Paweł KLIBER
Katedra Ekonomii Matematycznej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

WYCENA OPCJI NA AKCJE W MODELU ZMIENNOŚCI STOCHASTYCZNEJ

1. Modele zmienności stochastycznej

Standardowym modelem wyceny opcji na akcje jest model Blacka-Scholesa (zob. [3]), w którym przyjmuje się, że cena akcji zmienia się zgodnie z geometrycznym ruchem Browna, tj. rozwiązaniem następującego stochastycznego równania różniczkowego:

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t, \tag{1}$$

gdzie S_t oznacza cenę akcji w momencie t, W_t to standardowy proces Wienera, μ jest parametrem trendu (wartością oczekiwaną chwilowej stopy zwrotu), a σ to odchylenie standardowe chwilowej stopy zwrotu. Wielkość σ^2 (wariancję chwilowej stopy zwrotu) nazywa się często *zmiennością* ceny akcji. W modelu Blacka-Scholesa zmienność jest stała. Jednakże wiadomo, że model ten niezbyt dobrze przystaje do rzeczywistości. Pewne obserwowane zjawiska sugerują, że zmienność zmienia się z czasem. Można to zauważyć, na przykład obserwując szacunki dziennej zmienności cen akcji – różnice w poziomie tej wielkości między kolejnymi dniami są zbyt duże, by dały się wytłumaczyć tylko błędami oszacowania. Innym takim zjawiskiem jest znany efekt *volatility smile*, który polega na tym, że zmienność ceny akcji szacowana z cen opcji na podstawie wzoru Blacka-Scholesa (tak zwana *zmienność implikowana*) różni się od zmienności obliczonej na podstawie obserwacji stóp zwrotu akcji (tzw. *zmienności historycznej*), przy czym różnice te są największe przy szacowaniu zmienności na podstawie opcji o najniższych i najwyższych cenach wykonania.

Wykres zmienności implikowanej względem ceny wykonania opcji przybiera charakterystyczny kształt litery U, skąd nazwa tego efektu (np. [11]).

Jak się okazuje, ceny akcji o wiele lepiej opisują modele zmienności stochastycznej, tj. takie, w których zmienność σ_t^2 nie jest stała, ale tworzy pewien proces stochastyczny. Modele te opierają się najczęściej na równaniu (1), ale σ nie jest w nich parametrem, a jeszcze jednym procesem w modelu[1]. Model zmienności stochastycznej ma zatem postać następującego układu równań:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1, \tag{2}$$

$$\sigma_t = f(Y_t), \tag{3}$$

$$dY_t = \alpha(t, Y_t) dt + \beta(t, Y_t) dW_t^2. \tag{4}$$

W powyższym układzie f jest pewną funkcją, przyjmującą wartości dodatnie, a stochastyczne równanie różniczkowe (4) opisuje dynamikę procesu Y, który generuje zmienność ceny akcji. W^1 i W^2 to dwa standardowe procesy Wienera, które mogą być ze sobą skorelowane, a ich współczynnik korelacji wynosi ρ.

Biorąc różne funkcje f oraz różne równania (4) i wartości ρ, otrzymujemy całą klasę modeli. Poniżej przedstawiono najczęściej stosowane modele.

- Model Hulla-White'a (zob. [12]): $\rho = 0, f(y) = \sqrt{y}$,

$$dY_t = aY_t dt + bY_t dW_t^2. \tag{5}$$

  Proces Y_t jest tu geometrycznym ruchem Browna.
- Model Scotta (zob. [23]): $\rho = 0, f(y) = e^y$,

$$dY_t = -\alpha(Y_t - m) dt + \beta dW_t^2. \tag{6}$$

  Proces Y jest więc procesem Ornsteina-Uhlenbecka (zob. [19] lub [25]), który charakteryzuje się własnością powrotu do średniej m.
- Model Steinów (zob. [26]): $\rho = 0$, $f(y) = |y|$, a dynamikę Y opisuje równanie (6).
- Model Balla-Roma (zob. [1]): $\rho = 0, f(y) = \sqrt{y}$,

---

[1] Oczywiście można także proponować inne równania. Inną metodą jest modelowanie całej gospodarki, a następnie wyprowadzenie z tego modelu procesu cen akcji jako procesu równowagi rynkowej. Zob. na przykład [14], [15] lub [16].

$$dY_t = -\alpha(Y_t - m)dt + \beta\sqrt{Y_t}\,dW_t^2. \tag{7}$$

Proces Y jest więc procesem Fellera.

- Model Hestona (zob. [10]): funkcja f i równanie dynamiki Y są takie same jak w modelu Balla-Roma, ale teraz $\rho \neq 0$ (najczęściej przyjmuje się, że $\rho < 0$, tj. że wyższe ceny akcji powodują mniejszą zmienność).

Należy wspomnieć, że przedstawione wyżej modele zostały zaproponowane nie z dlatego, żeby szczególnie realistycznie opisywały przebieg cen akcji, ale raczej ze względu na dobre matematyczne własności i możliwość otrzymania wzorów na ceny instrumentów pochodnych. Jest to szczególnie widoczne w modelu Hulla-Whita, w którym w długim okresie zmienność ceny akcji rośnie do nieskończoności (lub maleje do zera), co trudno uznać za realistyczną cechę.

Jednak dość realistyczny wydaje się model Scotta, który uwzględnia obserwowaną faktycznie własność powrotu zmienności do średniej. Dyskretne wersje tego modelu są używane w ekonometrii przy modelowaniu cen akcji i prognozowaniu zmienności (np. [6] i cytowana tam literatura).

2. Wycena warrantów na podstawie modelu zmienności stochastycznej

Rozważmy pewien instrument pochodny typu europejskiego, którego wypłaty w momencie wykonania T zależą od ceny akcji w tym momencie. Oznaczmy te wypłaty przez $H = h(S_T)$. Przykładem może być europejska opcja kupna o cenie wykonania K, której wypłaty wynoszą

$$H = (S_T - K)^+ = \max\{0, S_T - K\}. \tag{8}$$

Klasycznym problemem z dziedziny finansów jest wycena instrumentu H, czyli odpowiedź na pytanie, jaka powinna być P_0, cena tego instrumentu w momencie 0. Odpowiedź na to pytanie zależy od przyjętego modelu cen akcji.

W modelu Blacka-Scholesa cena wyraża się dobrze znanym wzorem Blacka-Scholesa (zob. [3]). Wzór ten można wyprowadzić, posługując się argumentem replikacyjnym, tj. konstruując portfel złożony z akcji i instrumentu pozbawionego ryzyka, którego wartość końcowa jest równa wypłatom instrumentu H (portfel taki nazywany jest *strategią replikującą*). Wiadomo także, że cena ta jest równa wartości oczekiwanej zdyskontowanych wypłat instrumentu względem jedynej miary martyngałowej w modelu, Q (np. [7], [18], [24]).

W modelu Blacka-Scholesa możliwość łatwej wyceny dowolnego instrumentu pochodnego wynika stąd, że jest to model *zupełny*, tzn. dla każdego instrumentu pochodnego istnieje strategia replikująca, a w modelu istnieje tylko jedna miara martyngałowa.

Modele zmienności stochastycznej są modelami *niezupełnymi* – dla większości instrumentów strategia replikująca nie istnieje, a w modelu istnieje nieskończenie wiele miar martyngałowych. Powstaje zatem pytanie, jak „poprawnie" wycenić instrument pochodny. Wiadomo, że wycena wszystkich instrumentów powinna być zgodna z pewną miarą martyngałową – tj. ceny wszystkich instrumentów muszą być równe wartościom oczekiwanym względem tej miary.

Najczęściej stosowaną metodą jest zatem wybór pewnej miary martyngałowej w modelu, a następnie obliczenie ceny według tej miary. Miarę martyngałową można wybierać tak, aby była w pewien sposób bliska mierze rzeczywistej P. Bliskość tę mierzy się średniokwadratowo (np. [20] lub [22]) lub za pomocą wzajemnej entropii ([4], [27]). Niekiedy, choć trudno to uznać za poprawne metodologicznie, przyjmuje się po prostu taką miarę martyngałową, dla której łatwo otrzymać analityczne wzory wyceny (np. [5]).

Inny sposób polega na sparametryzowaniu zbioru miar martyngałowych za pomocą pewnego procesu stochastycznego nazywanego *premią za ryzyko*. Ceny instrumentów pochodnych wyraża się wówczas za pomocą premii za ryzyko. Aby otrzymać konkretne kwoty, należy przyjąć jakieś założenia na temat tego parametru lub estymować go ekonometrycznie. Można także estymować ten parametr, korzystając z obserwowanych cen instrumentów pochodnych, a następnie wykorzystać go do wyznaczenia cen innych instrumentów. Tę metodę nazywa się *kalibracją* modelu. Zwykle stosuje się ją wtedy, gdy chce się wycenić opcję egzotyczną, przyjmując ceny prostych opcji kupna i sprzedaży (opcji waniliowych) jako dane.

Można łatwo wykazać (np. [8], rozdz. 2), że cena instrumentu H w chwili t w modelu Scotta wynosi

$$P_t = E^{\gamma}[e^{r(t-T)}H], \tag{9}$$

gdzie r jest stopą procentową wolną od ryzyka, a wartość oczekiwaną liczymy względem miary martyngałowej Q^{γ}, której pochodna Radona-Nikodyna względem miary rzeczywistej P wynosi

$$\frac{dQ^{\gamma}}{dP} = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\mu - r}{e^{Y_s}}\right)^2 ds - \int_0^T \frac{\mu - r}{e^{Y_s}} dW_s^1 - \int_0^T \gamma_s dW_s^2 \right]. \tag{10}$$

W powyższym równaniu γ jest premią za ryzyko. Funkcję wyceny $P_t(s,y)$, wyrażającą cenę instrumentu w chwili t w zależności od aktualnej ceny akcji s i aktualnej wartości procesu $Y_t=y$, można także otrzymać, rozwiązując następujące równanie różniczkowe cząstkowe:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}e^{2y}s^2\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}+\frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+r\left(s\frac{\partial P}{\partial s}-P\right)+(\alpha(m-y)-\beta\gamma(t,x,y))\frac{\partial P}{\partial y}=0 \quad (11)$$

z warunkiem brzegowym $P(T,s,y)=h(s)$. Jak łatwo zauważyć, jest to rozszerzenie równania Blacka-Scholesa o wyrażenia związane ze zmianami zmienności oraz premią za ryzyko. Dla $\alpha=\beta=0$ równanie to redukuje się do równania Blacka-Scholesa.

