz} \right\} \tag{7}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} &\dot{K}(t)=I(t)-aK(t),\\ &s(t)\geqslant 0,\\ &1-s(t)\geqslant 0,\\ &CF(K(t),\, s(t),\, t)-I(t)\geqslant 0,\\ &K(0)=K_0>0, \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie:

$$CF(K(t),\, s(t),\, t)=(1-f)\big(S(Q)-w((l_1-l_2)\,s(t)-l_2)K(t)\big)+afK(t)$$

oraz:

$$\begin{aligned} Q(K(t),\, s(t),\, t)&=[q_1(t)\,s(t)+q_2(t)(1-s(t))]K(t)=\\ &=[(q_1(t)-q_2(t))\,s(t)+q_2(t)]K(t), \end{aligned} \tag{9}$$

$$L(K(t),\, s(t),\, t)=[l_1\,s(t)+l_2(1-s(t))]\,K(t)=[(l_1-l_2)\,s(t)+l_2]\,K(t). \tag{10}$$

Zmiennymi sterującymi są w zadaniu: $I(t)$ i $s(t)$. Zmienną stanu jest $K(t)$.

2. Warunki optymalności

Na mocy twierdzeń o warunkach koniecznych i dostatecznych istnienia rozwiązania optymalnego ([3], s. 282-284) formułujemy następujący układ warunków:

$$\begin{aligned} &\dot{\lambda}(t)=(i+a)-\frac{\partial CF}{\partial K}(\mu_3(t)+1),\\ &-1+\lambda(t)-\mu_3(t)=0,\\ &\mu_1(t)-\mu_2(t)+\frac{\partial CF}{\partial s}(\mu_3(t)+1)=0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\lambda(z)=1 \qquad \text{(warunek transwersalności)} \tag{12}$$

oraz ograniczeń:

$$\mu_1(t) \geqslant 0 \wedge \mu_1(t)\, s(t) = 0,$$

$$\mu_2(t) \geqslant 0 \wedge \mu_2(t)(1 - s(t)) = 0, \tag{13}$$

$$\mu_3(t) \geqslant 0 \wedge \mu_3(t)\big(CF(K(t), s(t), t) - I(t)\big) = 0,$$

które są spełnione przez rozwiązanie zadania (7)-(8) wszędzie poza ewentualnymi punktami nieciągłości wektora sterowań $(I(t), s(t))$.

3. Trajektorie optymalne i charakterystyka rozwiązania

W nieklasycznym zadaniu sterowania optymalnego rozwiązanie otrzymujemy w wyniku przeprowadzenia procedury iteracyjnej, zwanej procedurą łączenia ścieżek. Badając wszystkie kombinacje dodatnich i równych zero mnożników Lagrange'a $(\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t))$, rozwiązujemy kolejno układy równań różniczkowych, otrzymując tzw. charakterystyki ścieżek[2]. Analiza rozwiązania wskazuje na dwa typy optymalnych strategii alokacji kapitału w zależności od kosztów krańcowych produkcji w fazach zrównoważonego wzrostu $(c_1(t), c_2(t))$ i w fazie reorganizacji procesu produkcyjnego $(c_{21}(t))$:

I $\quad c_1(t) < c_2(t) < c_{21}(t),$

II $\quad c_{21}(t) < c_2(t) < c_1(t),$

gdzie:

$$c_j(t) = \frac{1}{q_j(t)}\left(\frac{i}{1-f} + a + wl_j\right), \qquad j = 1, 2, \tag{14}$$

$$c_{21}(t) = \frac{w(l_2 - l_1)}{q_2(t) - q_1(t)}. \tag{15}$$

[2] Dla statycznej funkcji produkcji można je znaleźć w pracy [4]. Wprowadzenie w modelu dynamicznej funkcji produkcji, mimo iż stanowi istotną modyfikację modelu z punktu widzenia jego zastosowań, nie zmienia jednak generalnie postaci rozwiązania, w szczególności nie ma wpływu ani na liczbę, ani na kolejność faz, występujących w rozwiązaniu.

Ostateczna postać strategii alokacji kapitału w każdym wypadku zależy od początkowego zasobu majątku i od długości horyzontu[3].

ad **I.** Technika kapitałochłonna i pracooszczędna jest w fazie zrównoważonego wzrostu bardziej efektywna niż technika kapitałooszczędna i pracochłonna ($c_1(t) < c_2(t) < c_{21}(t)$)

- „Niski" początkowy zasób majątku firmy ($K_0 < \frac{1}{q_1(0)} Q_0$, $Q_0 < \bar{Q}_{21}(0)$) i długi horyzont analizy ($z > \bar{z}$).
  Proces optymalny wyznacza trajektoria $1 \to 2 \to 3 \to 4$. Gdy horyzont ulega skróceniu, faza zrównoważonego wzrostu (ścieżka 4) pierwsza znika w rozwiązaniu, a wraz z dalszym skracaniem horyzontu znikają kolejno ścieżki 3 i 2.
- „Średni" początkowy zasób majątku firmy ($K_0 < \frac{1}{q_1(0)} Q_0$, $Q_0 = \bar{Q}_{21}(0)$) i długi horyzont ($z > \bar{z}$).
  Rozwiązaniem optymalnym jest trajektoria $2 \to 3 \to 4$. Wraz ze skracaniem horyzontu fazy znikają tak jak w poprzednim punkcie.
- „Wysoki" początkowy zasób majątku firmy ($K_0 = \frac{1}{q_1(0)} Q_0$, $\bar{Q}_{21} \leqslant Q_0 < \bar{Q}_1(0)$) i długi horyzont ($z > \bar{z}$).
  Proces optymalny wyznacza dwufazowa trajektoria $3 \to 4$. W krótkim horyzoncie rozwiązanie jest jednofazowe: ścieżka 3.
- „Optymalny" początkowy zasób majątku firmy ($K_0 = \frac{1}{q_1(0)} Q_0$, $Q_0 = \bar{Q}_1(0)$).
  Długość horyzontu nie ma wpływu na postać rozwiązania optymalnego, którym jest rozwój przedsiębiorstwa po ścieżce zrównoważonego wzrostu (ścieżka 4).
- Zasób majątku firmy w momencie początkowym przekracza zasób „optymalny" ($K_0 > \frac{1}{q_1(0)} Q_0$, $Q_0 = \bar{Q}_1(0)$).

---

[3] Krytyczną długość horyzontu ($\bar{z}$) można wyznaczyć dla konkretnej, ustalonej postaci funkcji produkcji (zob. punkt 5). Począwszy od tej długości krytycznej w rozwiązaniu występuje faza zrównoważonego wzrostu.

W sytuacji tej nie jest spełniony warunek (6), zatem nie można sformułować optymalnej strategii alokacji kapitału.

