Jerzy Muzalewski

ZASTOSOWANIE FUNKCJI TYPU „S" DO WYZNACZENIA TENDENCJI ROZWOJOWYCH CEN

W badaniach zjawisk społeczno-ekonomicznych bardzo ważne miejsce zajmuje analiza tendencji rozwojowych. Tendencja rozwojowa zwana trendem określa kierunek rozwoju badanego zjawiska w formie systematycznych i regularnych zmian w czasie. Zmiany te są wyrazem prawidłowości ilościowych badanego zjawiska ukształtowanych pod wpływem najbardziej ogólnych, istotnych i trwałych splotów przyczyn działających w badanym okresie czasu[1].

W statystyce i ekonometrii trend najczęściej określa się funkcją opisującą poziom zmiennej objaśnianej Y_t (t=1,2,...,N) w minionych okresach czasu (t), czyli:

$$Y_t = f(t). \tag{1}$$

W funkcji tej rolę jedynej zmiennej objaśniającej pełni czas (t). Fakt ten nie oznacza, że wpływ czasu był przyczyną zmian w poziomie badanej zmiennej Y_t. Jak podkreśla Z.Czerwiński zmiany wielkości Y_t w czasie następują dlatego, że cyt.: „wraz z upływem czasu zmianie uległy pewne inne wielkości, od których Y zależy", tym samym cyt.: „trend nie wyjaśnia więc dlaczego badana wielkość uległa zmianom"[2].

Obok trendu zmiany w poziomie badanego zjawiska mogą być wypadkową działania zmian okresowych i zmian przypadkowych. Zmiany przypadkowe (losowe) ξ_t wyrażają wpływ przyczyn ubocznych, a więc wpływ wszystkich bliżej nieokreślonych czynników oraz błędy specyfikacji funkcji trendu i metod estymacji ocen ich parametrów[3].

---

[1] Por. [9], s. 25, [15], s. 207 i [7], s. 85.

[2] Por. [2], s. 449.

[3] Por. [15], s. 210.

Jeśli założymy, że w badanych zjawiskach nie występują wahania okresowe, a trend z wahaniami losowymi powiązany jest addytywnie, to model tendencji rozwojowej można ogólnie zapisać:

$$Y_t = f(t) + \xi_t. \qquad (2)$$

Wyznaczenie trendu wymaga określenia odpowiedniej klasy funkcji. W literaturze najczęściej wyróżnia się dwie procedury wyboru klasy funkcji trendu[4]:

- procedurę krzywych wzrostu,
- procedurę analizy graficznej.

W procedurze krzywych wzrostu w oparciu o przesłanki teoretyczne sfery zjawisk ekonomicznych objętych przedmiotem badania formułujemy założenia w zakresie mechanizmu rozwoju badanego zjawiska w czasie. Wyrazem formalnym tych założeń, jest konstrukcja równania różnicowego bądź różniczkowego, a jego rozwiązanie daje krzywa wzrostu pełniąca rolę analityczną funkcji trendu. Z uwagi na to, iż na ogół znajomość teoretyczna prawidłowości rozwoju wielu zjawisk nie jest wystarczająca by zbudować odpowiednie równanie krzywej wzrostu, bądź też złożoność jego konstrukcji stwarza poważne trudności jego rozwiązania, procedurę tę rzadko można stosować w praktyce.

W procedurze analizy graficznej wybór klasy funkcji trendu opieramy na ocenie rozkładu punktów empirycznych badanej zmiennej Y_t i odpowiadających im okresach czasu w układzie współrzędnych, a następnie na hipotetycznym doborze takiej klasy funkcji, która by najlepiej opisywała kierunek zmian badanego zjawiska. W oparciu o analizę reszt dokonujemy oceny trafności wyboru klasy funkcji. Jeśli ciąg reszt ma charakter losowy, to hipotetycznie przyjętą funkcję można przyjąć za podstawę wyznaczenia tendencji rozwojowej badanego zjawiska. Procedura ta jest najczęściej stosowaną w badaniach statystyczno-ekonometrycznych.