Równania (9)-(11) pozwalają na obliczenie ceny instrumentu pochodnego, ale obliczenia te mogą być bardzo trudne numerycznie. Równanie (9) wskazuje, w jaki sposób można wyznaczyć cenę za pomocą symulacji Monte Carlo. Trzeba w tym celu wygenerować numerycznie dużą liczbę trajektorii rozwiązań następującego układu równań różniczkowych:

$$dS_t=rS_t\,dt+e^{Y_t}S_t\,dW_t^1, \quad (12)$$

$$dY_t=-\alpha(Y_t-m)\,dt+\gamma_t+\beta\,dW_t^2 \quad (13)$$

(posługując się na przykład schematem Eulera i generatorem liczb losowych), a następnie dla każdej trajektorii obliczyć wypłatę instrumentu pochodnego. Cenę instrumentu otrzymamy, biorąc średnią z otrzymanych wypłat. Obliczenia te można uprościć, posługując się wzorem Hulla-Whitea (zob. [12]):

$$P_t(s,y)=E^{\gamma}[P_t^{BS}(s,\bar{\sigma}^2)\,|\,Y_t=y], \quad (14)$$

gdzie $P_t^{BS}(s,\sigma^2)$ jest ceną Blacka-Scholesa w chwili t, jeśli cena akcji w tym momencie wynosi t, a współczynnik zmienności wynosi σ^2. Wielkość $\bar{\sigma}^2$ we wzorze (14) to *zmienność efektywna*, która wynosi

$$\bar{\sigma}^2=\frac{1}{T-t}\int_t^T(e^{Y_t})^2\,dt. \quad (15)$$

Wzór Hulla-Whitea jest poprawny nie tylko w modelu Scotta, ale w każdym modelu zmienności stochastycznej, w którym procesy Wienera W^1 i W^2 nie są ze sobą skorelowane.

Innym sposobem łatego obliczenia ceny jest wykorzystanie równania różniczkowego (11) i aproksymacji jego rozwiązania szeregiem potęgowym względem zmiennej $\sqrt{\varepsilon}=1/\sqrt{\alpha}$. Otrzymuje się wówczas następujący wzór na cenę instrumentu pochodnego (zob. [8], rozdz. 5):

$$P_t \approx P_t^{BS} - (T-t)\left(V_2 s^2 \frac{\partial^2 P^{BS}}{\partial s^2} + V_3 s^3 \frac{\partial^3 P^{BS}}{\partial s^3} \right), \tag{16}$$

gdzie V_2 i V_3 są pewnymi stałymi. Zaletą tego rozwiązania jest to, że stałe V_2 i V_3 można obliczyć na podstawie przebiegu *volatility smile*, bez względu na to, jaki model zmienności stochastycznej generuje ceny akcji. Korzystając ze wzoru (16) można zatem skalibrować model na podstawie obserwowanych cen pewnych instrumentów pochodnych, bez konieczności bezpośredniej estymacji parametrów.

3. Stopy zwrotu akcji notowanych na GPW w świetle modeli zmienności stochastycznej

Aby pokazać, w jaki sposób można zastosować wycenę opcji na podstawie modelu zmienności stochastycznej, przeprowadzono symulację dla instrumentów pochodnych na akcje notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Pod koniec 2004 roku na giełdzie handlowało się warrantami kupna i sprzedaży na indeksy giełdowe i na akcje pojedynczych spółek, a także opcjami na indeksy. Na giełdzie notowane są warranty na akcje spółek wystawiane przez dwóch emitentów – BRE Bank i Beskidzkie Biuro Maklerskie, przy czym pierwszy z nich emituje warranty typu europejskiego, a drugi – warranty typu amerykańskiego. Dalej rozpatrywane są tylko warranty emitowane przez BRE Bank.

Warranty BRE Banku emitowane są w lutym, maju, sierpniu i listopadzie. Serie te mają czteromiesięczny okres wykonania[2]. Warranty mogą być wystawiane na akcje następujących spółek: Agora, Computerland, Dębica, Elektrim, Kable, KHGM, Kredytbank, Optimus, Orbis, Pekao, PKN Orlen, Prokom, Softbank, Świecie, TP SA. W jednej serii emitowane są warranty na akcje tylko

[2] Oprócz tego BRE Bank emituje także serie warrantów sześciomiesięcznych (w trzech cyklach kwartalnych). Te instrumenty nie będą rozpatrywane w tym artykule. Warunki obrotu i emisji, a także opis standardów warrantów można znaleźć na stronie internetowej Giełdy, pod adresem www.gpw.com.pl.

kilku z wymienionych spółek. Pojedynczy warrant daje prawo do kupna lub sprzedaży 10 akcji, przy czym rozliczenie warrantu następuje w gotówce. Wstępna cena warrantów ustalana jest na podstawie wzoru Blacka-Scholesa. Warranty te charakteryzują się bardzo niską płynnością. Transakcje nimi zdarzają się średnio raz na kilka dni.

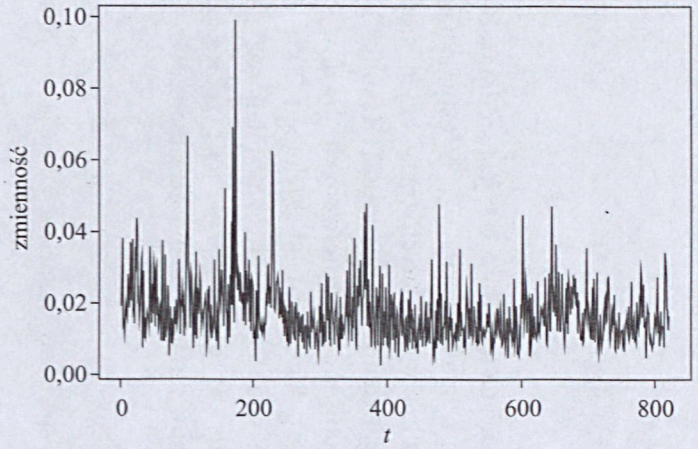
W dalszej części artykułu przeprowadzono symulację, polegającą na próbnej wycenie warrantów kupna z serii, która została wyemitowana w maju 2004 roku[3]. Dniem pierwszego notowania dla warrantów tej serii był 24 maja 2004 roku, a dniem rozliczenia – 17 września 2004 roku. W serii tej zostały wyemitowane jedynie warranty na akcje Elektrimu, PKN Orlen i TP SA. Dla potrzeb omawianego eksperymentu rozważono (nieprawdziwą) sytuację, w której wyemitowano warranty dla wszystkich możliwych spółek, przy czym ceną wykonania warrantów była cena akcji w dniu pierwszego notowania warrantu (tj. $S_0 = K$). Celem jest bowiem hipotetyczne zbadanie możliwości zastosowania modeli wyceny ze zmiennością stochastyczną, a nie wycena konkretnej serii warrantów.

Aby sprawdzić, czy do wyceny warrantów można zastosować modele zmienności stochastycznej, należy upewnić się, czy ceny akcji, na które warranty zostały wystawione, zmieniają się zgodnie z modelem zmienności stochastycznej. W tym celu policzono zmienność dzienną akcji na podstawie danych *intraday*. Jako estymator zmienności w dniu n posłużyła wielkość

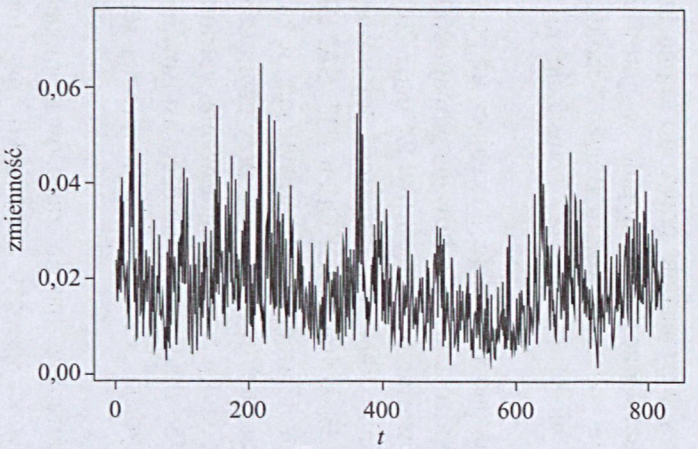
$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n_m} \sum_{i=1}^{n_m} (r_{n,i} - \bar{r}_n)^2, \tag{17}$$

gdzie $r_{n,i}$ jest i-tą stopą zwrotu, zaobserwowaną tego dnia, a $\bar{r}_n$ jest średnią stopą zwrotu tego dnia. Liczba obserwacji tego dnia wynosiła n_m. W estymacjach posłużono się obserwacjami w odstępach półgodzinnych (przy czym stopy zwrotu zostały przeliczone na efektywne, dzienne stopy zwrotu). Rysunki 1-2 przedstawiają wykresy otrzymanych wielkości $\bar{\sigma}_n$ (estymowanych chwilowych odchyleń standardowych dla stóp zwrotu) dla okresu od 20 lutego 2001 do 21 maja 2004 roku. Na rysunkach tych widać wyraźnie, że zmienność cen badanych akcji nie jest stała i nie zmienia się regularnie, ale jej przebieg jest bardzo losowy. Istotne jest zatem stosowanie modeli zmienności stochastycznej do opisu cen tych akcji.

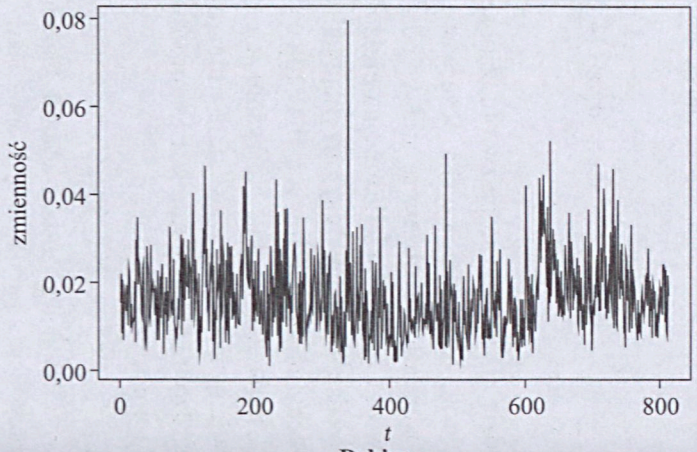
[3] Pominięta została wycena warrantów sprzedaży, ponieważ łatwo ją otrzymać, korzystając z parytetu kupna-sprzedaży.