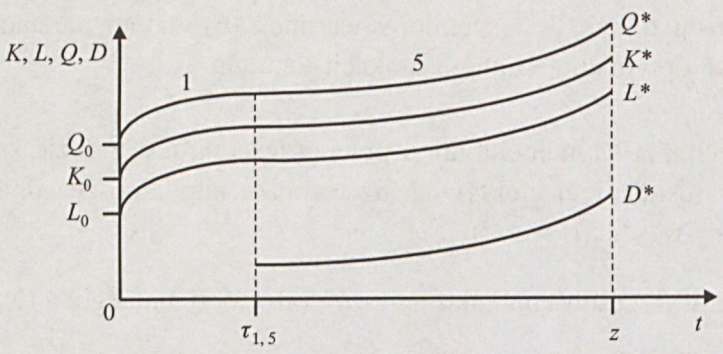
ad **II.** Technika kapitałochłonna i pracooszczędna jest w fazie zrównoważonego wzrostu mniej efektywna niż technika kapitałooszczędna i pracochłonna ($c_{21}(t) < c_2(t) < c_1(t)$)

- Początkowy zasób majątku niższy od „optymalnego" ($K_0 = \frac{1}{q_2} Q_0$, $Q_0 < \bar{Q}_2(0)$) i długi horyzont ($z > \bar{z}$).
  Proces optymalny jest wyznaczony przez trajektorię $1 \to 5$. W krótkim horyzoncie znika faza zrównoważonego wzrostu (ścieżka 5) i rozwiązanie jest jednofazowe.

- „Optymalny" zasób majątku w momencie początkowym ($K_0 = \frac{1}{q_2} Q_0$, $Q_0 = \bar{Q}_2(0)$).
  Rozwój przedsiębiorstwa przebiega wzdłuż magistrali (ścieżka 5) niezależnie od długości horyzontu.

- Początkowy zasób majątku przekracza zasób „optymalny" ($K_0 > \frac{1}{q_2} Q_0$, $Q_0 = \bar{Q}_2(0)$).
  Nie można sformułować strategii optymalnej, gdyż nie jest spełniony warunek (6).

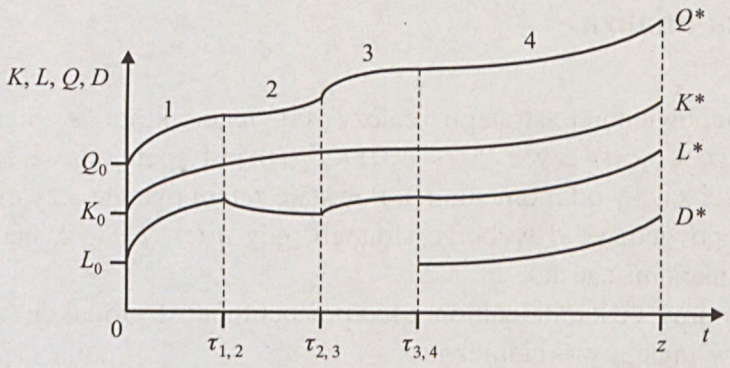
W obu przypadkach, wychodząc z określonego przez sytuację majątkową stanu początkowego, firma dąży do osiągnięcia ścieżki zrównoważonego wzrostu. W zasadzie firma rozpoczyna proces produkcyjny przy wykorzystaniu techniki kapitałooszczędnej i pracochłonnej w zakładzie 2 (inaczej jest jedynie wtedy, gdy technika kapitałochłonna i pracooszczędna generuje w fazie zrównoważonego wzrostu najniższe koszty krańcowe, a firma dysponuje w momencie początkowym wystarczającym zasobem majątku, aby rozpocząć produkcję opartą na tej technice). Krańcowy zysk netto jest w tej początkowej fazie wyższy niż oczekiwana przez akcjonariuszy stopa zwrotu kapitału ($\frac{\partial ZN}{\partial K} > i$), a krańcowy przychód przekracza krańcowy koszt produkcji. Korzystne jest zatem dla firmy zwiększanie produkcji oraz majątku i zatrudnienia. W momencie $\tau_{1,2}(\tau_{1,5})$ następuje



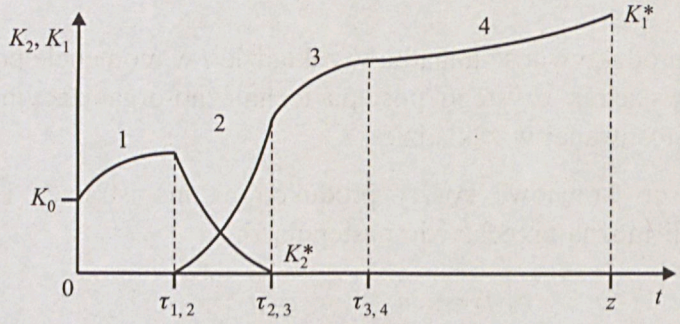
Rys. 1. Optymalne trajektorie majątku firmy, zatrudnienia, produkcji i dywidendy – rozwiązanie zadania z funkcją produkcji (21) w przypadku początkowego zasobu majątku niższego od optymalnego i długiego horyzontu, gdy $c_{21}(t) < c_2(t) < c_1(t)$

zrównanie krańcowego przychodu z krańcowym kosztem produkcji. Jeżeli firma ma możliwość zastąpienia stosowanej techniki taką, która spowoduje obniżenie krańcowych kosztów produkcji, to następuje faza zmiany technik produkcyjnych. W przeciwnym wypadku, gdy stosowana jest najbardziej efektywna z dostępnych technik produkcji, technika kapitałooszczędna i pracochłonna stosowana jest do końca horyzontu, a w momencie $\tau_{1,5}$ firma osiąga ścieżkę zrównoważonego wzrostu – magistralę.

W fazie reorganizacji procesu produkcyjnego – realokacji kapitału, produkcja prowadzona jest cały czas tak, aby zapewnić równość między krańcowym przychodem ze sprzedaży a krańcowym kosztem produkcji, której wzrost opisuje funkcja $\bar{Q}_{21}(t)$. Zachodzą jednak zmiany w udziale majątku (wzrasta) i zatrudnienia (maleje) w tworzeniu produktu. Od momentu $\tau_{2,3}$ produkcja prowadzona jest wyłącznie w zakładzie 1, opierając się na technice kapitałochłonnej i pracooszczędnej. Podobnie jak w fazie początkowej, krańcowy przychód ze sprzedaży przekracza krańcowy koszt wytwarzania, a krańcowy zysk netto jest nadal wyższy niż wymagana stopa zwrotu kapitału ($\frac{\partial ZN}{\partial K} > i$). Tak długo, jak spełnione są te warunki, trwa faza intensywnego wzrostu, cała nadwyżka finansowa przeznaczana jest na inwestycje. W momencie $\tau_{3,4}$ następuje zrównanie krańcowego przychodu z krańcowym kosztem produkcji, a firma wchodzi w fazę zrównoważonego wzrostu i pozostaje na tej ścieżce do końca horyzontu.



Rys. 2. Optymalne trajektorie majątku firmy, zatrudnienia, produkcji i dywidendy – rozwiązanie zadania z funkcją produkcji (21) w przypadku „niskiego" początkowego zasobu majątku niższego od optymalneego i długiego horyzontu, gdy $c_1(t) < c_2(t) < c_{21}(t)$



Rys. 3. Optymalne trajektorie majątku firmy w zakładzie 1 oraz w zakładzie 2 w przypadku „niskiego" początkowego zasobu majątku i długiego horyzontu, gdy $c_1(t) < c_2(t) < c_{21}(t)$

W obu wypadkach fazę zrównoważonego wzrostu – magistralę, charakteryzuje równość między krańcowym zyskiem netto a oczekiwaną przez akcjonariuszy stopą zwrotu kapitału (warunek $\frac{\partial ZN}{\partial K} = i$). Część nadwyżki finansowej przeznaczana jest na wypłatę dywidendy $(D^*(t) = CF(K^*(t), s^*(t), t) - aK^*(t))$, część na inwestycje, które pozwalają na reprodukcję majątku $(I^*(t) = aK^*(t))$.

