Elżbieta RYCHŁOWSKA-MUSIAŁ

NIEKLASYCZNE ZAGADNIENIE OPTYMALIZACJI KONSUMPCJI W PEWNYM MODELU LEONTIEWA

1. Wprowadzenie. Sformułowanie zadania prymalnego

Dwusektorowe modele wzrostu są najprostszymi modelami uwzględniającymi niepełną substytucyjność dóbr inwestycyjnych i konsumpcyjnych, ograniczone możliwości przestawienia aparatu wytwórczego z produkcji jednych dóbr na produkcję drugich oraz ograniczony przepływ siły roboczej między sektorami gospodarki. Zakłada się w nich, że gospodarka jest podzielona na dwa sektory (działy); sektor pierwszy wytwarzający dobra inwestycyjne (umownie nazywany sektorem inwestycyjnym) i sektor drugi wytwarzający dobra konsumpcyjne. Podział taki ma, oczywiście, charakter teoretyczny. W praktyce często trudno ustalić, do jakiej kategorii towar należy (tenże sam towar raz może być dobrem inwestycyjnym – gdyż służy właścicielowi jako środek pracy, innym razem jest dobrem konsumpcyjnym). Niemniej jednak podział na sektor 1. inwestycyjny i sektor 2. wytwarzający dobra konsumpcyjne jest powszechnie przyjęty zarówno w teorii ekonomii, jak i w ekonomii matematycznej.

Produkcja w każdym z sektorów zależy od jego możliwości produkcyjnych, czyli od wielkości majątku trwałego (maszyny, pomieszczenia, inne urządzenia nie zużywające się w trakcie procesu produkcyjnego) i obrotowego (surowce, energia elektryczna), a także od wielkości zatrudnienia w tym sektorze, które jest limitowane przez – na ogół zmienny w czasie – poziom zatrudnienia w całej gospodarce.

Wyróżnione sektory pełnią odmienne role w procesie wzrostu gospodarczego. Produkcja sektora inwestycyjnego przyczynia się do pomnaża-

nia trwałego majątku produkcyjnego, umożliwiającego wzrost produkcji w jednym lub w obu sektorach w przyszłości. Produkcja sektora konsumpcyjnego nie pomnaża majątku produkcyjnego, zaspokaja natomiast potrzeby konsumpcyjne społeczeństwa i ma wpływ na wiele zjawisk ekonomiczno-socjologicznych.

Z tego punktu widzenia rozpatrywanie zagadnienia optymalizacji konsumpcji na gruncie różnych modeli wzrostu gospodarczego ma głębokie uzasadnienie. Jednemu z takich zagadnień jest poświęcona niniejsza praca, a przedmiotem naszego zainteresowania jest dwusektorowy dynamiczny model wzrostu gospodarczego typu Leontiewa[1]. Klasyczne podejście do zadań tego typu opiera się na zasadzie maksimum Pontriagina. Tutaj natomiast wykorzystamy inne, nieklasyczne, twierdzenie o optymalności sformułowane, np. w pracy [3].

Niech [0,T] będzie ustalonym przedziałem (horyzontem) czasu.

Zakładamy, że wielkość produkcji każdego sektora ($x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, gdzie $x_i(t)$ – funkcje ciągłe na [0,T], przedziałami różniczkowalne) jest ograniczona pewnym, nieprzekraczalnym poziomem mocy (możliwości) produkcyjnych ($v(t) = (v_1(t), v_2(t))$, gdzie $v_i(t)$ – funkcje ciągłe na [0,T], przedziałami różniczkowalne):

$$0 \le x(t) \le v(t). \tag{1.1}$$

Przy założeniu braku deprecjacji majątku w sektorach moce produkcyjne nie maleją, co oznacza, że w każdym momencie spełniony jest warunek:

$$0 \le \dot{v}(t).^{2} \tag{1.2}$$

Uwzględniając podział produkcji końcowej na część konsumowaną w momencie t ($c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, gdzie $c_i(t)$ – funkcje ciągłe na [0, T], przedziałami różniczkowalne) i część kierowaną na inwestycje w sektorach ($i(t) = (i_1(t), i_2(t)$, gdzie $i_j(t)$ – funkcje ciągłe na [0,T] przedziałami różniczkowalne) otrzymujemy znane równanie bilansowe charakteryzujące modele typu Leontiewa:

$$(I - A)x(t) = i(t) + c(t), \tag{1.3}$$

gdzie A jest macierzą współczynników nakładów bieżących, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

[1] Wielosektorową wersję tego modelu prezentuje m.in. A. M. Ter-Krikorow w pracy [3].

[2] W całej pracy symbol $f^{\bullet}(t) \overset{df}{=} \frac{df(t)}{dt}$ oznacza pochodną funkcji f w punkcie t.