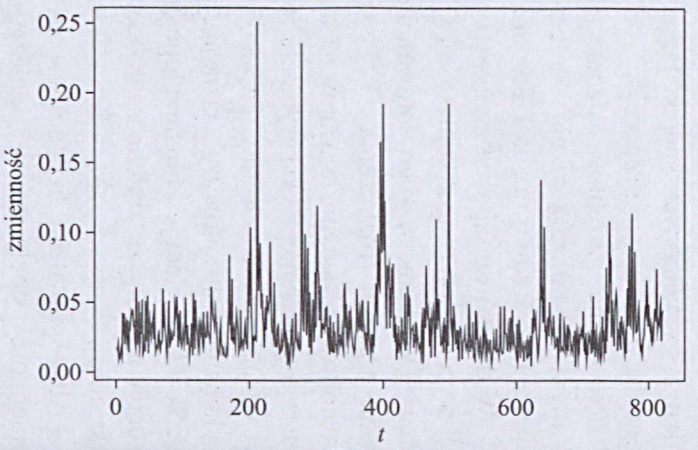
Agora



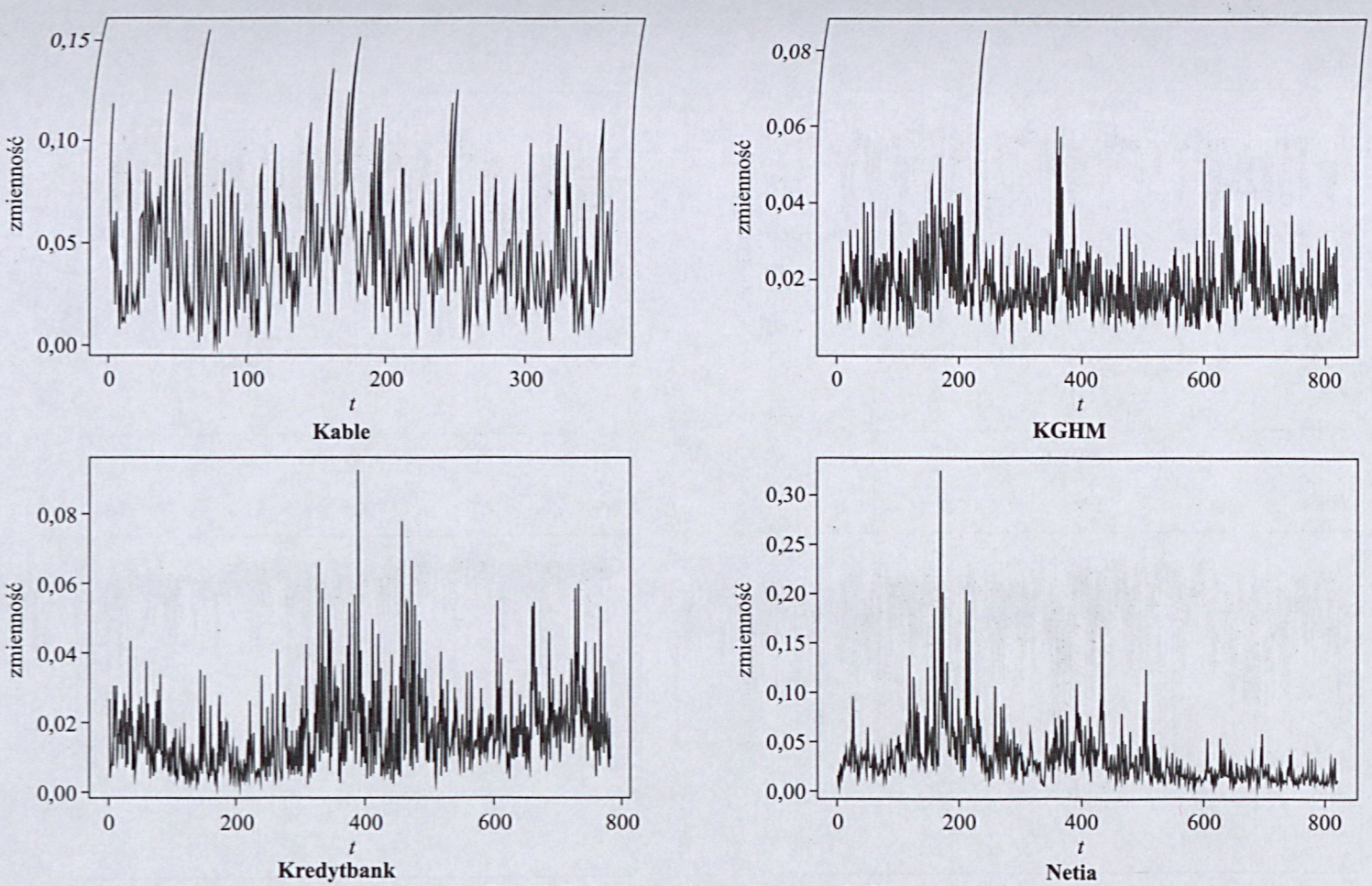
Computerland



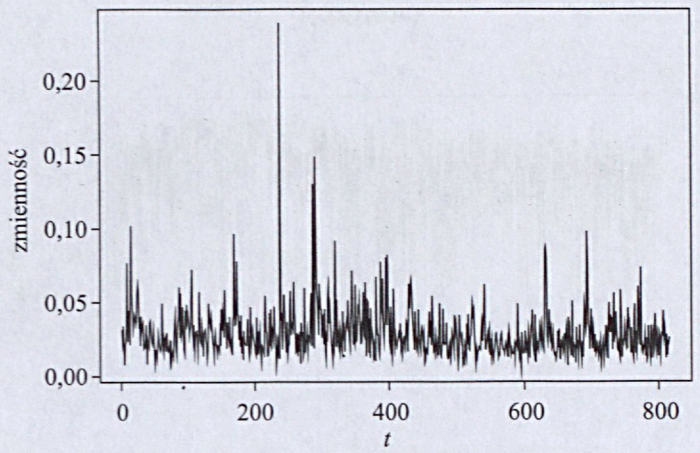
Dębica



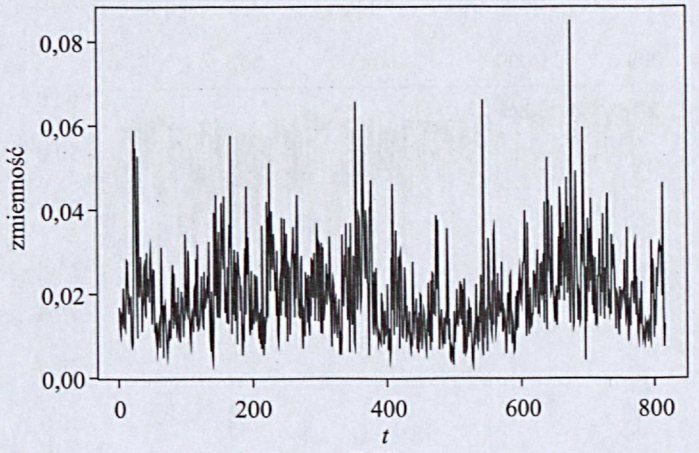
Elektrim



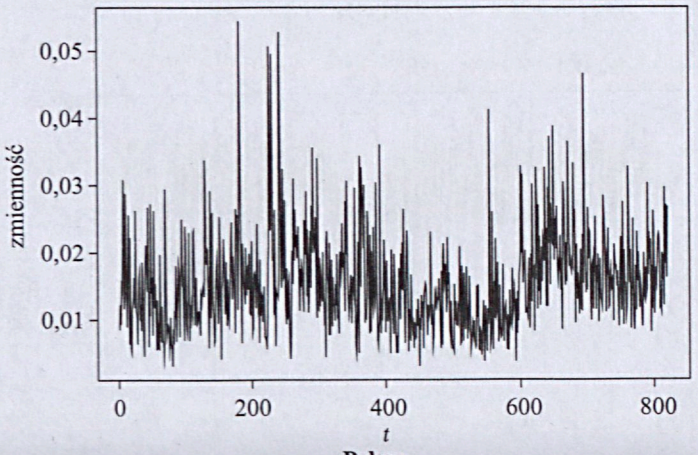
Rys. 1. Dzienna zmienność ceny akcji



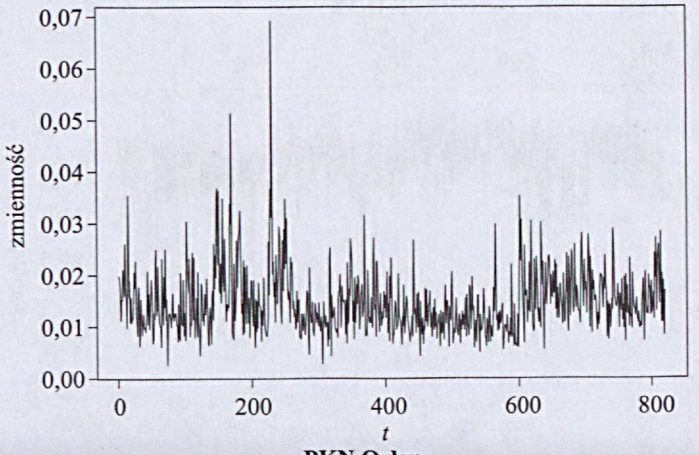
Optimus



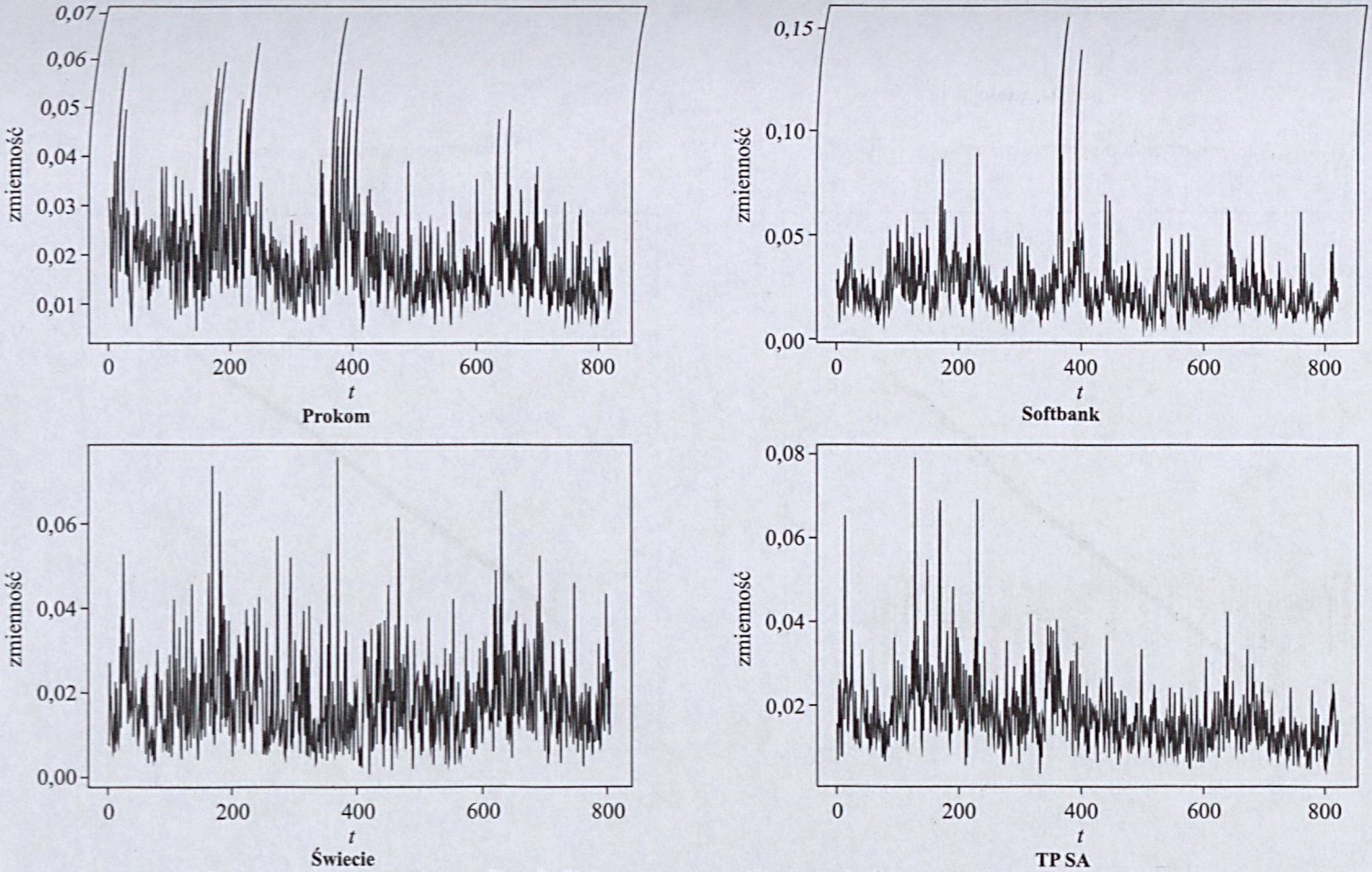
Orbis



Pekao

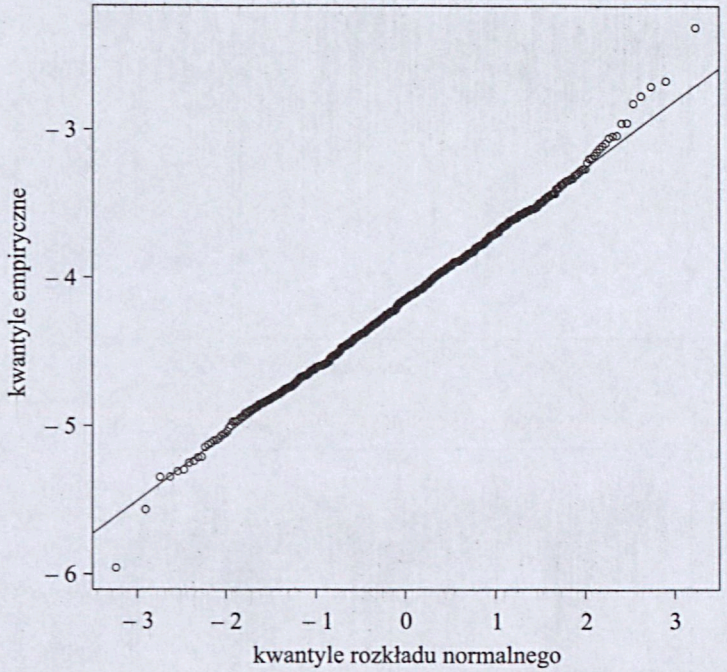


PKN Orlen

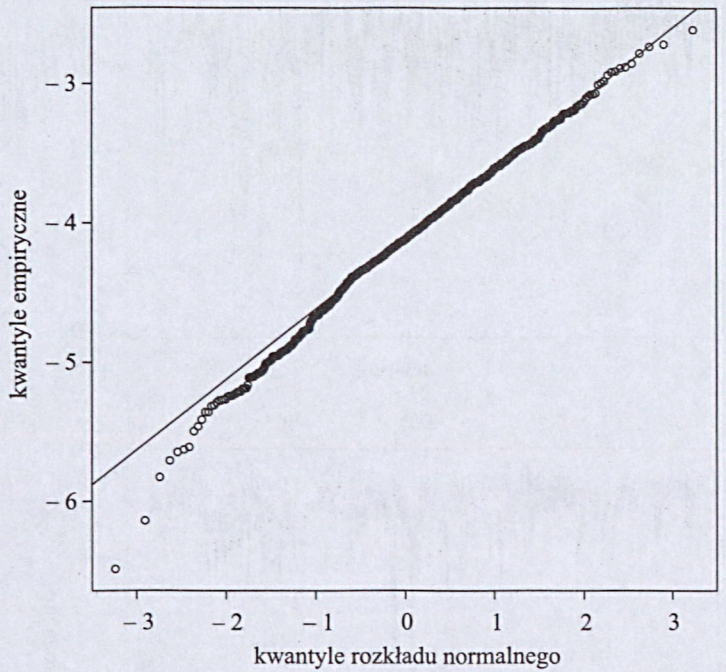