4. Dalsza analiza

Wybór odpowiedniej strategii zależy od tego, która z nierówności ($c_1(t) < c_2(t) < c_{21}(t)$ czy $c_{21}(t) < c_2(t) < c_1(t)$) jest spełniona, a spełnienie nierówności zależy od momentu (t). Powstaje zatem pytanie, czy można coś bliższego powiedzieć o wyborze strategii, gdy $q_j(t)$, $j = 1, 2$, będą określonymi funkcjami czasu?

Przyjmijmy, że kapitałochłonność i pracochłonność produkcji w każdym z zakładów maleją wykładniczo:

$$\frac{1}{q_j(t)} = \frac{1}{q_j} e^{-\nu_j t} \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \tag{16a}$$

$$\frac{l_j}{q_j(t)} = \frac{l_j}{q_j} e^{-\nu_j t} \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \tag{16b}$$

gdzie:

q_j – produktywność majątku w zakładzie j w momencie początkowym,
ν_j – wskaźnik czystego postępu techniczno-organizacyjnego techniki stosowanej w zakładzie j.

Wówczas krańcowe koszty produkcji na magistralach i w fazie reorganizacji można przedstawić następująco:

$$c_1(t) = c_1 e^{-\nu_1 t}, \quad c_2(t) = c_2 e^{-\nu_2 t}, \tag{17a}$$

$$c_{21}(t) = \frac{w(l_2 - l_1)}{q_2 e^{-\nu_2 t} - q_1 e^{-\nu_1 t}}, \tag{17b}$$

gdzie

$$c_1 = \frac{1}{q_1}\left(\frac{i}{1-f} + a + wl_1\right), \quad c_2 = \frac{1}{q_2}\left(\frac{i}{1-f} + a + wl_2\right)$$

i oznaczają jednostkowe koszty produkcji na magistralach przy zerowym postępie techniczno-organizacyjnym.

Na wybór strategii ma zatem wpływ relacja między kosztami jednostkowymi na magistralach i w fazie reorganizacji przy zerowym postępie techniczno-organizacyjnym (c_j, $j = 1, 2, 21$) oraz wskaźnikami postępu techniczno-organizacyjnego (ν_j, $j = 1, 2$).

Możliwe są cztery przypadki[4]:

A	$c_1 < c_2 < c_{21}$	oraz	$v_1 > v_2$,
B	$c_1 < c_2 < c_{21}$	oraz	$v_1 < v_2$,
C	$c_{21} < c_2 < c_1$	oraz	$v_1 < v_2$,
D	$c_{21} < c_2 < c_1$	oraz	$v_1 > v_2$.

Zgodnie z założeniem kapitałochłonność i pracochłonność produkcji w każdym z zakładów są malejącymi funkcjami czasu. Z własności tych funkcji wynika, że (o ile $v_1 \neq v_2$) można wyznaczyć punkty, w których następuje zrównanie pracochłonności i kapitałochłonności w obu zakładach. Gdy współczynniki postępu techniczno-organizacyjnego są sobie równe ($v_1 = v_2$), wtedy nie mają wpływu na wybór strategii, zatem dalej będziemy zakładać, że $v_1 \neq v_2$.

Oznaczmy moment wyrównania kapitałochłonności w obu zakładach ($\frac{1}{q_1(t)} = \frac{1}{q_2(t)}$), o ile on istnieje, przez $\tilde{\tau}$, wówczas z (16a)[5]:

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{v_2 - v_i} \ln \frac{q_1}{q_2}. \tag{18}$$

Niech $\bar{\tau}$ oznacza moment wyrównania pracochłonności ($\frac{l_1}{q_1(t)} = \frac{l_2}{q_2(t)}$), jeżeli ono zachodzi, z (16b) otrzymamy:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{v_2 - v_1} \ln \frac{l_2}{q_2} \cdot \frac{q_1}{l_1}. \tag{19}$$

Ponadto zmianie ulegają koszty krańcowe produkcji na magistralach. Niech $\hat{\tau}$ oznacza punkt ich zrównania ($c_1(t) = c_2(t)$), o ile nastąpi, zatem na mocy (17a):

$$\hat{\tau} = \frac{1}{v_2 - v_1} \ln \frac{c_2}{c_1}. \tag{20}$$

[4] Zob. s. 144, Dodatek 1.

[5] Gdy wartość wyrażenia $\frac{1}{v_2 - v_1} \ln \frac{q_1}{q_2}$ jest niedodatnia, wówczas oznacza to, że zrównanie kapitałochłonności nigdy nie nastąpi i punkt $\tilde{\tau}$ nie istnieje. Analogiczna uwaga dotyczy punktów $\bar{\tau}$ oraz $\hat{\tau}$.

ad. **A.** Technikę kapitałochłonną i pracooszczędną charakteryzują najniższe jednostkowe koszty produkcji na magistrali przy zerowym postępie techniczno-organizacyjnym oraz wyższy współczynnik postępu techniczno-organizacyjnego ($c_1 < c_2 < c_{21}$ i $v_1 > v_2$).

Horyzont analizy trzeba podzielić na dwa podprzedziały $[0, \tilde{\tau})$ i $[\tilde{\tau}, z]$. Każdy z nich będziemy rozpatrywać oddzielnie. Na przedziale $[0, \tilde{\tau})$ spełniona jest nierówność $c_1(t) < c_2(t) < c_{21}(t)$, zatem strategią optymalną jest strategia typu **I**[6]. W momencie $\tilde{\tau}$ następuje zrównanie kapitałochłonności, technika stosowana w zakładzie 1 staje się techniką kapitało- i pracooszczędną i taką pozostaje do końca horyzontu. Na przedziale $[\tilde{\tau}, z]$ pod obiema względami lepsza jest technika stosowana w zakładzie 1 i to właśnie ona powinna być stosowana do końca horyzontu.

ad. **B.** Technikę kapitałochłonną i pracooszczędną charakteryzują najniższe jednostkowe koszty produkcji na magistrali przy zerowym postępie techniczno-organizacyjnym, ale jednocześnie niższy współczynnik postępu techniczno-organizacyjnego ($c_1 < c_2 < c_{21}$ oraz $v_1 < v_2$).

Horyzont analizy dzielimy na trzy podprzedziały $[0, \hat{\tau})$, $[\hat{\tau}, \bar{\tau})$ oraz $[\bar{\tau}, z]$. Na przedziale $[0, \hat{\tau})$ spełniona jest nierówność $c_1(t) < c_2(t) < c_{21}(t)$, zatem strategią optymalną jest strategia typu **I**. Na przedziale $[\hat{\tau}, \bar{\tau})$ zachodzi warunek $c_{21}(t) < c_2(t) < c_1(t)$, co implikuje optymalność strategii typu **II**[7]. W momencie $\bar{\tau}$ następuje zrównanie pracochłonności, technika stosowana w zakładzie 2 staje się techniką kapitało- i pracooszczędną i taką pozostaje do końca horyzontu. Na przedziale $[\bar{\tau}, z]$ jest ona techniką optymalną.

ad. **C.** Technikę kapitałochłonną i pracooszczędną charakteryzują najwyższe jednostkowe koszty produkcji na magistrali przy zerowym postępie techniczno-organizacyjnym oraz niższy współczynnik postępu techniczno-organizacyjnego ($c_{21} < c_2 < c_1$ oraz $v_1 < v_2$).