O macierzy A zakłada się, że jest produktywna, tzn. istnieje przynajmniej jeden taki wektor $x \geq 0$, że $Ax < x$. Oznacza to, że można w każdym sektorze wytworzyć więcej produktów niż się ich w nim zużywa.

Gospodarka, w której macierz A nie byłaby produktywna, nie mogłaby istnieć samodzielnie. Praktyczne sprawdzenie, czy gospodarka jest rzeczywiście produktywna czy nie, wymaga zastosowania znanych twierdzeń (zob. np. [1] s. 95 - 97).

Wielkości inwestycji w obu sektorach są proporcjonalne do wzrostu mocy produkcyjnych

$$i(t) = B\dot{v}(t), \tag{1.4}$$

gdzie B jest macierzą współczynników inwestycyjnych, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

Sektor 2. z założenia wytwarza tylko dobra konsumpcyjne, nie występujące nigdzie ani w charakterze nakładów bieżących, ani nakładów inwestycyjnych. Oznacza to, że w naszym modelu drugi wiersz macierzy współczynników nakładów bieżących A oraz macierzy współczynników inwestycyjnych B składa się wyłącznie z samych zer:

$$a_{21} = a_{22} = b_{21} = b_{22} = 0. \tag{1.5}$$

Sektor 1. wytwarza natomiast tylko dobra inwestycyjne, zatem:

$$c_1(t) = 0 \tag{1.6}$$

wszędzie na [0,T].

Dobra konsumpcyjne wytwarza tylko sektor 2. Zakładamy, że konsumpcja $c_2(t)$ nie może spaść poniżej pewnego minimalnego poziomu $c_{02}(t)$,($c_{02}(t)$ –funkcja ciągła na [0,T], przedziałami różniczkowalna):

$$c_{02}(t) \leq c_2(t). \tag{1.7}$$

Do prowadzenia swojej działalności każdy sektor potrzebuje pewnych nakładów pracy. Oznaczmy zatem przez $a_0 = (a_{01}, a_{02})$ wektor jednostkowych nakładów pracy w obu sektorach gospodarki. Zakładamy, że łączne zasoby pracy w obu sektorach, są ograniczone tzn., że jest określony górny pułap zatrudnienia w gospodarce $\pi(t)$ (mierzony np. liczbą aktywnych zawodowo), ($\pi(t)$ –funkcja ciągła na [0,T], przedziałami różniczkowalna) oraz że istnieje możliwość swobodnego przepływu siły roboczej między sektorami:

$$< a_0, x(t) > \leq \pi(t). \tag{1.8}$$

Przyjmujemy ponadto, że dany jest początkowy stan mocy produkcyjnych ($v_0 = (v_{01}, v_{02})$) w każdym z sektorów:

$$v_1(0) = v_{01} \geq 0, v_2(0) = v_{02} \geq 0. \tag{1.9}$$

Z dotychczasowych warunków wynika, że stan mocy produkcyjnych w momencie końcowym będzie nieujemny i nie mniejszy od v_0.

Interesuje nas wyznaczenie takiego procesu produkcyjnego, który pozwala na zmaksymalizowanie nadwyżki konsumpcji ponad założone minimum w pewnym ograniczonym przedziale czasu [0,T].

Uwzględniając warunki (1.1)-(1.9) i rozpisując wektory i funkcje po współrzędnych, otrzymujemy następującej postaci zadanie (prymalne): Znaleźć

$$\max \int_0^T [c_2(t) - c_{02}(t)]dt \tag{1.10}$$

przy następujących ograniczeniach:

$$(1 - a_{11})x_1(t) - a_{12}x_2(t) - b_{11}\dot{v}_1(t) - b_{12}\dot{v}_2(t) = 0, \quad x_2(t) = c_2(t), \tag{1.11}$$

$$0 \leq x_1(t) \leq v_1(t), \quad 0 \leq x_2(t) \leq v_2(t), \tag{1.12}$$

$$a_{01}x_1(t) + a_{02}x_2(t) \leq \pi(t), \tag{1.13}$$

$$c_{02}(t) \leq c_2(t), \tag{1.14}$$

$$\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t) \geq 0, \tag{1.15}$$

$$v_1(0) = v_{01} \geq 0, v_2(0) = v_{02} \geq 0. \tag{1.16}$$

Funkcje $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ pełnią w naszym zadaniu rolę trajektorii stanów. Aby ułatwić dalsze rozważania, dogodne będzie dokonanie podstawień:

$$c_2(t) - c_{02}(t) = \omega_2(t) \geq 0, \tag{1.17}$$

$$\dot{v}_1(t) = u_1(t) \geq 0, \quad \dot{v}_2(t) = u_2(t) \geq 0. \tag{1.18}$$

Funkcje $u_1(t), u_2(t), \omega_2(t)$ pełnią w zadaniu prymalnym rolę sterowań.