Rys. 2. Dzienna zmienność ceny akcji

Rys. 3a

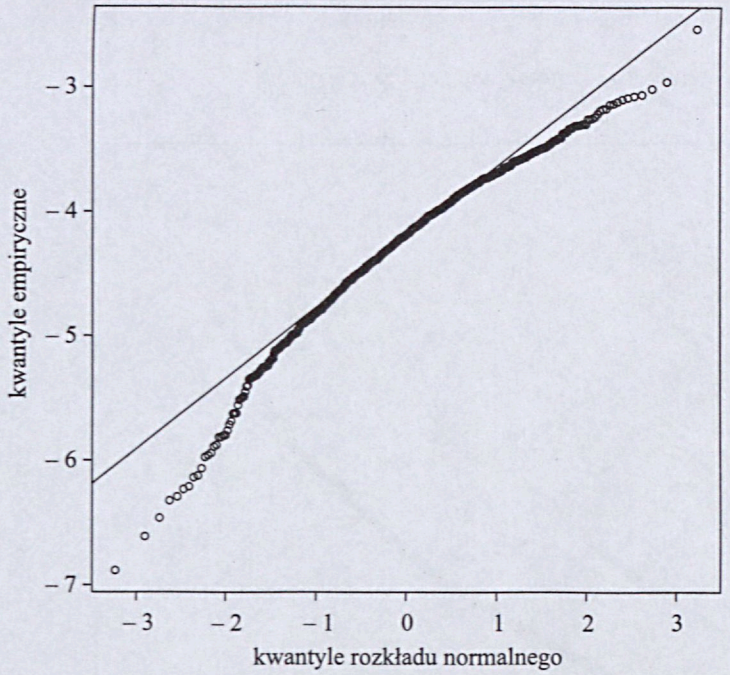


Agora

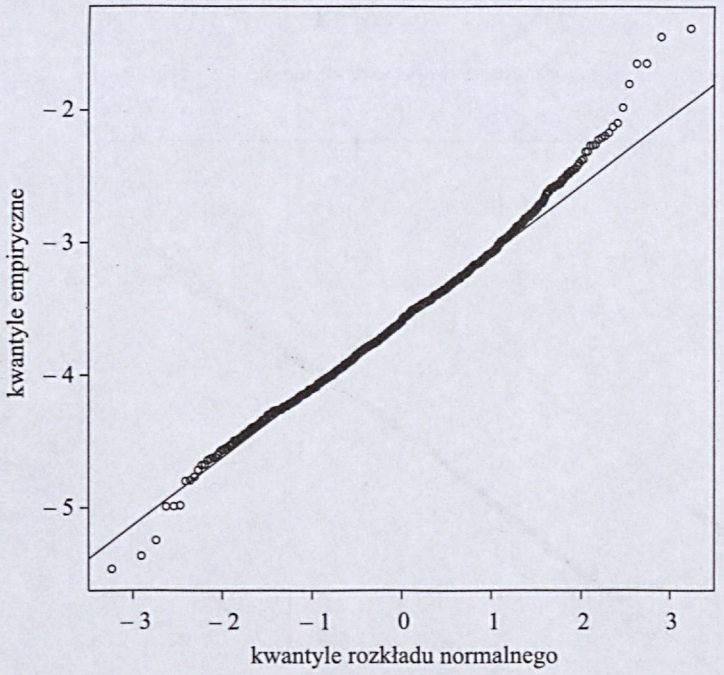


Computerland

Rys. 3b

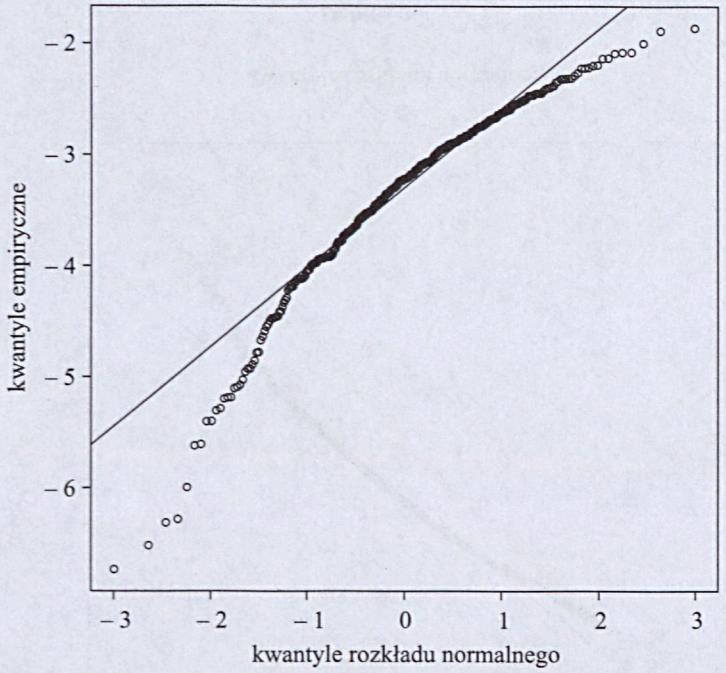


Dębica

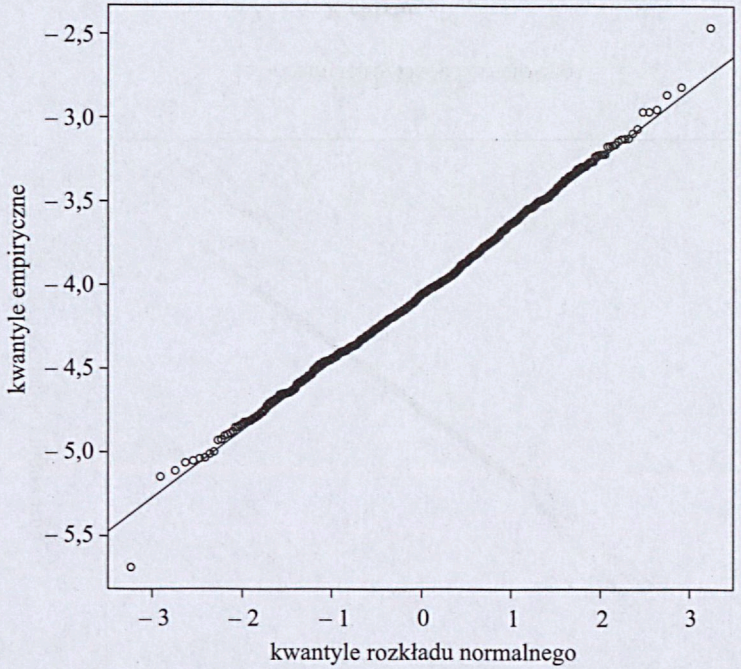


Elektrim

Rys. 3c



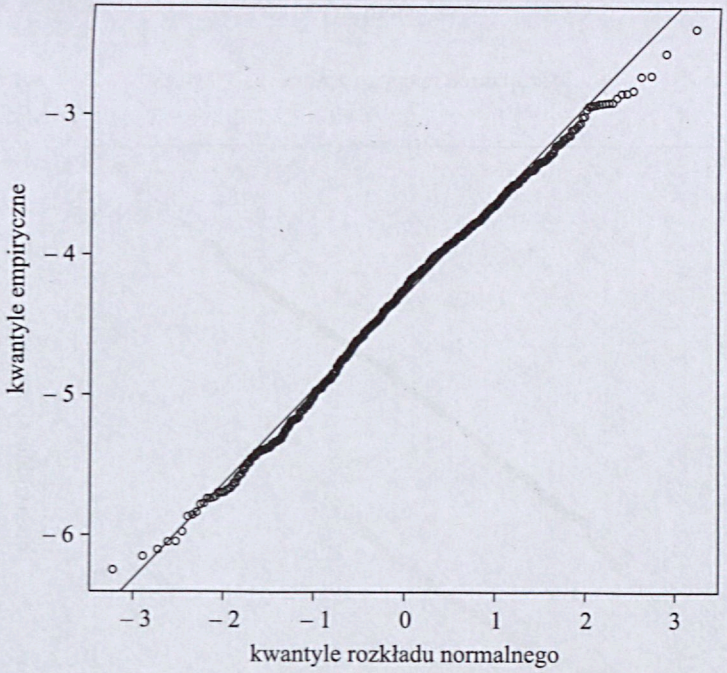
Kable



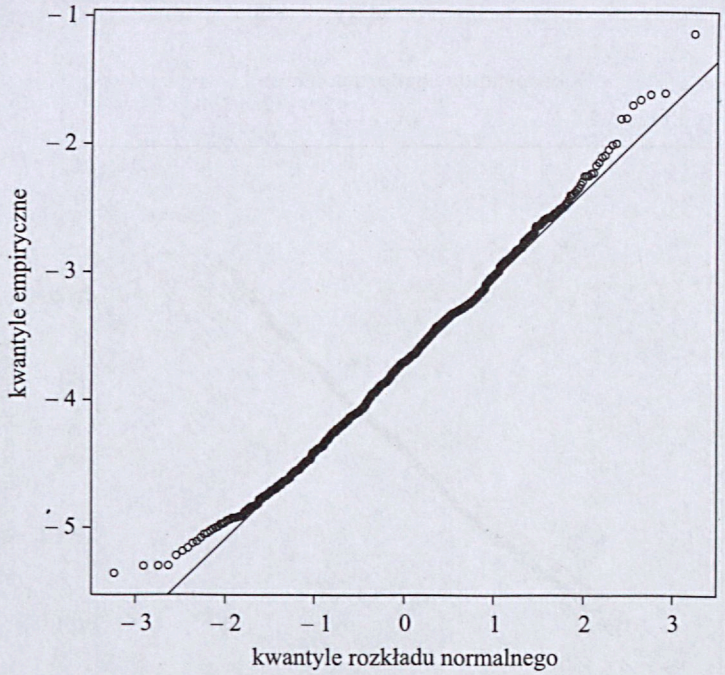
KGHM

Rys. 3a-3c. Wykres kwantyl-kwantyl rozkładu zmienności ceny akcji względem rozkładu normalnego