Omówione procedury wyboru klasy funkcji trendu wymagają znajomości przebiegu badanej zmiennej w przeszłości. W niniejszym opracowaniu przedmiotem analizy tendencji rozwojowej są ceny detaliczne towarów konsumpcyjnych ogółem, żywności, alkoholu i towarów niekonsumpcyjnych nabywanych przez ludność w uspołecznionym handlu rynkowym w Polsce w latach 1975 do 1985[5]. Celem opracowania jest próba wyznaczenia tendencji rozwojowych cen, a więc określenie kierunku zmian cen i ich tempa zmian przy pomocy określonej klasy funkcji.

Przebieg zmian cen wymienionych artykułów przedstawiono graficznie na rycinach 1 do 4. Analiza ich przebiegu pozwoliła ustalić, że zmiany te rosną początkowo coraz szybciej do 1982 r., a następnie nieco wolniej i sądzić należy, że w ograniczonym przedziale czasowym dążyć będą do stag-

---

[4] Por. [15], s. 214-219 i [5], s. 72-76.

[5] Rocznik Statystyczny 1985, GUS, tabl. 2 (598), Ceny detaliczne 1971-1985, Materiały statystyczne nr 37, GUS 1985, tabl. 4.

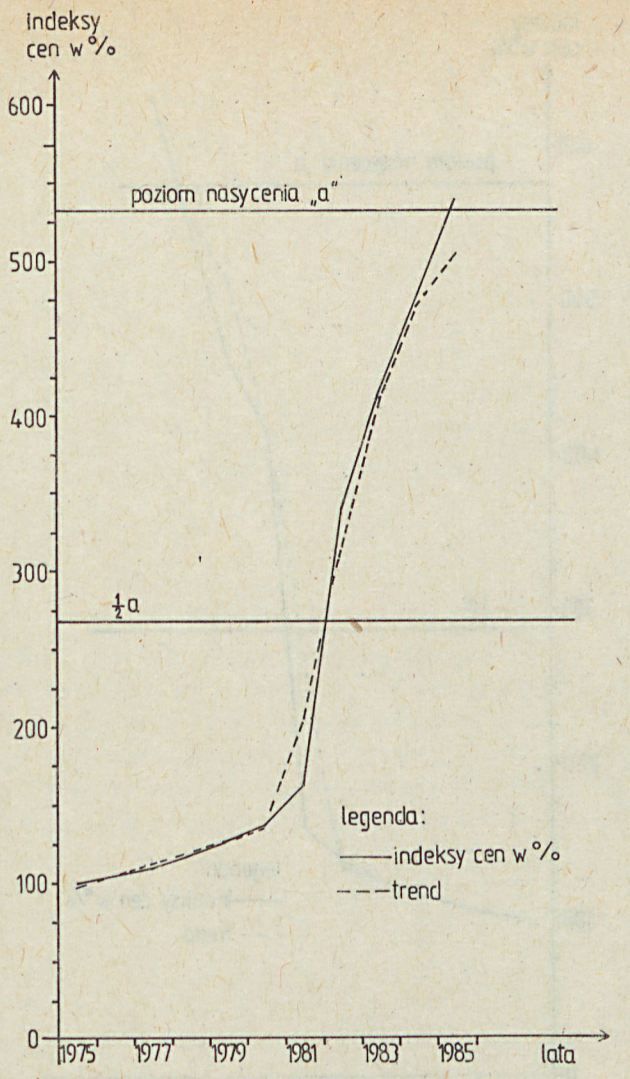
Tabela 1

Indeksy dynamiki cen detalicznych w uspołecznionym handlu rynkowym w Polsce w latach 1975-1985