Warunki (1.17) i (1.18) są równoważne warunkom (1.14) i (1.15.) i dalej będą je zastępować. Zakładamy, że możliwe jest zrealizowanie minimalnego poziomu konsumpcji w okresie [0,T] przy niepełnym wykorzystaniu mocy produkcyjnych i niepełnym zatrudnieniu. Innymi słowy zakładamy, że istnieją takie liczby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta > 0$, przy których układ

$$\begin{aligned} &(1-a_{11})x_{01}(t) - a_{12}x_{02}(t) = 0, \\ &\qquad x_{02}(t) = 0, \\ &0 \le x_{01}(t) \le v_{01} - \varepsilon_1, \\ &0 \le x_{02}(t) \le v_{02} - \varepsilon_2, \\ &a_{01}x_{01}(t) + a_{02}x_{02}(t) \le \pi(t) - \delta, \end{aligned} \tag{1.19}$$

ma rozwiązanie.

O trójce wektorowej $(\omega_2(t), u(t), v(t))$ spełniającej układ (1.11)-(1.13), (1.16)-(1.18) mówimy, że tworzy dopuszczalny proces wzrostu.

2. Zadanie dualne

Należy znaleźć funkcje sterujące $r(t) = (r_1(t), r_2(t))$ i $s(t)$ oraz odpowiadające im trajektorie stanów $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ i $q(t) = (q_1(t), q_2(t))$ będące rozwiązaniem zadania:
Znaleźć

$$\min\left\{ q(0)v_0 + \int_0^T s(t)\pi(t)dt - \int_0^T p(t)c_0(t)dt \right\} \tag{2.1}$$

przy ograniczeniach:

$$p(t)(I - A) - s(t)a_0 = r(t), \tag{2.2}$$

$$\dot{q}(t) = -r(t), \tag{2.3}$$

$$p(t)B \ge q(t), \tag{2.4}$$

$$p(t) \ge p_0, \tag{2.5}$$

$$r(t), s(t) \ge 0. \tag{2.6}$$

Wielkość $p_0 = (p_{01}, p_{02})$ interpretujemy jako minimalne gwarantowane ceny rynkowe (oceny) towarów, natomiast $c_0(t) = (0, c_{02}(t))$.

Uwzględniając zadanie prymalne (1.11)-(1.13), (1.16)-(1.18) i rozpisując powyższe zależności po współrzędnych, otrzymamy bardziej szczegółową, równoważną postać zadania dualnego:

Znaleźć

$$\min \left\{ q_1(0)v_{01} + q_2(0)v_{02} + \int_0^T s(t)\pi(t)dt - \int_0^T p_2(t)c_{02}(t)dt \right\} \tag{2.7}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} &(1-a_{11})p_1(t) - a_{01}s(t) = r_1(t), \\ &p_2(t) - a_{12}p_1(t) - a_{02}s(t) = r_2(t), \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} &\dot{q}_1(t) = -r_1(t), \\ &\dot{q}_2(t) = -r_2(t), \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} &b_{11}p_1(t) \geq q_1(t), \\ &b_{12}p_1(t) \geq q_2(t), \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &p_1(t) \geq p_{01}, \\ &p_2(t) \geq p_{02} \end{aligned} \tag{2.11}$$

i warunkach nieujemności (2.6).

O czwórce wektorów $(r(t), s(t), p(t), q(t))$ będącej rozwiązaniem układu (2.8)-(2.11), (2.6) mówimy, że tworzy dopuszczalny proces wzrostu zadania (2.6)-(2.11).

Ekonomiczna interpretacja zadania dualnego jest następująca. Niech $p_i(t)$ oznacza ceny produktów i-tego sektora (i=1,2), $s(t)$ –cenę pracy, czyli wynagrodzenie pracowników (jednakowe w obu sektorach). Funkcje $r_i(t)$ (i=1,2) w (2.8) interpretujemy wtedy jako jednostkowy dochód każdego sektora (ponieważ $(1-a_{11})p_1(t)$ oraz $p_2(t)-a_{12}p_1(t)$ to jednostkowe koszty nakładów technologicznych odpowiednio sektora 1. i 2.). Funkcja $q(t) = (q_1(t), q_2(t))$ stanowi ocenę mocy produkcyjnych w sektorach. Z (2.9) wynika, że

$$q_i(t) = \int_t^T r_i(\tau)d\tau + q_i(T) \quad (i = 1,2) \tag{2.12}$$

Widać stąd, że ocena mocy produkcyjnej i-tego sektora w chwili t jest równa sumie oceny końcowej mocy i wartości dochodu, jaki można osiągnąć z jednostki tej mocy w okresie [t, T]. Jednocześnie $b_{1i}p_1(t)$ $(i = 1,2)$ oznacza cenę nakładów na zwiększenie mocy produkcyjnej i-tego sektora o jednostkę, więc z nierówności (2.10) wynika, że ocena tej jednostki mocy nie jest wyższa od wartości nakładów na jej zwiększenie.