Rys. 4a

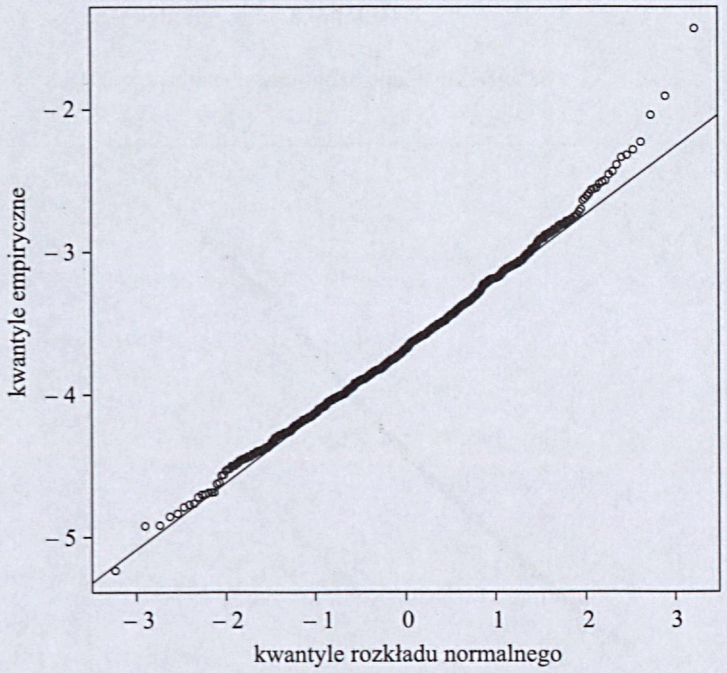


Kredytbank

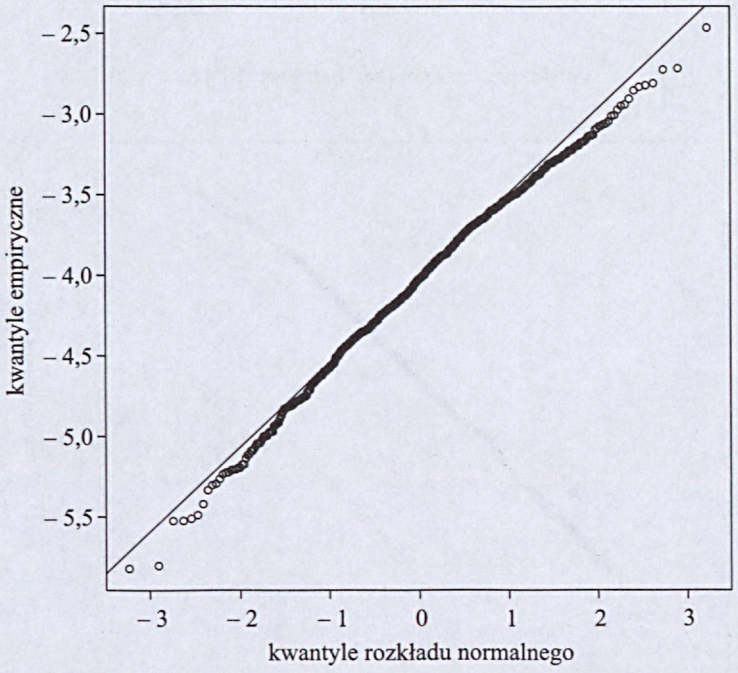


Netia

Rys. 4b

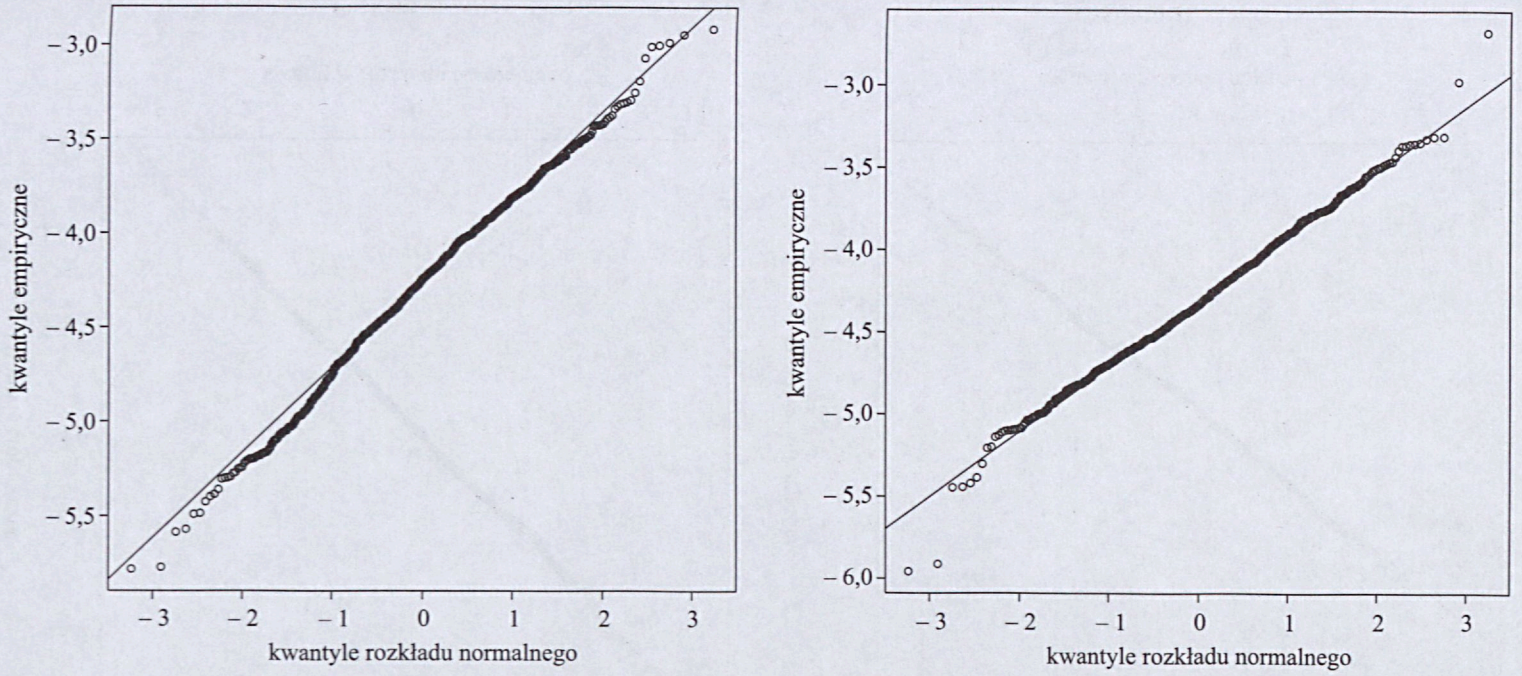


Optimus



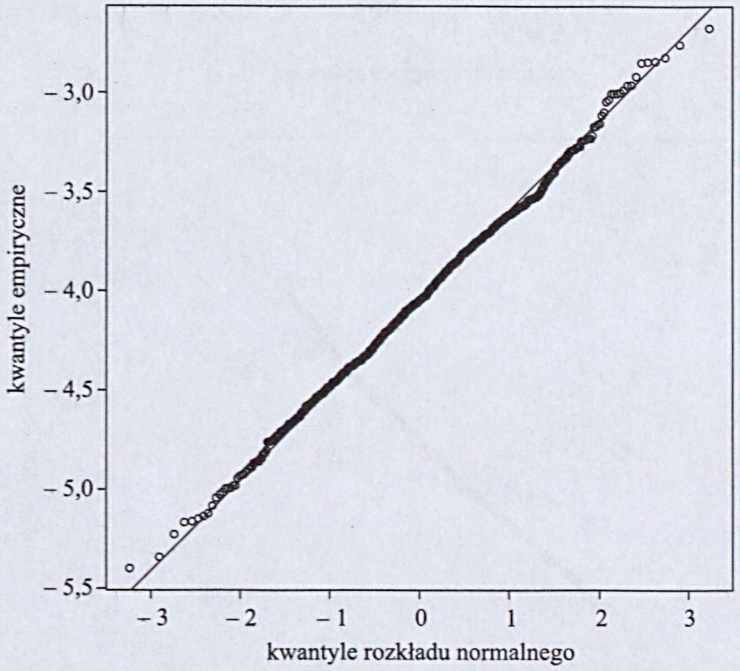
Orbis

Rys. 4c

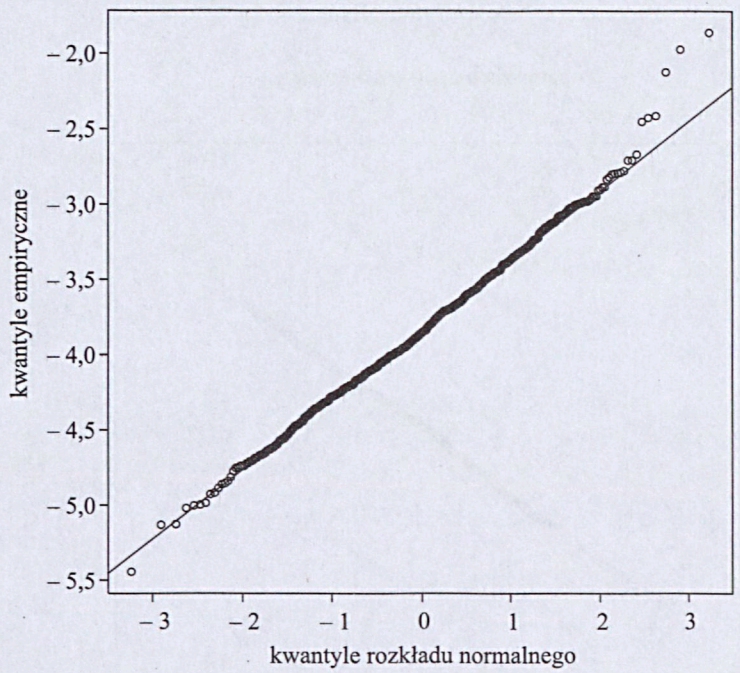


Pekao **PKN Orlen**

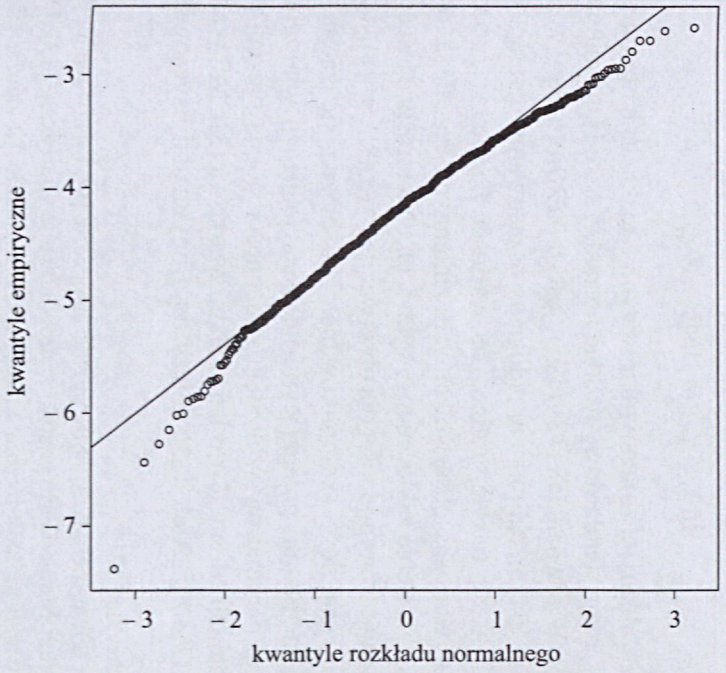
Rys. 4a-4c. Wykres kwantyl-kwantyl rozkładu zmienności ceny akcji względem rozkładu normalnego



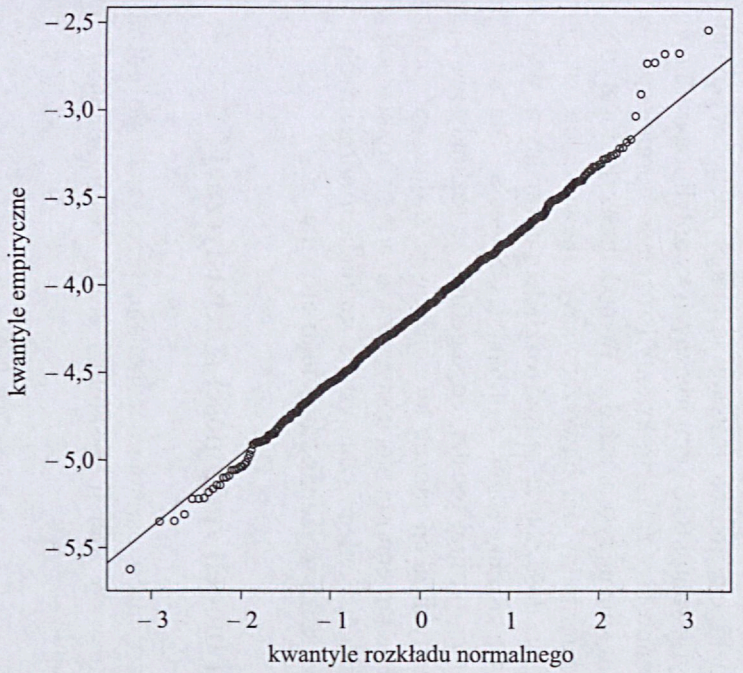
Prokom



Softbank



Świecie



TP SA

Rys. 5. Wykres kwantyl-kwantyl rozkładu zmienności ceny akcji względem rozkładu normalnego

Aby stwierdzić, czy można zastosować model Scotta, wykonaliśmy także wykresy kwantyl-kwantyl (QQ) empirycznych kwantyli logarytmów z zaobserwowanych zmienności względem kwantyli rozkładu normalnego. Wykresy te zostały przedstawione na rysunkach 3-5. W modelu Scotta, logarytmy zmienności mają rozkład normalny. Jak