W tym wypadku horyzont dzielimy na dwa podprzedziały $[0, \bar{\tau})$ i $[\bar{\tau}, z]$. W obu przedziałach jest spełniona nierówność $c_{21}(t) < c_2(t) < c_1(t)$. Strategią optymalną w całym horyzoncie jest strategia typu **II**.

ad. **D.** Technikę kapitałochłonną i pracooszczędną charakteryzują najwyższe jednostkowe koszty produkcji na magistrali przy zerowym postępie techniczno-organizacyjnym, ale i wyższy współczynnik postępu techniczno-organizacyjnego ($c_{21} < c_2 < c_1$ oraz $v_1 > v_2$).

Ustalony horyzont jest tu dzielony na trzy podprzedziały $[0, \hat{\tau})$, $[\hat{\tau}, \tilde{\tau})$ oraz $[\tilde{\tau}, z]$. Na przedziale $[0, \hat{\tau})$ spełniona jest nierówność

---

[6] Charakterystykę strategii typu **I** zawiera punkt 3.

[7] Strategia typu **II** została scharakteryzowana w punkcie 3.

$c_{21}(t) < c_2(t) < c_1(t)$, zatem strategią optymalną jest strategia typu **II**. Na przedziale $[\hat{\tau}, \tilde{\tau})$ zachodzi warunek $c_1(t) < c_2(t) < c_{21}(t)$, co implikuje optymalność strategii typu **I**. Moment $\tilde{\tau}$ to punkt zrównania kapitałochłonności, technika stosowana w zakładzie 1 staje się techniką kapitało- i pracooszczędną. Na przedziale $[\tilde{\tau}, z]$, tak jak w punkcie A, rozwiązanie jest trywialne, optymalna jest technika stosowana w zakładzie 1.

Jak można łatwo zauważyć, szczegółowa strategia w każdym z przypadków zależy od położenia punktów $\tilde{\tau}$, $\bar{\tau}$, $\hat{\tau}$ oraz od długości horyzontu z. W szczególnym przypadku będzie ona przeprowadzona w punkcie 6.

5. Przypadek szczególny zadania

5.1. Optymalne ścieżki zmiennych w procesie zrównoważonego wzrostu

Przyjmijmy w zadaniu (7)-(8) funkcję przychodu ze sprzedaży postaci:

$$S(Q) = p_0 \sqrt{\frac{Q_0}{Q(t)}}\, Q(t), \tag{21}$$

gdzie:

p_0 – cena jednostkowa produktu w momencie początkowym,
Q_0 – wielkość produkcji w momencie początkowym.

Konkretna postać funkcji przychodu umożliwia wyznaczenie optymalnych ścieżek produkcji, majątku i zatrudnienia $Q^*(t)$, $K^*(t)$, $L^*(t)$, w zależności od stałych wartości i parametrów modelu.

Z charakterystyki ścieżek i warunków koniecznych optymalności (11) wynika, iż:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial Q}\right|_{Q=\bar{Q}_j} = c_j(t) \quad \text{dla } j = 1, 2, 21, \tag{22}$$

gdzie $c_j(t)$, $j = 1, 2, 21$, oznacza marginalne koszty produkcji na magistralach i w fazie reorganizacji, opisane równościami (14)-(15).

Podstawiając pochodną wybranej funkcji przychodu $S(Q)$ do zależności (22), po uwzględnieniu (1)-(2), (14)-(15) otrzymujemy następujące rozwiązania:

dla ścieżki 2:

$$\bar{Q}_{21}(t)=\frac{1}{4}Q_0\frac{p_0^2(q_2e^{\nu_2 t}-q_1e^{\nu_1 t})^2}{w^2(l_2-l_1)^2}, \tag{23}$$

dla ścieżki 4:

$$\bar{Q}_1(t)=\frac{1}{4}Q_0\frac{p_0^2q_1^2}{\left(\frac{i}{1-f}+a+wl_1\right)^2}e^{2\nu_1 t}, \tag{24}$$

$$\bar{K}_1(t)=\frac{1}{4}K_0\frac{p_0^2q_1^2}{\left(\frac{i}{1-f}+a+wl_1\right)^2}e^{2\nu_1 t}, \tag{25}$$

$$\bar{L}_1(t)=\frac{1}{4}L_0\frac{p_0^2q_1^2}{\left(\frac{i}{1-f}+a+wl_1\right)^2}e^{2\nu_1 t}, \tag{26}$$

dla ścieżki 5:

$$\bar{Q}_2(t)=\frac{1}{4}Q_0\frac{p_0^2q_2^2}{\left(\frac{i}{1-f}+a+wl_2\right)^2}e^{2\nu_2 t}, \tag{27}$$

$$\bar{K}_2(t)=\frac{1}{4}K_0\frac{p_0^2q_2^2}{\left(\frac{i}{1-f}+a+wl_2\right)^2}e^{2\nu_2 t}, \tag{28}$$

$$\bar{L}_2(t)=\frac{1}{4}L_0\frac{p_0^2q_2^2}{\left(\frac{i}{1-f}+a+wl_2\right)^2}e^{2\nu_2 t}, \tag{29}$$

Zauważmy, że optymalne strategie alokacji kapitału prowadzą do zrównoważonego wzrostu produkcji, majątku i zatrudnienia ze stałą stopą $2\nu_j$, $j=1, 2$, lecz na różnych poziomach.

5.2. Wyznaczanie pozostałych ścieżek wzrostu i punktów przełączania

I. $c_1(t)<c_2(t)<c_{21}(t)$

- Ścieżka 1

Produkcja skoncentrowana jest w zakładzie 2. Ścieżki wzrostu produkcji, majątku i zatrudnienia otrzymamy, rozwiązując równanie (4) z uwzględnieniem charakterystyki fazy:

$$Q^*(t)=Q_2^*(t)=\left(\frac{C_1}{C_2+2\nu_2}e^{\nu_2 t}+\left(Q_0^{\frac{1}{2}}-\frac{C_1}{C_2+2\nu_2}\right)e^{-\frac{1}{2}C_2 t}\right)^2 \quad \text{dla } t\in[0,\tau_{1,2}), \quad (30)$$

a także odpowiednio (na mocy (9)-(10) i charakterystyki ścieżki):

$$K^*(t)=K_2^*(t)=\frac{1}{q_2}\left(\frac{C_1}{C_2+2\nu_2}e^{\nu_2 t}+\left(Q_0^{\frac{1}{2}}-\frac{C_1}{C_2+2\nu_2}\right)e^{-\frac{1}{2}C_2 t}\right)^2 \quad \text{dla } t\in[0,\tau_{1,2}), \quad (31)$$

oraz:

$$L^*(t)=L_2^*(t)=\frac{l_2}{q_2}\left(\frac{C_1}{C_2+2\nu_2}e^{\nu_2 t}+\left(Q_0^{\frac{1}{2}}-\frac{C_1}{C_2+2\nu_2}\right)e^{-\frac{1}{2}C_2 t}\right)^2 \quad \text{dla } t\in[0,\tau_{1,2}), \quad (32)$$

gdzie:

$$C_1=(1-f)p_0\sqrt{Q_0}q_2, \qquad C_2=(1-f)(wl_2+a).$$

Funkcje $Q^*(t)$, $K^*(t)$, $L^*(t)$ są wklęsłymi, rosnącymi funkcjami czasu ($\frac{dQ}{dt}>0$, $\frac{dK}{dt}>0$, $\frac{dL}{dt}>0$, $\frac{d^2Q}{dt^2}<0$, $\frac{d^2K}{dt^2}<0$, $\frac{d^2L}{dt^2}<0$).