Przy tych warunkach rozwiązaniem zadania dualnego jest proces minimalizujący wartość funkcjonału (2.7), tj. całkowite koszty produkcji (koszty zaangażowania kapitału i pracy) zapewniające w okresie [0,T] osiągnięcie minimalnego założonego poziomu konsumpcji $c_{02}(t)$.

3. Warunki konieczne optymalności rozwiązań zadania prymalnego i dualnego

Poniższe warunki optymalności rozwiązań zadania prymalnego (1.10)-(1.13),(1.16)-(1.18) i dualnego (2.6)-(2.11) formułujemy, wykorzystując twierdzenie o optymalności sformułowane, np. w [3].

Jeżeli $u^*(t), \omega_2{}^*(t), r^*(t), s^*(t)$ są sterowaniami optymalnymi, a $x^*(t), v^*(t), p^*(t), q^*(t)$ optymalnymi trajektoriami stanów, to na przedziale [0,T], z ewentualnym wyłączeniem punktów kątowych trajektorii stanów, spełnione są następujące zależności:

$$\left(p^*(t)B - q^*(t)\right)u^*(t) = 0\,, \tag{3.1}$$

$$\left(p_2^*(t) - p_{02}\right)\omega_2^*(t) = 0\,, \tag{3.2}$$

$$r^*(t)\left(v^*(t) - x^*(t)\right) = 0\,, \tag{3.3}$$

$$s^*(t)\left(\pi^*(t) - < a_0, x^*(t) >\right) = 0\,. \tag{3.4}$$

Rozpisując po współrzędnych i analizując każde z powyższych równań, można teraz przedstawić ich ekonomiczną interpretację. Zatem z (3.1), uwzględniając (1.18), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &\left(b_{11}p_1^*(t) - q_1^*(t)\right)\dot{v}_1{}^*(t) = 0, \\ &\left(b_{12}p_1^*(t) - q_2^*(t)\right)\dot{v}_2{}^*(t) = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Jeśli w danym momencie czasu t moc produkcyjna sektora rośnie ($\dot{v}_i^*(t) > 0,\ i = 1,2$), to jej jednostkowa ocena jest równa cenie nakładów poniesionych na zwiększenie mocy o jednostkę ($q_i^*(t) = b_{1i}p_1^*(t),\ i = 1,2$). Jeśli natomiast ocena mocy jest mniejsza od ceny nakładów, to znaczy, że w danym momencie moc nie wzrasta.
Podobnie z (3.2), po uwzględnieniu (1.17), wynika, że:

$$\left(p_2^*(t) - p_{02}\right)\left(c_2^*(t) - c_{02}(t)\right) = 0 \tag{3.6}$$

Równanie to określa zależność między konsumpcją a cenami. Jeżeli cena produktu sektora 2. jest wyższa od jego ceny minimalnej p_{02} (jest zawyżona), to jego spożycie odbywa się na poziomie minimalnym ($c_2^*(t) = c_{02}(t)$). Jeżeli natomiast cena ta jest ceną minimalną, wówczas spożycie przekracza poziom minimalny. Z (3.3) otrzymujemy parę równań:

$$r_1^*(t)\left(v_1^*(t)-x_1^*(t)\right)=0,$$
$$r_2^*(t)\left(v_2^*(t)-x_2^*(t)\right)=0. \tag{3.7}$$

Z zależności tych wynika, że niezerowy dochód można osiągnąć w każdym z sektorów tylko przy pełnym wykorzystaniu mocy produkcyjnych. Rezerwy mocy oznaczają konieczność ich pełnego wykorzystania w celu uzyskania wyższego dochodu w przyszłości. Warunek (3.4) można zapisać inaczej:

$$s^*(t)\left(\pi^*(t)-a_{01}x_1^*(t)-a_{02}x_2^*(t)\right)=0. \tag{3.8}$$

Równanie to oznacza, zgodnie z teorią neoklasyczną, że dodatnia płaca pojawia się tylko w sytuacji pełnego zatrudnienia.