łatwo zauważyć, dla większości akcji logarytmy zmienności dają się dość dobrze opisać rozkładem normalnym. Wyjątkiem są tu akcje Dębicy, Elektrimu, Kabli, Softbanku i Świecia. Dla nich punkty na wykresie odbiegają od linii prostej, co sugeruje, że rozkłady nie są normalne.

W wypadku tych akcji można by spróbować zastosować bardziej skomplikowane modele zmienności stochastycznej, oparte na rozkładach alfa-stabilnych i na procesach Leviego (zamiast na rozkładach normalnych i procesach Wienera)[4]. Przekracza to jednak ramy tego artykułu.

4. Estymacja modeli zmienności stochastycznej

Aby dokonać estymacji paramterów modelu, przekształcono go najpierw do postaci dyskretnej. W wersji dyskretnej stopy zwrotu modelu opisują następujące równania:

$$r_t = h_t \varepsilon_t, \tag{18}$$

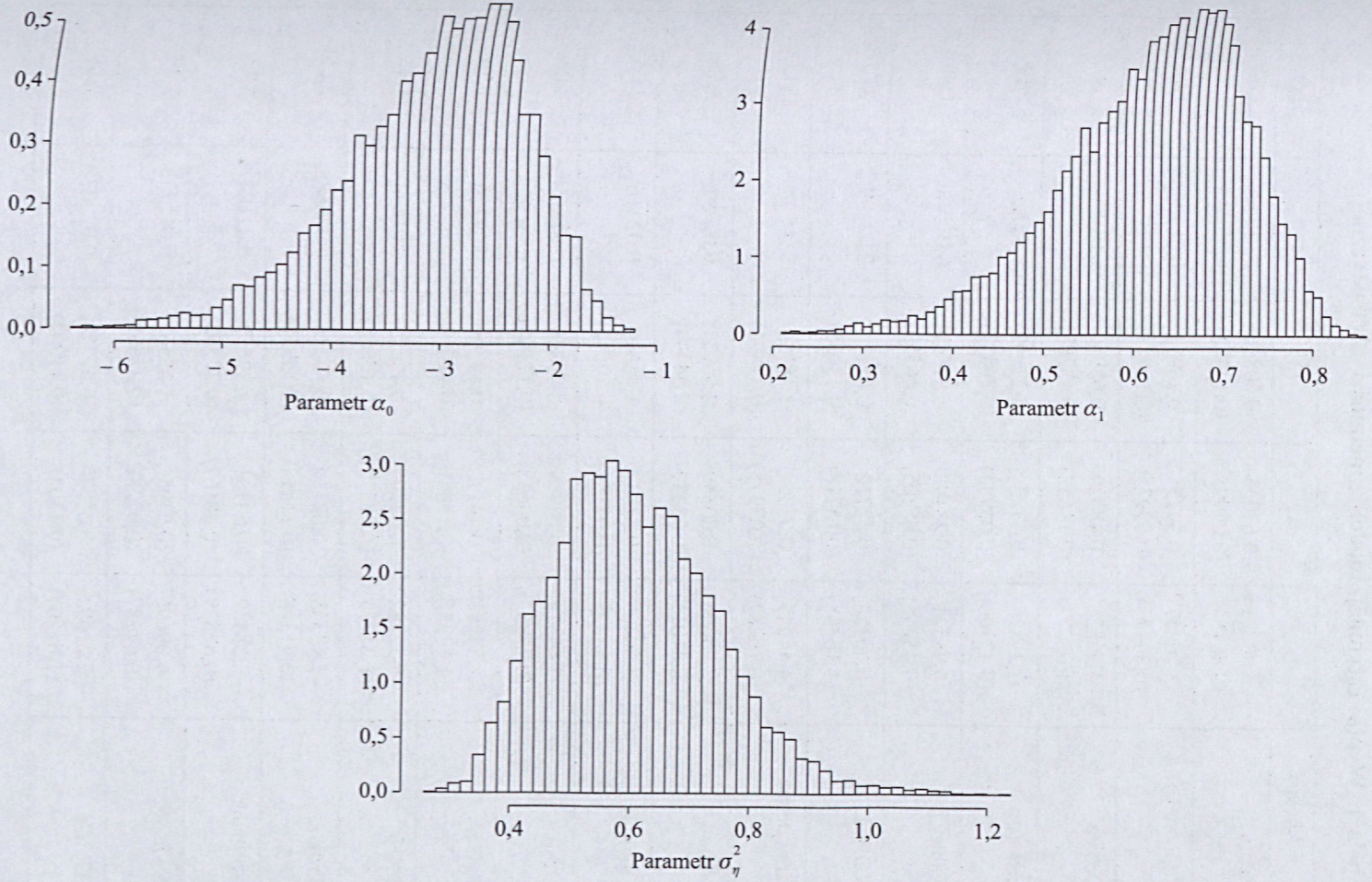
$$\ln h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln h_{t-1} + \eta_t, \tag{19}$$