• Punkt $\tau_{1,2}$

Punkt $\tau_{1,2}$ jest pierwiastkiem równania:

$$Q^*(\tau_{1,2})=\bar{Q}_{21}(\tau_{1,2}), \quad (33)$$

gdzie funkcja $Q^*(t)$ ma postać (30), a funkcja $\bar{Q}_{21}(t)$ postać (23). Momentu tego nie można wyznaczyć analitycznie.

• Ścieżka 2

Postać funkcji produkcji na tej ścieżce opisuje warunek (23), natomiast równanie ścieżki majątku zakładu 2 ($K_2^*(t)$) jest pierwiastkiem przekształconego zgodnie z charakterystyką fazy równania (4):

$$\dot{K}_2(t)=C_3e^{\nu_1 t}+C_4e^{\nu_2 t}+C_5(t)K_2(t), \quad (34)$$

gdzie:

$$C_3=\frac{1}{4}Q_0\frac{p_0^2q_2(1-f)}{w^2(l_2-l_1)}\left(\frac{3\nu_1}{1-f}-a+wl_1-2wl_2\right)=\text{const},$$

$$C_4=\frac{1}{4}Q_0\frac{p_0^2q_2(1-f)}{w^2(l_2-l_1)}\left(\frac{\nu_1-2\nu_2}{1-f}+a+wl_1\right)=\text{const},$$

$$C_5(t)=-(1-f)\left(a+w\frac{l_2q_1e^{\nu_1 t}-l_1q_2e^{\nu_2 t}}{q_1e^{\nu_1 t}-q_2e^{\nu_2 t}}\right)+\frac{q_2(\nu_2-\nu_1)e^{\nu_2 t}}{q_1e^{\nu_1 t}-q_2e^{\nu_2 t}}.$$

• Punkt $\tau_{2,3}$

Jest to moment zakończenia reorganizacji procesu produkcyjnego. Następuje całkowite zaniechanie produkcji w zakładzie 2. Moment $\tau_{2,3}$ jest pierwiastkiem równania:

$$K_2^*(\tau_{2,3})=0, \tag{35}$$

przy czym funkcja $K_2^*(t)$ jest pierwiastkiem równania (34).

• Ścieżka 3

Podobnie jak dla ścieżki 1, ścieżki wzrostu otrzymamy rozwiązując, po koniecznych przekształceniach, równanie (4):

$$Q^*(t)=Q_1^*(t)=\left(\frac{C_6}{C_7+2\nu_1}e^{\nu_1(t-\tau_{2,3})}+\left((\bar{Q}_{21}(\tau_{2,3}))^{\frac{1}{2}}-\frac{C_6}{C_7+2\nu_1}\right)e^{-\frac{1}{2}C_6(t-\tau_{2,3})}\right)^2 \tag{36}$$

dla $t\in[\tau_{2,3},\tau_{3,4})$

a także odpowiednio:

$$K^*(t)=K_1^*(t)=\frac{1}{q_1}\left(\frac{C_6}{C_7+2\nu_1}e^{\nu_1(t-\tau_{2,3})}+\left((\bar{Q}_{21}(\tau_{2,3}))^{\frac{1}{2}}-\frac{C_6}{C_7+2\nu_1}\right)e^{-\frac{1}{2}C_6(t-\tau_{2,3})}\right)^2 \tag{37}$$

dla $t\in[\tau_{2,3},\tau_{3,4})$,

gdzie:

$$C_6=(1-f)(p_0\sqrt{Q_0}q_1), \qquad C_7=(1-f)(wl_1+a).$$

Ścieżkę wzrostu zatrudnienia otrzymujemy z (37) uwzględniając (3).

Funkcje $Q^*(t)$, $K^*(t)$, $L^*(t)$ są wklęsłymi, rosnącymi funkcjami czasu $(\frac{dQ}{dt}>0, \frac{dK}{dt}>0, \frac{dL}{dt}>0, \frac{d^2Q}{dt^2}<0, \frac{d^2K}{dt^2}<0, \frac{d^2L}{dt^2}<0)$.

• Punkt $\tau_{3,4}$

Punkt $\tau_{3,4}$ to moment, w którym produkcja, majątek firmy i zatrudnienie osiągają ścieżkę zrównoważonego wzrostu, jest on pierwiastkiem równania:

$$Q_1^*(\tau_{3,4}) = \bar{Q}_1(\tau_{3,4}), \tag{38}$$

gdzie funkcja $Q_1^*(t)$ jest opisana wzorem (36), a funkcja $\bar{Q}_1(t)$ ma postać (24).

Optymalna trajektoria „wchodzi" na magistralę, gdy długość horyzontu przekroczy pewną wartość krytyczną $\bar{z}$. Dla rozważanego zadania – w przypadku, gdy $c_1(t) < c_2(t) < c_{21}(t)$ – jest to:

$$\bar{z} = \tau_{3,4}, \tag{39}$$

gdzie $\tau_{3,4}$ wyznaczamy z (38).

II. $c_{21}(t) < c_2(t) < c_1(t)$

• Ścieżka 1
Wzrost produkcji, majątku i zatrudnienia opisują równania (30), (31) i (32).

• Punkt $\tau_{1,5}$
Moment $\tau_{1,5}$ jest pierwiastkiem równania:

$$Q_2^*(\tau_{1,5}) = \bar{Q}_2(\tau_{1,5}), \tag{40}$$

gdzie funkcja $Q_2^*(t)$ ma postać (30), a funkcja $\bar{Q}_2(t)$ postać (25). Dla zadania 1 – w przypadku, gdy $c_{21}(t) < c_2(t) < c_1(t)$ – krytyczną długością horyzontu jest:

$$\bar{z} = \tau_{1,5} \tag{41}$$

gdzie $\tau_{1,5}$ wyznaczamy z (40).