4. Warunki konieczne optymalności rozwiązania zadania prymalnego

Powróćmy do zadania (1.10)-(1.13),(1.16)-(1.18), zapisując je w nieco innej, równoważnej postaci:
Znaleźć

$$\max \int_0^T \omega_2(t)dt \tag{4.1}$$

przy ograniczeniach:

$$\dot{v}_1(t)=u_1(t),$$
$$\dot{v}_2(t)=u_2(t), \tag{4.2}$$

$$v_1(t)-\frac{a_{12}}{1-a_{11}}\omega_2(t)-\frac{a_{12}}{1-a_{11}}c_{02}(t)-\frac{b_{11}}{1-a_{11}}u_1(t)-\frac{b_{12}}{1-a_{11}}u_2(t)\geq 0, \tag{4.3}$$

$$v_2(t)-\omega_2(t)-c_{02}(t)\geq 0, \tag{4.4}$$

$$\pi(t)-(\frac{a_{01}a_{12}}{1-a_{11}}+a_{02})\omega_2(t)-(\frac{a_{01}a_{12}}{1-a_{11}}+a_{02})c_{02}(t)-\frac{a_{01}b_{11}}{1-a_{11}}u_1(t)+$$
$$-\frac{a_{01}b_{12}}{1-a_{11}}u_2(t)\geq 0, \tag{4.5}$$

$$\omega_2(t)\geq 0,$$
$$u_i(t)\geq 0, \qquad (i=1,2) \tag{4.6}$$

i warunkach początkowych

$$v_1(0) = v_{01} \geq 0, v_2(0) = v_{02} \geq 0 . \tag{4.7}$$

W zadaniu tym rolę sterowań pełnią funkcje: $\omega_2(t)$ – funkcja nadwyżki konsumpcji ponad minimalny poziom $c_{02}(t)$ i $u_i(t)$ $(i = 1,2)$ – stopy wzrostu mocy produkcyjnych, których zakłada się, że są funkcjami przedziałami ciągłymi, o co najwyżej skończonej liczbie punktów nieciągłości pierwszego rodzaju na (0,T); stan wewnętrzny opisuje wektor mocy produkcyjnych $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$.

Proces $(\omega^*_2(t), u^*(t), v^*(t))$ będący rozwiązaniem zadania (4.1)-(4.7) nazywamy optymalnym procesem wzrostu, $\omega^*_2(t)$ *i* $u^*(t)$ – sterowaniami optymalnymi, a $v^*(t)$ – optymalną trajektorią stanu mocy produkcyjnych.

Na podstawie twierdzenia podanego w pracy [4] (str.12-13) formułujemy warunki konieczne optymalności rozwiązania zadania (4.1)-(4.7)

Niech $\omega^*_2(t)$, $u^*_1(t)$, $u^*_2(t)$ będą sterowaniami optymalnymi, a $v^*_1(t)$, $v^*_2(t)$ –optymalnymi trajektoriami stanów wewnętrznych w tym zadaniu. Jeżeli spełniony jest warunek regularności (Kuhna-Tuckera), to istnieje nieujemna, wektorowa, ciągła funkcja czasu $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ oraz taka wektorowa, ciągła, z ewentualnym wyłączeniem punktów kątowych $v^*(t)$, funkcja czasu $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$, że w każdym momencie $t \in [0,T]$ zachodzą warunki:

$$H(\omega^*_2(t), u^*_1(t), u^*_2(t), \psi^*_1(t), \psi^*_2(t)) = \max_{\substack{u_1 \geq 0 \\ u_2 \geq 0 \\ \omega_2 \geq 0}} H(\omega_2, u_1, u_2, \psi^*_1(t), \psi^*_2(t)), \tag{4.8}$$

gdzie

$$H(\omega_2, u_1, u_2, \psi_1, \psi_2) = \omega_2 + \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 , \tag{4.9}$$

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial L^*}{\partial v_i}, \qquad i = 1,2 , \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L^*}{\partial u_i} = 0, \qquad i = 1,2, \\ &\frac{\partial L^*}{\partial \omega_2} = 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

gdzie:

$$L(\omega_2,u,v,\psi,\lambda,t)=\omega_2(t)+\psi_1(t)u_1(t)+\psi_2(t)u_2(t)+$$
$$+\lambda_1(t)\left(v_1(t)-\frac{a_{12}}{1-a_{11}}(\omega_2(t)+c_{02}(t))-\frac{b_{11}}{1-a_{11}}u_1(t)-\frac{b_{12}}{1-a_{11}}u_2(t)\right)+$$
$$+\lambda_2(t)(v_2(t)-c_{02}(t)-\omega_2(t))+ \tag{4.12}$$
$$+\lambda_3(t)\left(\pi(t)-\left(\frac{a_{01}a_{12}}{1-a_{11}}+a_{02}\right)(\omega_2(t)+c_{02}(t))-\frac{a_{01}b_{11}}{1-a_{11}}u_1(t)-\frac{a_{01}b_{12}}{1-a_{11}}u_2(t)\right).$$