gdzie ε_t i η_t są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, przy czym zmienne ε_t mają standardowy rozkład normalny $N(0, 1)$, a zmienne η_t mają rozkład $N(0, \sigma_\eta^2)$. W równaniach (18)-(19) r_t jest stopą zwrotu akcji w chwili t po usunięciu trendu. Estymacja modelu polega na oszacowaniu parametrów α_0, α_1 i σ_η^2. Szacunki te są o tyle trudne, że wartości h_t nie są obserwowalne bezpośrednio, a wartości obserwowalnych zmiennych r_t zależą od dwóch, nakładających się na siebie zakłóceń losowych ε_t i η_t. Niemożliwe jest analityczne wyznaczenie funkcji wiarygodności dla obserwacji $\mathbf{r}$, $f(\alpha_0, \alpha_1, \sigma_\eta^2 \mid \mathbf{r})$, a obliczenie jej numerycznie jest dość skomplikowane. Nie można się zatem posłużyć standardowymi metodami, polegającymi na maksymalizacji wiarygodności.

Do estymacji parametrów w modelu zmienności stochastycznej posłużono się metodą symulacji Monte Carlo łańcuchami Markowa (MCMC – ang. *Monte Carlo Markov Chain*)[5]. Metoda ta należy do grupy metod bayesowskich.

[4] Zob. na przykład [21].

[5] Więcej na temat metody MCMC można znaleźć w [9]. Zastosowanie tej metody do estymacji modeli Monte Carlo zostało zaproponowane w artykule [13]. Dokładniejszy opis zastosowanej metody można znaleźć też w rozdziale 10 książki [28].



Rys. 6. Wykres rozkładów *a posteriori* parametrów modelu zmienności stochastycznej dla cen akcji Agory

Tabela 1. Wyniki estymacji modeli zmienności stochastycznej

Akcja	α_0	α_1	σ_η^2	e^m	$1/\alpha$
Agora	−3,06221 (0,80187)	0,62033 (0,0999)	0,60846 (0,13435)	0,01773	2,63
Computerland	−3,26647 (0,80473)	0,5975 (0,09975)	0,76952 (0,15729)	0,01729	2,48
Debica	−4,5682 (1,02077)	0,48029 (0,11632)	0,65956 (0,13708)	0,01234	1,92
Elektrim	−3,29815 (0,43106)	0,5422 (0,05983)	2,27092 (0,26827)	0,02726	2,18
Kable	−5,98541 (0,45255)	0,28198 (0,05206)	6,37669 (0,46559)	0,01548	1,39
KGHM	−6,66354 (1,16368)	0,12712 (0,15218)	0,6117 (0,13035)	0,02199	1,15
Kredytbank	−4,44647 (0,76282)	0,53061 (0,07975)	2,18136 (0,31821)	0,00877	2,13
Netia	−2,95605 (0,41011)	0,60859 (0,05339)	2,56923 (0,34999)	0,02291	2,55
Optimus	−3,66405 (0,5372)	0,51347 (0,07134)	1,45649 (0,19542)	0,02316	2,06
Orbis	−2,66314 (0,77852)	0,67369 (0,09638)	0,49366 (0,11104)	0,0169	3,06
Pekao	−4,54195 (1,12285)	0,4411 (0,1386)	0,49308 (0,12029)	0,01719	1,79
PKN	−5,57382 (1,44214)	0,32268 (0,17578)	0,45655 (0,10858)	0,01633	1,48
Prokom	−2,92338 (0,91348)	0,62316 (0,11815)	0,59348 (0,15947)	0,02068	2,65
Softbank	−3,58439 (0,62829)	0,53131 (0,08167)	1,37157 (0,23392)	0,02184	2,13
Świecie	−4,09696 (0,64787)	0,5395 (0,0728)	1,6556 (0,22808)	0,0117	2,17
TP SA	−2,61693 (1,01264)	0,66524 (0,1305)	0,37955 (0,11904)	0,02007	2,99

Podstawowy pomysł tej metody polega na utworzeniu łańcucha Markowa, którego rozkład stacjonarny jest taki sam jak rozkład *a posteriori* szacowanych parametrów. W omawianym wypadku parametrami będą α_0, α_1 i σ_η^2, a także nieobserwowalne chwilowe zmienności h_t. Zakładamy, że rozkładem *a priori* wektora parametrów $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1)$ jest $N(\mathbf{a}_0, \mathbf{C}_0)$, a $\frac{m\lambda}{\sigma_\eta^2} \sim \chi_m^2$. Metoda MCMC polega na tym, że generujemy zmienne losowe o rozkładach równych warunkowym rozkładom *a posteriori* szacowanych parametrów, przy czym generując zmienną dla jednego parametru zakładamy, że wartości pozostałych parametrów są dane. I tak, zaczynamy od parametrów α. Warunkowym rozkładem *a posteriori* $f(\alpha \mid \mathbf{r}, \mathbf{h}, \sigma_\eta^2)$ jest rozkład normalny o wektorze średnich $\mathbf{a}$ i macierzy kowariancji $\mathbf{C}$, gdzie

$$\mathbf{C}^{-1}=\frac{\sum_{t=2}^{n} \mathbf{t}_t \mathbf{z}_t^{\mathrm{T}}}{\sigma_\eta^2}+\mathbf{C}_0^{-1}, \qquad \mathbf{a}=\mathbf{C}\left(\frac{\sum_{t=2}^{n} \mathbf{z}_t \ln h_t}{\sigma_\eta^2}+\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{a}_0\right),$$

przy czym $\mathbf{z}_t=(1, \ln h_{t-1})$. W tym kroku generujemy zmienną losową o takim rozkładzie i traktujemy ją jako wartość parametru α w kolejnych krokach.

W następnym kroku obliczamy rozkład warunkowy *a posteriori* parametru σ_η^2, $f(\sigma_\eta^2 \mid \mathbf{r}, \mathbf{h}, \alpha)$. Jak się okazuje

$$\frac{m\lambda+\sum_{t=2}^{n} v_t^2}{\sigma_\eta^2} \sim \chi_{m+n-1}^2,$$

gdzie $v_t=\ln h_t-\alpha_0-\alpha_1 \ln h_{t-1}$. Generujemy zmienną losową o odpowiednim rozkładzie i traktujemy ją jako wartość parametru σ_η^2 w następnych krokach.

Następnie wyznaczamy rozkłady zmiennych h_t. Jak się okazuje

$$f(h_t \mid \mathbf{r}, \alpha, \sigma_\eta^2, \mathbf{h}_{-t})=A h_t^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{r_t^2}{2h_t}-\frac{(\ln h_t-\mu_t)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{20}$$

gdzie $\mu_t=[\alpha_0(1-\alpha_1)+\alpha_1(\ln h_{t+1}+\ln h_{t-1})]$, $\sigma^2=\sigma_\eta^2/(1+\alpha_1^2)$, A jest stałą normalizującą, a $\mathbf{h}_{-t}$ to wektor parametrów $h_1, \ldots, h_n$ bez parametru h_t. Generujemy kolejno zmienne losowe $h_1, \ldots, h_n$ o rozkładzie (20), posługując się metodą *Griddy Gibbs*, tj. aproksymując dystrybuantę rozkładu funkcją odcinkami liniową, przy czym wartości tej funkcji obliczamy na podstawie gęstości prawdopodobieństwa (20). Stosując tę metodę, nie musimy obliczać wartości stałej A.

Powtarzając opisane powyżej kroki, otrzymujemy łańcuch Markowa zmiennych $(\alpha, \sigma_\eta^2, \mathbf{h})$. Rozkładem stacjonarnym tego łańcucha jest rozkład *a posteriori* estymowanych parametrów. Można zatem skorzystać z twierdzeń granicznych dla procesów Markowa i zastosować otrzymaną trajektorię łańcucha do oszacowania parametrów. W szczególności jako estymatory bierzemy średnie z próby, a wariancje z próby służą jako szacunki wariancji estymatorów.

W przeprowadzonych estymacjach modeli zmienności stochastycznej dokonano 11 000 iteracji dla każdego modelu przy czym pierwsze 1000 iteracji posłużyło jako „rozruch". Potrzebny jest on po to, aby upewnić się, że symulowany łańcuch Markowa zbliżył się do swojego rozkładu stacjonarnego. Do oszacowań wzięto wyniki pozostałych 10 000 iteracji. Rysunek 6 pokazuje przykładowe otrzymane rozkłady *a posteriori* dla parametrów α_0, α_1 i σ_η^2 akcji Agory. Wyniki wszystkich estymacji zawiera tabela 1. Oprócz oszacowań parametrów α_0, α_1 i σ_η^2 podano w niej także odchylenia standardowe tych oszacowań (w nawiasach), a także wartość zmienności w równowadze e^m i średni czas powrotu do średniej (w dniach), $1/\alpha$ – por. równanie (6).