6. Optymalna strategia alokacji na przykładzie Przedsiębiorstwa Cukierniczego S.A.[8]

Spółka Przedsiębiorstwo Cukiernicze S.A. jest firmą z blisko osiemdziesięcioletnią tradycją. Jako spółka akcyjna powstała w wyniku prywatyzacji państwowego Przedsiębiorstwa Przemysłu Cukierniczego w 1993 roku. Obecnie w skład Przedsiębiorstwa wchodzi pięć zakładów produkcyjnych. Pod względem wdrożonych technologii, zainstalowanych linii produkcyjnych oraz organizacji produkcji spółka należy do grupy

[8] Do obliczeń wykorzystano dane publikowane w rocznych raportach Spółki. Ze względu na brak dostępu do danych o wysokości wynagrodzeń, przyjęto do obliczeń średnie wynagrodzenie publikowane przez ZUS.

najnowocześniejszych w branży cukierniczej w Polsce. Firma oferuje szeroki, stale doskonalony wachlarz asortymentowy. Ustawicznie prowadzone są działania, podnoszące wydajność pracy i kapitału oraz zmniejszające pracochłonność produkcji.

Za początek okresu analizy przyjmiemy 1 stycznia 2001 roku. Początkowy zasób majątku i zatrudnienie w Przedsiębiorstwie Cukierniczym S.A. wynoszą odpowiednio $K_0 = 136\,990$ tys. zł, $L_0 = 1078$ osób. Początkowa wielkość produkcji i przychód ze sprzedaży kształtują się na poziomach: $Q_0 = 19\,181$ t/r., $S(Q_0) = 160\,369$ tys. zł/r. Ustalmy dziesięcioletni horyzont analizy ($z = 10$). Pozostałe parametry przyjmują następujące wartości:

$a = 0{,}15$ (stopa deprecjacji),

$w = 2062{,}69$ zł/mies. (przeciętne wynagrodzenie miesięczne),

$f = 0{,}28$ (stawka podatku od osób prawnych).

Przy danych początkowych wartościach K_0, Q_0 i $S(Q_0)$ oraz dla $m = 0{,}5$ (współczynnik materiałochłonności) możemy wyznaczyć: $p_0 = 16\,721{,}65$ (średnia jednostkowa cena sprzedaży tony produktu w momencie początkowym)[9].

Przyjmijmy ponadto $\nu_2 = 0{,}02$ (współczynnik postępu techniczno-organizacyjnego) i niech $i = 0{,}08$ (wymagana stopa zwrotu kapitału).

Parametry charakteryzujące stosowaną technikę produkcyjną w momencie początkowym:

$$\frac{1}{q_2(0)} = 7141{,}96 \text{ (kapitałochłonność produkcji)},$$

$$\frac{l_2}{q_2(0)} = 0{,}0562 \text{ (pracochłonność produkcji)}.$$

Rozważymy cztery warianty możliwych zmian technologicznych[10] i sformułujemy optymalne strategie produkcyjne, będące konsekwencją wyboru odpowiednich technik.

A. Pierwszy wariant zmiany techniki produkcyjnej wymaga zaangażowania majątku o wartości 140 292 tys. zł oraz zatrudnienia 998 pracowników. Nową technikę charakteryzują w momencie początkowym następujące parametry: $\frac{1}{q_1(0)} = 7329{,}65$ (kapitałochłonność), $\frac{l_1}{q_1(0)} = 0{,}0534$ (pracochłonność), $\nu_1 = 0{,}03$ (współczynnik postępu techniczno-organizacyjnego).

[9] Zob. s. 145, Dodatek 2.

[10] Wartości majątku i zatrudnienia potrzebne w produkcji opartej na alternatywnej technice wytwarzania są hipotetyczne.

Technika ta jest więc pracooszczędna i kapitałochłonna w większym stopniu niż technika stosowana aktualnie, generuje niższe jednostkowe koszty produkcji przy zerowym postępie techniczno-organizacyjnym ($c_1 < c_2 < c_{21}$) i w szybszym tempie ulega ulepszeniom ($\nu_1 > \nu_2$).

Postać optymalnej strategii zależy od długości horyzontu (z). Z warunku (39) widzimy, że krytyczna długość horyzontu, po przekroczeniu której w rozwiązaniu pojawia się faza zrównoważonego wzrostu, to $\tilde{z} = 2{,}65$ roku. Jeżeli horyzont jest krótszy, fazy znikają zgodnie z regułą opisaną w punkcie 3.

Z (18) wyznaczamy punkt $\tilde{\tau} = 2{,}6$ r., dzielący horyzont na dwa okresy: $[0, \tilde{\tau}) = [0; 2{,}6)$ i $[\tilde{\tau}, z] = [2{,}6; 10]$. Analiza położenia punktów przełączenia ($\tau_{1,2} = 1{,}1$ r.; $\tau_{2,3} = 1{,}11$ r.; $\tau_{3,4} = 2{,}65$ r., zob. odpowiednio (33), (35), (38)) wskazuje, iż strategia optymalna jest czterofazowa (trajektoria $1 \to 2 \to 3 \to 4$).

Po upływie około roku należy dokonać zmiany techniki produkcyjnej. Zakład 2 produkujący według początkowej techniki – kapitałooszczędnej i pracochłonnej – należy zamknąć, dokonując dyslokacji kapitału oraz pracy na rzecz zakładu 1. W zakładzie 1 produkcja oparta jest na technice kapitałochłonnej i pracooszczędnej. Modelowa faza reorganizacji procesu produkcyjnego jest dla tego przedsiębiorstwa bardzo krótka, zmiana jest właściwie natychmiastowa. Następnie, po trwającym około półtora roku intensywnym wzroście, rozpoczyna się faza zrównoważonego wzrostu, w której produkcja, majątek i zatrudnienie rosną ze stałą stopą na poziomie 6%. W fazie tej wypłacana jest dywidenda akcjonariuszom w wysokości 85% nadwyżki finansowej.

Czas trwania poszczególnych faz w strategii dziesięcioletniej oraz ich charakterystykę prezentuje tabela:

Faza 1 1 rok 1 miesiąc	Faza 2 4 dni	Faza 3 1 rok 6 miesięcy	Faza 4 7 lat 3 miesiące
wzrost, produkcja w zakładzie 2	reorganizacja procesu produkcyjnego	wzrost, produkcja w zakładzie 1	zrównoważony wzrost ze stopą 6%, produkcja w zakładzie 1, dywidenda

Wnioski

Zmiany w zakresie stosowanych technik produkcyjnych zwiększą wartość spółki z punktu widzenia akcjonariuszy. Spółka Przedsiębiorstwo Cukiernicze S.A. powinna uwzględnić następujące cele strategiczne:

- zmiana struktury produkcji po około roku – kapitałochłonny i pracooszczędny kierunek zmian,
- wypłata dywidendy, począwszy od trzeciego roku.

B. W drugim wariancie przyjmujemy, przy niezmienionych parametrach kapitałochłonności ($\frac{1}{q_1(0)}=7329{,}65$) i pracochłonności ($\frac{l_1}{q_1(0)}=0{,}0534$) proponowanej techniki, niższy współczynnik postępu techniczno-organizacyjnego: $v_1=0{,}01$.

Proponowana „nowa" technika jest więc pracooszczędna i kapitałochłonna w większym stopniu niż technika stosowana aktualnie, generuje niższe jednostkowe koszty produkcji przy zerowym postępie techniczno-organizacyjnym ($c_1<c_2<c_{21}$), ale wolniej poddaje się modernizacjom ($v_1<v_2$).