$$\lambda_1(t)\geq 0\wedge\lambda_1(t)\left(v_1^*(t)-\frac{a_{12}}{1-a_{11}}(\omega_2^*(t)+c_{02}(t))-\frac{b_{11}}{1-a_{11}}u_1^*(t)-\frac{b_{12}}{1-a_{11}}u_2^*(t)\right)=0,$$
$$\lambda_2(t)\geq 0\wedge\lambda_2(t)(v_2^*(t)-c_{02}(t)-\omega_2^*(t))=0, \tag{4.13}$$
$$\lambda_3(t)\geq 0\wedge$$
$$\wedge\lambda_3(t)\left(\pi^*(t)-\left(\frac{a_{01}a_{12}}{1-a_{11}}+a_{02}\right)(\omega_2^*(t)+c_{02}(t))-\frac{a_{01}b_{11}}{1-a_{11}}u_1^*(t)-\frac{a_{01}b_{12}}{1-a_{11}}u_2^*(t)\right)=0,$$

$$\psi(T)\geq 0\wedge\psi(T)v(T)=0. \tag{4.14}$$

Ponieważ z warunków zadania wynika, że $v(T)>0$, (gdyby $v(T)=0$ znaczyłoby to, że w obu sektorach nie istnieją żadne moce produkcyjne, czyli że proces produkcyjny nie mógłby się odbywać), zatem

$$\psi(T)=0. \tag{4.15}$$

Z (4.10) i (4.11) otrzymujemy:

$$\dot{\psi}_1(t)=-\lambda_1(t),$$
$$\dot{\psi}_2(t)=-\lambda_2(t), \tag{4.16}$$

$$\psi_1(t)-\lambda_1(t)\frac{b_{11}}{1-a_{11}}-\lambda_3(t)\frac{a_{01}b_{11}}{1-a_{11}}=0, \tag{4.17}$$

$$\psi_2(t)-\lambda_1(t)\frac{b_{12}}{1-a_{11}}-\lambda_3(t)\frac{a_{01}b_{12}}{1-a_{11}}=0, \tag{4.18}$$

$$1-\lambda_1(t)\frac{a_{12}}{1-a_{11}}-\lambda_2(t)-\lambda_3(t)\left(\frac{a_{01}a_{12}}{1-a_{11}}+a_{02}\right)=0. \tag{4.19}$$

Z (4.17) i (4.18) wynika, że:

$$\psi_2(t)=\frac{b_{12}}{b_{11}}\psi_1(t), \tag{4.20}$$

co oznacza, że funkcje ψ_1, ψ_2 różnią się między sobą tylko o liniowy współczynnik dodatni, wobec tego muszą mieć taką samą monotoniczność; zatem λ_1, λ_2 muszą być jednocześnie równe zero lub różne od zera.

Zobaczmy teraz jak w zależności od λ_i kształtują się funkcje ψ_i oraz konsumpcja, poziom mocy produkcyjnych i zatrudnienia.

(A) Załóżmy, że $\lambda_1(t) = 0, \lambda_2(t) = 0$ i $\lambda_3(t) = 0$ dla pewnych $t \in [0,T]$. Wówczas otrzymujemy natychmiastową sprzeczność z (4.19).

(B) Załóżmy, że $\lambda_1(t) = 0, \lambda_2(t) = 0$ i $\lambda_3(t) \neq 0$ dla pewnych $t \in [0, \tau_1)$, $(0 \leq \tau_1 < T$, gdyż dla $\tau_1 = T$ otrzymujemy z (4.17) w chwili końcowej T:

$$\psi_1(T) = \lambda_3(T)\frac{a_{01}b_{11}}{1-a_{11}} \neq 0 \tag{4.21}$$

co daje natychmiastową sprzeczność z (4.15)).
Wtedy z (4.16):

$$\dot{\psi}_1(t) = 0 \quad i \quad \dot{\psi}_2(t) = 0,$$

zatem ψ_i są funkcjami stałymi. Ponadto

$$\psi_1(t) = \lambda_3(t)\frac{a_{01}b_{11}}{1-a_{11}}. \tag{4.22}$$

Na mocy (4.13) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &v_1(t) - \frac{a_{12}}{1-a_{11}}\left(\omega_2(t) + \omega_2(t)\right) - \frac{b_{11}}{1-a_{11}}u_1(t) - \frac{b_{12}}{1-a_{11}}u_2(t) > 0, \\ &v_2(t) - c_{02}(t) - \omega_2(t) > 0, \\ &\pi(t) - \left(\frac{a_{01}a_{12}}{1-a_{11}} + a_{02}\right)\left(\omega_2(t) + \omega_2(t)\right) - \frac{a_{01}b_{11}}{1-a_{11}u_1(t)} - \frac{a_{01}b_{12}}{1-a_{11}}u_2(t) = 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Uwzględniając (1.11), (1.17) i (1.18), mamy:

$$\begin{aligned} &x_1(t) < v_1(t), \\ &x_2(t) < v_2(t), \\ &a_{01}x_1(t) + a_{02}x_2(t) = \pi(t), \end{aligned} \tag{4.24}$$

oraz

$$\omega_2(t) = \frac{\pi(t)}{a_{02}} - \frac{a_{01}}{a_{02}}x_1(t) - c_{02}(t). \tag{4.25}$$