5. Teoretyczne ceny warrantów BRE Banku na akcje notowane na GPW

Znając parametry modeli zmienności stochastycznej, można dokonać wyceny warrantów wystawionych na przedstawione akcje. Jak wcześniej zaznaczono, przyjęto, że cena wykonania warrantów jest równa cenie akcji w dniu ich pierwszego notowania. Do wyznaczenia cen warrantów posłużono się równaniem (14). Aby wyliczyć wartość oczekiwaną w tym równaniu zastosowano symulacje Monte Carlo. Rozwiązano numerycznie równanie (6), posługując się schematem Eulera. Następnie dla każdego rozwiązania wyznaczono zmienność efektywną, daną równaniem (15), przy czym do numerycznego obliczenia odpowiedniej całki zastosowano metodę trapezów. Dla otrzymanej efektywnej zmienności wyznaczono cenę Blacka-Scholesa. Symulację tę powtórzono 10 000 razy, otrzymując próbę złożoną z 10 000 cen Blacka-Scholesa dla różnych poziomów zmienności efektywnej. Cenę warrantu obliczono, biorąc średnią z tej próby.

Pozostaje jeszcze jeden problem, a mianowicie wyboru odpowiedniej premii za ryzyko, γ. Gdybyśmy dysponowali odpowiednio dużą liczbą obserwacji cen warrantów na badane akcje o różnych terminach i cenach wykonania i gdybyśmy mogli przyjąć, że warranty te są dobrze wycenione, wówczas moglibyśmy skalibrować model, posługując się wzorem (16). Niestety, na polskim rynku jest

to niemożliwe do wykonania. Po pierwsze, liczba instrumentów pochodnych, którymi się handluje, jest zbyt mała, a po drugie – ich płynność jest zbyt niska, aby można było założyć, że są dobrze wycenione. Założenie o poprawnej wycenie przez rynek można bowiem przyjąć tylko wtedy, gdy liczba kupujących i sprzedających, a także liczba transakcji jest na tyle duża, że siły rynkowe powodują ustalenie się ceny na odpowiednim poziomie. Na polskim rynku liczba transakcji, a także inwestorów handlujących warrantami jest zbyt mała, by można było przyjąć to założenie.

Dlatego też przeprowadzono kilka wycen dla różnych wartości premii za ryzyko, γ, przy czym za każdym razem przyjmowano, że premia jest stała. Przeprowadzono kolejno wyceny dla[6] $\gamma=0$, $\gamma=1$, $\gamma=2$, $\gamma=5$ i $\gamma=10$. Tabela 2 przedstawia wyniki tych wycen. Dodatkowo, dla porównania, zamieszczono w niej ceny Blacka-Scholesa badanych instrumentów (kolumna oznaczona BS).

Tabela 2. Ceny warrantów wyznaczone na podstawie modelu zmienności stochastycznej i ceny Blacka-Scholesa

Akcja	BS	$\gamma=0$	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=5$	$\gamma=10$
Agora	3,33	4,55	14,94	39,17	44,50	44,50
Computerland	10,17	11,72	35,98	93,58	113	113
Debica	11,30	9,40	21,79	52,33	129	129
Elektrim	1,62	2,13	5,48	9,31	9,60	9,60
Kable	6,31	7,33	13,63	23,50	35	35
KGHM	2,19	2,94	4,94	8,37	25,43	26,10
Kredytbank	0,95	0,71	1,82	4,71	9,20	9,20
Netia	0,28	0,91	2,68	4,11	4,13	4,13
Optimus	1,32	1,64	4,18	8,94	10,80	10,80
Orbis	2,27	2,31	9,06	22,86	23,50	23,50
Pekao	9,94	11,20	24,89	55,75	120,50	120,50
PKN	2,15	2,44	4,69	9,25	28,19	28,20
Prokom	12,34	20,86	69,72	167,90	180	180
Softbank	1,84	3,24	7,96	17,17	20,60	20,60
Świecie	5,10	5,73	15,06	38,57	64	64
TP SA	0,95	1,61	6,19	14,60	14,9	14,90

Z tabeli 2 widać, że cena warrantu wynikająca z modelu zmienności stochastycznej jest niższa niż cena Blacka-Scholesa, nawet jeśli założy się brak premii za ryzyko ($\gamma=0$). Cena w modelu zmienności stochastycznej szybko

[6] Przeprowadzono także wycenę dla $\gamma=100$, której tutaj nie zamieszczono, ponieważ wyniki nie różnią się zbytnio od wyników wyceny z $\gamma=10$.

rośnie wraz ze wzrostem wysokości premii za ryzyko. Wiadomo, że cena warrantu kupna nie może przekroczyć bieżącej ceny akcji. W większości przypadków cena w modelu zmienności stochastycznej osiąga tę maksymalną wysokość już dla $\gamma = 5$ lub $\gamma = 10$. Sugeruje to, że faktyczna wysokość premii za ryzyko nie powinna być zbyt duża: powinna zawierać się w przedziale (0, 5).

Wnioski

Podane przykłady pokazują, że wycena warrantów, którymi obraca się na polskiej giełdzie, na podstawie modeli zmienności stochastycznej jest trudna z powodu małej płynności rynku. Mała płynność powoduje, że nie można zastosować kalibracji modelu na podstawie obserwowanych cen warrantów.

Wycena warrantów staje się zatem w dużym stopniu zależna od przyjętej premii za ryzyko. Jednak rysunki (1)-(2) sugerują, że wycena na podstawie modeli zmienności stochastycznej jest bardziej realistyczna niż wycena na podstawie równania Blacka-Scholesa, ponieważ obserwowana zmienność ceny akcji nie jest stała, ale zmienia się w nieregularny sposób.

Dokładne ceny otrzymamy tylko przyjmując pewne założenia na temat premii za ryzyko. Rozsądnym założeniem wydaje się przyjęcie, że $\gamma = 0$. Takie założenie przyjmuje się też najczęściej, gdy wycenia się instrumenty pochodne na podstawie modelu, który nie jest zupełny[7]. Miara martyngałowa Q^0 odpowiada bowiem replikacji średniokwadratowej, która polega na tym, że zabezpieczamy nie wypłaty instrumentu pochodnego, ale wartości oczekiwane tych wypłat. Biorąc $\gamma = 0$ ceny warrantów, obliczamy stosując dobrze ugruntowaną w finansach wycenę na podstawie wartości oczekiwanej wypłat, tylko że teraz uwzględniamy to, że część ryzyka (związanego ze zmiennością ceny akcji) da się wyeliminować, a części ryzyka (związanego ze zmiennością zmienności) wyeliminować się nie da. Do wyceny tej pierwszej części ryzyka, stosujemy metodę martyngałową, a do wyceny tej drugiej zasadę wyceny według wartości oczekiwanej.

Z ekonomicznego punktu widzenia, potwierdza to znaną zasadę mikroekonomiczną, że jeżeli rynek jest niezupełny, to miara martyngałowa (lub jądro wyceny) jest wyznaczane przez procesy rynkowe (np. [2], [15], [16]). Jeśli dodatkowo rynek charakteryzuje się małą płynnością, to jego uczestnicy nie mogą korzystać z informacji płynących z rynku, a sami znajdując się w sytuacji konkurencji monopolistycznej – mają znaczny wpływ na miarę martyngałową, według której będą ustalane ceny akcji na rynku.

[7] Jest to zresztą klasyczne podejście, pochodzące z artykułu [17].

Literatura

[1] Ball, C., Roma, A., *Stochastic Volatility Option Pricing*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 1994, 29, 589-607.

[2] Björk, T., *Arbitrage Theory in Continous Time*, Oxford University Press, Oxford 1998.

[3] Black, F., Scholes, M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 1973, 81, 637-654.

[4] Buchen, P.W., Kelly, M., *The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Option Prices*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 1996, 31, 143-159.

[5] Chen, L., *Stochastic Mean and Stochastic Volatility: A Tree-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates and its Implications in Derivatives Pricing and Risk Management*, *Financial Markets, Institutions and Instruments* 1996, 5, 1-87.

[6] Doman, M., Doman, R., *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2004.

[7] Elliot, J.R., Kopp, P.E., *Mathematics of Financial Markets*, Springer-Verlag, New York 1999.

[8] Fouque, J.-P, Papanicolaou, G., Sircar, K.R., *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press, 2000.

[9] Geman, S., Geman D., *Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images*, IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 1984, 6, 721-741.

[10] Heston, S., *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, Review of Financial Studies 1993, 6, 327-343.

[11] Hull, J., *Kontrakty terminowe i opcje*, WIG-Press, Warszawa 1999.

[12] Hull, J., White, A., *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, Journal of Finance 1987, 42, 281-300.

[13] Jacquier, E., Polson, N.G., Rossi, P.E., *Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models*, Journal of Business and Economic Statistics 1990, 12, 317-417.

[14] Karatzas, I., Shreve, S.E., *Methods of mathematical finance*, Columbia University Press, New York 1995.

[15] Lengwiler, Y., *Microeconomics Fundations of Financial Economics*, Princeton University Press, 2004.

[16] Magill, M., Quinzii, M., *Theory of Incomplete Markets*, MIT Press, Cambridge 1996.

[17] Merton, R.C., *Option Pricing when Underlying Stock Prices are Discountinuous*, Journal of Financial Economics 1978, 3, 125-144.

[18] Musiela, M., Rutkowski, M., *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer-Verlag, New York 1998.
[19] Rogers, L.C.G., Williams, D., *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, vol. 2, Ito Calculus, Cambridge University Press, 2000.
[20] Rubinstein, M., *Implied Binominal Trees*, The Journal of Finance 1994, 49, 771-818.
[21] Schoutens, W., *Levy Processes in Finance*: *Pricing Financial Derivatives*, John Wiley and Sons Inc., 2003.
[22] Schweizer, M., *Variance-Optimal Hedging in Discrete Time*, Mathematics of Operations Research 1995, 20, 1-32.
[23] Scott, L., *Option Pricing when the Variance Changes Randomly*: *Theory, Estimation and an Application*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1987, 22, 419-438.
[24] Shiryaev, A.N., *Essentials of Stochastic Finance*, World Scientific Publ., 1999.
[25] Sobczyk, K., *Stochastyczne równania różniczkowe*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Waszawa 1996.
[26] Stein, E., Stein, J., *Stock Price Distributions with Stochastic Volatility*: *An Analitic approach*, Review of Financial Studies 1991, 4, 727-752.
[27] Stutzer, M., *A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation*, The Journal of Finance 1996, 51, 1633-1652.
[28] Tsay, R.S., *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley and Sons Inc., 2002.

WARRANT PRICING IN THE STOCHASTIC VOLATILITY MODEL

Summary

In this paper I try to price warrants on stocks which are traded on Polish market using stochastic volatitility models. I argue that stochastic volatility models are more realistic then Black-Scholes model in describing the prices of these stock. After estimating the Scott model using Markov Chain Monte Carlo method and calculatating prices of warrants that can be emitted by BRE Bank, it is shown that prices of these warrants depend on risk premium. The estimation of the risk premium from the observated warrant prices is impossible because of the low liquidity of these warrants. But one can resonable price 19 warrants in the stochastic volatility model assuming that risk premium equals zero, which is consistent with expected payoff pricing rule.