Z warunku (41) można odczytać, iż w tym wypadku krytyczna długość horyzontu, po przekroczeniu której w rozwiązaniu pojawia się faza zrównoważonego wzrostu, to $\bar{z}=5$ lat. Dla krótszego horyzontu fazy znikają zgodnie z regułą opisaną w punkcie 3.

Z (19) i (20) wyznaczamy punkty $\hat{\tau}=0{,}63$ r. i $\bar{\tau}=5{,}12$ r., dzielące horyzont na trzy okresy: $[0, \hat{\tau})=[0; 0{,}63)$, $[\hat{\tau}, \bar{\tau})=[0{,}63; 5{,}12)$ i $[\bar{\tau}, z]=[5{,}12; 10]$. Położenie punktu przełączenia ($\tau_{1,5}=5$ lat, zob. (40)) oznacza, że strategię optymalną wyznacza trajektoria dwufazowa $1 \rightarrow 5$.

Przez pięć lat trwa okres intensywnego wzrostu, produkcja prowadzona jest w zakładzie 2 na podstawie techniki początkowej – kapitałooszczędnej i pracochłonnej. Po tym czasie zostaje osiągnięta faza zrównoważonego wzrostu z dodatnią dywidendą (wynoszącą 85% nadwyżki finansowej) i stałą 4% stopą wzrostu produkcji, majątku i zatrudnienia.

Czas trwania poszczególnych faz w dziesięcioletniej strategii oraz ich charakterystykę zawiera tabela:

Faza 1 5 lat	Faza 2 5 lat
wzrost, produkcja w zakładzie 2	zrównoważony wzrost ze stopą 4%, produkcja w zakładzie 2, dywidenda

Wnioski

Zmiana struktury produkcji nie wpłynie korzystnie na wartość spółki z punktu widzenia akcjonariuszy. Spółka Przedsiębiorstwo Cukiernicze S.A. powinna rozważyć poniższe cele strategiczne:

- zachowanie struktury produkcji,
- wypłata dywidendy, począwszy od szóstego roku.

C. Trzeci wariant zmiany techniki produkcyjnej wymaga zaangażowania majątku o wartości 143 492 tys. zł oraz zatrudnienia 1028 pracowników. Nową technikę charakteryzują w momencie początkowym następujące parametry: $\frac{1}{q_1(0)} = 7496{,}48$ (kapitałochłonność), $\frac{l_1}{q_1(0)} = 0{,}0536$ (pracochłonność), $\nu_1 = 0{,}01$ (współczynnik postępu techniczno-organizacyjnego).

Parametry wskazują, że technika ta jest kapitałochłonna i pracooszczędna w większym stopniu niż technika stosowana aktualnie, ale generuje wyższe jednostkowe koszty produkcji przy zerowym postępie techniczno-organizacyjnym ($c_{21} < c_2 < c_1$) i wolniej się ulepsza ($\nu_1 < \nu_2$).

Krytyczna długość horyzontu w trzecim wariancie to $\bar{z} = 2{,}70$, zgodnie z (41). Krótsze horyzonty podlegają tym samym prawom, co podane w punktach **A** i **B**.

Z (19) obliczamy położenie momentu $\bar{\tau} = 4{,}75$ r., dzielącego horyzont na dwa okresy: $[0, \bar{\tau}) = [0; 4{,}75)$ i $[\bar{\tau}, z] = [4{,}75; 10]$. Położenie punktu przełączenia ($\tau_{1,5} = 2{,}70$ r., zob. (40)) oznacza, że optymalną strategię wyznacza dwufazowa trajektoria $1 \to 5$, tak jak w punkcie **B**. Zmianie ulegają długości faz, lecz stała pozostaje kolejność ich występowania. Nieznacznemu skróceniu ulega faza dochodzenia do magistrali (trwa tu około dwóch lat i trzech kwartałów) na rzecz fazy zrównoważonego wzrostu ze stopą 4%.

Tabela ukazuje charakterystykę poszczególnych faz w strategii dziesięcioletniej oraz czas ich trwania:

Faza 1 2 lata 8 miesięcy	Faza 2 7 lat 4 miesiące
wzrost, produkcja w zakładzie 2	zrównoważony wzrost ze stopą 4%, produkcja w zakładzie 2, dywidenda

Wnioski

Maksymalną wartość spółki z punktu widzenia akcjonariuszy zapewni aktualna struktura produkcji. Cele strategiczne Przedsiębiorstwa Cukierniczego S.A. nie odbiegają od tych, które zostały przedstawione w punkcie **B**. Zmianie ulega tylko nieznacznie czas ich realizacji.

D. W czwartym, ostatnim wariancie przyjmujemy, przy niezmienionych parametrach kapitałochłonności ($\frac{1}{q_1(0)} = 7496{,}48$) i pracochłonności ($\frac{l_1}{q_1(0)} = 0{,}0536$) „nowej" techniki, wyższy współczynnik postępu techniczno-organizacyjnego: $\nu_1 = 0{,}03$.

„Nowej" technice towarzyszą wyższe jednostkowe koszty produkcji przy zerowym postępie techniczno-organizacyjnym ($c_{21} < c_2 < c_1$), ale w szybszym tempie ulega modernizacjom ($\nu_1 > \nu_2$).

W czwartym przypadku krytyczną długość horyzontu wyznaczamy z (39) i wynosi ona $\bar{z} = 2{,}95$, krótszymi horyzontami rządzi ta sama reguła, co w poprzednich punktach.

Położenie punktów $\hat{\tau}$ i $\tilde{\tau}$, dzielących horyzont na podokresy, wyznaczamy z (18) i (20). Otrzymujemy trzy przedziały: $[0, \hat{\tau}) = [0; 0{,}86)$, $[\hat{\tau}, \tilde{\tau}) = [0{,}86; 4{,}84)$ oraz $[\tilde{\tau}, z] = [4{,}84; 10]$.

Analizując położenie punktów przełączenia ($\tau_{1,2} = 1{,}70$ r.; $\tau_{2,3} = 1{,}71$ r.; $\tau_{3,4} = 2{,}95$ r., zob. odpowiednio (33), (35), (38)), zauważamy, iż strategia optymalna jest czterofazowa, wyznaczona przez trajektorię $1 \to 2 \to 3 \to 4$, tak jak w punkcie **A**.

Nieznacznie zmieniają się długości faz, lecz stała pozostaje kolejność ich występowania. Skróceniu ulega faza dochodzenia do magistrali (o około 5 miesięcy), lecz opóźnia się moment reorganizacji procesu produkcyjnego (o około 8 miesięcy) i faza reorganizacji jest krótsza o prawie rok. Magistralę cechuje 6% stopa wzrostu.

Charakterystykę poszczególnych faz w strategii dziesięcioletniej oraz czas ich trwania prezentuje tabela:

Faza 1 1 rok 9 miesięcy	Faza 2 4 dni	Faza 3 7 miesięcy	Faza 4 7 lat 8 miesięcy
wzrost, produkcja w zakładzie 2	reorganizacja procesu produkcyjnego	wzrost, produkcja w zakładzie 1	zrównoważony wzrost ze stopą 6%, produkcja w zakładzie 1, dywidenda

Wnioski

Zmiany w zakresie stosowanych technik produkcyjnych zwiększą wartość spółki z punktu widzenia akcjonariuszy. Cele strategiczne Przedsiębiorstwa Cukierniczego S.A. pokrywają się z wytycznymi przedstawionymi w punkcie **A**. Zmienia się jedynie w niewielkim stopniu czas ich realizacji.