(C) Załóżmy, że $\lambda_1(t) \neq 0, \lambda_2(t) \neq 0$ i $\lambda_3(t) \neq 0$ dla pewnych $t \in [\tau_1, \tau_2]$, $(0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T)$. Wówczas na mocy (4.16):

$\dot{\psi}_1(t) < 0$ i $\dot{\psi}_2(t) < 0$,

zatem funkcje ψ_i są malejące. Ponadto

$$\psi_1(t) = \lambda_1(t)\frac{b_{11}}{1-a_{11}} + \lambda_3(t)\frac{a_{01}b_{11}}{1-a_{11}}, \tag{4.26}$$

Na mocy (4.13):

$$\begin{aligned} &v_1(t) - \frac{a_{12}}{1-a_{11}}\left(\omega_2(t)+\omega_2(t)\right) - \frac{b_{11}}{1-a_{11}}u_1(t) - \frac{b_{12}}{1-a_{11}}u_2(t) = 0, \\ &v_2(t) - c_{02}(t) - \omega_2(t) = 0, \\ &\pi(t) - \left(\frac{a_{01}a_{12}}{1-a_{11}} + a_{02}\right)\left(\omega_2(t)+\omega_2(t)\right) - \frac{a_{01}b_{11}}{1-a_{11}u_1(t)} - \frac{a_{01}b_{12}}{1-a_{11}}u_2(t) = 0. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Uwzględniając, jak poprzednio, (1.11), (1.17) i (1.18) mamy:

$$\begin{aligned} &x_1(t) = v_1(t), \\ &x_2(t) = v_2(t), \\ &a_{01}x_1(t) + a_{02}x_2(t) = \pi(t), \end{aligned} \tag{4.28}$$

oraz

$$\omega_2(t) = v_2(t) - c_{02}(t). \tag{4.29}$$

(D) Załóżmy, że $\lambda_1(t) \neq 0$, $\lambda_2(t) \neq 0$ i $\lambda_3(t) = 0$ dla $t \in (\tau_2, T], (\tau_2 \geq 0$ i $\tau_2 \neq T)$:

Na mocy (4.16), tak jak w przypadku (C) otrzymujemy wówczas, że ψ_i są funkcjami malejącymi oraz

$$\psi_1(t) = \lambda_1(t)\frac{b_{11}}{1-a_{11}}, \tag{4.30}$$

a z (4.13), (1.11), (1.17) i (1.18), tak jak poprzednio wynika, że:

$$\begin{aligned} &x_1(t) = v_1(t), \\ &x_2(t) = v_2(t), \\ &a_{01}x_1(t) + a_{02}x_2(t) < \pi(t). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Funkcja $\omega_2(t)$ dana jest wzorem (4.29).

Otwarty pozostaje problem znalezienia punktów przełączania τ_1 i τ_2. W ogólnym przypadku jest to niemożliwe. Do ich wyznaczenia w przypadkach szczególnych można stosować metody numeryczne.

5. Analiza rozwiązań i interpretacja wyników

W zależności od początkowego poziomu i tempa wzrostu mocy produkcyjnych oraz zatrudnienia, a także istnienia i położenia punktów τ_1 i τ_2, możemy wyróżnić różne typy procesów wzrostu.

5.1. Poziom zatrudnienia w chwili początkowej nie zapewnia pełnego wykorzystania mocy produkcyjnych istniejących w tym momencie. Wtedy:

5.1.1. Jeżeli $\tau_1 \neq \tau_2, \tau_1 \neq 0$ *i* $\tau_2 \neq T$, to w procesie wzrostu możemy wyróżnić trzy fazy.

W fazie pierwszej – przedział $[0, \tau_1)$ (przypadek (B)) – ma miejsce pełne zatrudnienie, natomiast pewne moce produkcyjne pozostają nie wykorzystane. Uwzględniając zatem wcześniejsze uwagi, stwierdzamy, że wynagrodzenie w obu sektorach jest dodatnie, natomiast charakteryzują się one zerowym dochodem. Wszelkie dodatkowe środki są kierowane na lepsze wykorzystanie mocy produkcyjnych, w celu uzyskania wyższego dochodu w przyszłości. Konsumpcja dana jest wzorem:

$$c_2^*(t) = \frac{\pi(t)}{a_{02}} + \frac{a_{01}}{a_{02}} x_1^*(t) . \qquad (5.1)$$

W fazie drugiej – przedział $[\tau_1, \tau_2]$ (przypadek (C)) – następuje wyrównanie proporcji pomiędzy poziomem mocy produkcyjnych i zatrudnienia. Produkcja przebiega przy pełnym wykorzystaniu obu czynników. Wynagrodzenie w obu sektorach przekracza poziom zerowy. Oba sektory osiągają także niezerowe dochody. Konsumpcja optymalna wyraża się wzorem:

$$c_2^*(t) = v_2^*(t) . \qquad (5.2.)$$

Jest to faza wzrostu, w której wymierne korzyści osiągają zarówno zatrudnieni, jak i producenci.