7. Podsumowanie

Przedstawione w artykule zagadnienie umożliwia sformułowanie optymalnej strategii alokacji kapitału firmy, prowadzącej działalność produkcyjną w dwóch zakładach. Techniki wytwarzania stosowane w obu zakładach różnią się między sobą wskaźnikami kapitało- i pracochłonności. Analiza rozwiązania zadania prowadzi do dwóch wariantów strategii optymalnych, w zależności od efektywności dostępnych technik produkcyjnych mierzonej poziomem marginalnych kosztów produkcji na ścieżce zrównoważonego wzrostu. Zauważmy, iż generowane przez model efektywne zmiany technologiczne wskazują na pracooszczędny i kapitałochłonny kierunek zmian.

W strategiach długofalowych ujawnia się efekt magistrali. Długość pierwszej fazy (dążenia do magistrali) zależy w istotny sposób od początkowego zasobu majątku (im jest on bliższy zasobowi majątku na ścieżce zrównoważonego wzrostu w chwili początkowej, tym krótsza jest faza dojścia) oraz współczynnika postępu techniczno-organizacyjnego (im wyższy współczynnik, tym krótsza faza). W fazie magistralnej (zrównoważonego wzrostu) krańcowy zysk netto jest równy wymaganej przez akcjonariuszy stopie zwrotu kapitału. Tempo wzrostu majątku, produkcji i zatrudnienia na magistrali jest takie, aby warunek ten był zachowany. W szczególnym przypadku wzrost może odbywać się ze stałą stopą.

W strategiach krótkofalowych rozwiązanie zmierza w kierunku magistrali, lecz jej nie osiąga.

W przypadku gdy w funkcji krańcowego kosztu produkcji na ścieżce zrównoważonego wzrostu można wyróżnić: składnik kosztu jednostkowego przy zerowym postępie techniczno-organizacyjnym (c_j, $j=1, 2, 21$) oraz dodatni składnik postępu ($v_j, j=1, 2$), okazuje się, iż w odpowiednio długim horyzoncie o wyborze optymalnej strategii decyduje tempo, w jakim dana technika ulega modernizacjom, a nie stały czynnik kosztowy.

W części empirycznej, na bazie wyników teoretycznych, została sformułowana strategia optymalna alokacji kapitału dla pewnej polskiej spółki

akcyjnej. Analizie zostały poddane wszystkie możliwe przypadki, co pozwoliło stwierdzić, kiedy zmiany w zakresie stosowanej techniki produkcyjnej zwiększą wartość spółki dla akcjonariuszy. W wariantach **B** i **D** możemy zaobserwować, iż długość horyzontu, niezbędna, aby o wyborze strategii decydował czynnik postępu, jest niewielka i waha się od jednego do ośmiu miesięcy. W wariantach **A** i **D** występuje nierealne z ekonomicznego punktu widzenia, natychmiastowe przesunięcie wszystkich środków produkcji z jednej techniki na drugą, co jest nieuniknioną konsekwencją prostej formy modelu.

Dodatek 1. Szkic analizy szczególnych przypadków z punktu 4

Wybór strategii zależy od tego, która z nierówności $c_1(t)<c_2(t)<c_{21}(t)$ czy $c_{21}(t)<c_2(t)<c_1(t)$ jest spełniona. Przeanalizujemy warunki spełnienia każdej z nierówności, gdy $c_j(t)$, $j=1, 2, 21$, są określone wzorem (17). Wówczas:

$$c_1(t)<c_2(t) \Leftrightarrow (v_1-v_2)t>\ln\frac{c_1}{c_2}$$

oraz

$$c_2(t)<c_{21}(t) \Leftrightarrow \frac{-c_1+c_2e^{(v_1-v_2)t}}{\frac{q_2}{q_1}-e^{(v_1-v_2)t}}>0,$$

co dalej oznacza, że

$$c_1(t)<c_{21}(t) \Leftrightarrow \left[(v_1-v_2)t>\ln\frac{c_1}{c_2}\wedge(v_1-v_2)t<\ln\frac{q_2}{q_1}\right]\vee$$

$$\vee\left[(v_1-v_2)t<\ln\frac{c_1}{c_2}\wedge(v_1-v_2)t>\ln\frac{q_2}{q_1}\right].$$

Uwzględniając określenie punktów $\tilde{\tau}$, $\bar{\tau}$, $\hat{\tau}$ (zob. (18), (19), (20)) i relacje między współczynnikami v_1 i v_2, wartościami c_1, c_2 oraz parametrami q_1, q_2, l_1 i l_2, możemy ustalić wybór strategii w każdym z czterech przypadków:

A	$c_1 < c_2 < c_{21}$	oraz	$v_1 > v_2$,
B	$c_1 < c_2 < c_{21}$	oraz	$v_1 < v_2$,
C	$c_{21} < c_2 < c_1$	oraz	$v_1 < v_2$,
D	$c_{21} < c_2 < c_1$	oraz	$v_1 > v_2$.

Dodatek 2. Wyznaczenie parametrów funkcji przychodu

Znając wartości początkowe K_0, $Q_0 = Q(K_0, 0)$ i $S(Q_0)$, możemy wyznaczyć wartość średniej jednostkowej ceny sprzedaży tony produktu w momencie początkowym (p_0):

$$S(Q_0) = p_0(1-m)\,Q_0,$$

gdzie m to współczynnik materiałochłonności, a pozostałe wielkości zdefiniowane są jak w modelu.

Stąd:

$$p_0 = \frac{S(Q_0)}{(1-m)Q_0}.$$

Literatura

[1] Gomułka S., *Teoria innowacji i wzrostu gospodarczego*, CASE, Warszawa 1998.

[2] Hilten O. van, *Optimal Firm Behaviour in the Context of Technological Progress and a Business Cycle*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 352, Springer, Berlin 1991.

[3] Hilten O. van, Kort P. M., Loon P. J. J. M. van, *Dynamic Policies of the Firm. An Optimal Control Approach*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1993.

[4] Kort P.M., *Optimal Dynamic Investment Policies of a Value Maximizing Firm*, Springer-Verlag, Berlin 1989.

[5] Loon P. J. J. M. van, *A Dynamic Theory of the Firm: Production, Finance and Investment*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 218, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[6] Panek E., *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2000.

[7] Rychłowska-Musiał E., *Optymalne strategie alokacji kapitału między dwa zakłady jednej firmy*, w: *Prace z ekonometrii finansowej*, red. W. Jurek, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2003.

THE INFLUENCE OF TECHNOLOGICAL PROGRESS ON AN OPTIMAL CAPITAL ALLOCATION STRATEGY OF A FIRM

Summary

The paper researches the possibility to apply the optimal control theory to the dynamic theory of the firm. It presents an optimal corporate strategy concerning the optimal capital allocation between two sections of a one firm. An activity analysis is carried out to describe the production process. Due to this analysis the effects of technological progress influence on corporate policy as well as the role of the unit production costs can be thoroughly examined. In all cases the theoretical studies are supported by empirical studies.

Część druga

Matematyka finansowa