Trzecia faza wzrostu – przedział $(\tau_2, T]$ (przypadek (D)) – charakteryzuje się nadwyżką zasobów pracy w stosunku do oferowanych miejsc pracy z powodu szybszego wzrostu tych zasobów, niż wzrost mocy produkcyjnych. Ograniczenie produkcji obu sektorów wynika z niemożliwości zwiększenia mocy produkcyjnych. Istniejące rezerwy zasobów pracy powodują, że stawka płac kształtuje się na poziomie zerowym. W tym okresie dochód sektorów jest dodatni, ponieważ wytwarzane środki nie muszą być przeznaczone na zwiększanie mocy produkcyjnych ani na zwiększanie wynagrodzenia pracowników. Konsumpcja (czyli produkcja sektora 2.) wyraża się wzorem (5.2).

5.1.2. Jeżeli $\tau_1 = \tau_2$, wtedy w procesie wzrostu zanika faza druga. Proces rozpoczyna się od fazy pierwszej, czyli od produkcji przy niepełnym wyko-

rzystaniu mocy produkcyjnych i pełnym zatrudnieniu. Gdy w punkcie $\tau_1 = \tau_2$ nastąpi zrównanie obu poziomów, rozpoczyna się od razu faza trzecia, którą obok pełnego wykorzystania mocy produkcyjnych charakteryzują rezerwy zasobów pracy.

5.1.3. Jeżeli $\tau_1 \neq 0, \tau_2 = T$, wtedy w procesie wzrostu występują dwie pierwsze fazy, faza pierwsza pełnego zatrudnienia przy niepełnym wykorzystaniu mocy produkcyjnych oraz faza druga równomiernego wzrostu przy pełnym zatrudnieniu i pełnym wykorzystaniu mocy produkcyjnych. (Zatrudnienie rośnie wolniej niż w poprzednim przypadku i stąd nie wyprzedza w ostatniej fazie wzrostu mocy produkcyjnych).

5.2. W chwili początkowej ma miejsce pełne wykorzystanie mocy i pełne zatrudnienie.

5.2.1. Jeżeli $\tau_1 = 0, \tau_2 \neq T$, wtedy w procesie wzrostu występuje faza druga (przedział $[0, \tau_2]$) i faza trzecia (przedział $(\tau_2, T]$); w tej fazie zatrudnienie rośnie szybciej niż moce produkcyjne, powodując wypadnięcie z fazy drugiej.

5.2.2. Jeżeli $\tau_1 = 0, \tau_2 = T$, wtedy cały proces wzrostu przebiega wzdłuż trajektorii wyznaczonych w fazie drugiej.

5.3. Niskie moce produkcyjne w chwili początkowej uniemożliwiają pełne zatrudnienie. Wtedy $\tau_1 \neq 0, \tau_2 = T$ i w procesie wzrostu występują dwie fazy.

W fazie pierwszej moce produkcyjne rosną szybciej niż zatrudnienie aż do momentu τ_1, kiedy to następuje wyrównanie i dalej w fazie drugiej produkcja rośnie przy pełnym wykorzystaniu mocy i pełnym zatrudnieniu.

W artykule prześledzono warunki optymalności procesów wzrostu w stacjonarnej, dwusektorowej gospodarce typu Leontiewa (ze stałymi macierzami A i B). Nie sprawia większych trudności przełożenie uzyskanych wyników na niestacjonarny wariant gospodarki ze zmiennymi współczynnikami macierzy $A(t)$ i $B(t)$ oraz z dowolną liczbą (n) sektorów. Rośnie tylko gwałtownie złożoność obliczeniowa samego problemu (w tym m.in. liczba wyróżnionych typów procesów wzrostu i ich faz).

Literatura

[1] E. Panek, *Teoria magistral*, Wyd. Akademii Ekonomicznej, Poznań 1995

[2] E. Panek, *Optymalizacja procesów wzrostu gospodarczego w świetle teorii sterowania*, PWN, Poznań 1989

[3] A. M. Ter-Krikorow, *Optimalnoje uprawlenije i matematiczeskaja ekonomika* Izd. „Nauka", Moskwa 1977

Matematiczeskaja ekonomika. Pod red. B. S.Mitjagina, Izd. „Mir", Moskwa 1974

[4] P. M. Kort, *Optimal dynamic investment policies of a value maximizing firm*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1989

BIBLIOTEKA AE w Poznaniu