Lata	Towary konsumpcyjne[a]		Żywność		Alkohol		Towary nieżywnościowe	
	1975=100	rok poprzedni 100	1975=100	rok poprzedni 100	1975=100	rok poprzedni 100	1975=100	rok poprzedni 100
1975	100,0	-	100,0	-	100,0	-	100,0	-
1976	104,0	104,0	102,7	102,7	100,0	100,0	105,8	105,8
1977	108,7	104,5	108,9	106,1	100,0	100,0	110,8	104,7
1978	117,8	108,4	115,8	106,3	119,0	119,0	118,8	107,2
1979	126,5	107,4	125,6	108,5	131,7	110,7	126,1	106,1
1980	137,3	108,5	138,2	110,0	138,6	105,2	136,7	108,4
1981	162,5	118,4	158,3	114,6	210,9	152,2	151,7	111,0
1982	340,3	209,4	416,2	262,8	401,7	190,5	281,2	185,4
1983	414,8	121,9	470,6	113,1	576,1	143,4	344,3	122,4
1984	474,9	114,5	550,2	116,9	604,3	104,9	400,2	116,2
1985	538,5[e]	113,4	634,9[d]	115,4	625,7[c]	103,6	467,0[b]	116,7

Źródło: Zmiany cen detalicznych 1971-1985, Statystyka Polski, Materiały Statystyczne 37, GUS, Warszawa 1985.

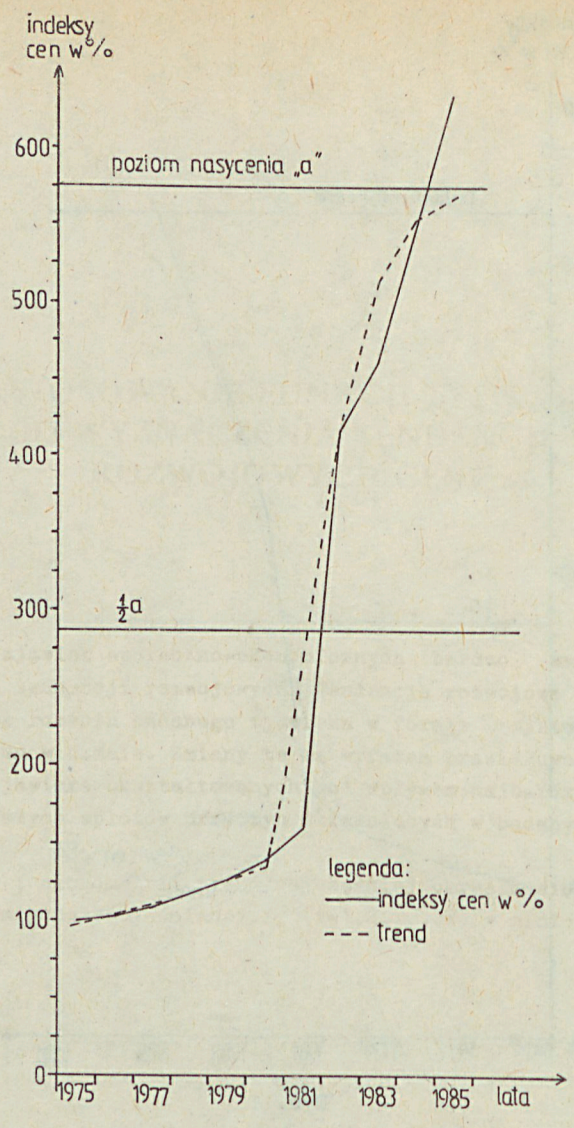
Objaśnienia: a - bez konsumpcji w zakładach gastronomicznych, b - ustalono szacunkowo w oparciu o realizację cen w II kwartale 1985 r. w porównaniu z II kwartałem 1984 r. Biuletyn Statystyczny GUS 1985 r., tabl. 16 s. 22, c - ustalono szacunkowo - zob. b, d - ustalono szacunkowo - zob. a, e - ustalono szacunkowo - zob. a.



Rys. 1

nacji określonej poziomem nasycenia. Ta charakterystyczna zmienność przebiegu kierunku poziomu cen pozwala sądzić, że przyjmuje ona postać krzywej wzrostu typu spłaszczonej litery „S". Wniosek ten uzasadniają postępujące zakłócenia równowagi rynkowej jakie miały miejsce w drugiej połowie lat siedemdziesiątych[6]. Zakłócenia te wyrażały się między innymi w wypaczaniu roli cen jako narzędzia planowania i zarządzania gospodarką, prowadząc tym samym do deformacji poziomu i struktury cen. Tym samym naruszono podstawowe i niezbędne proporcje między dochodami ludności, podażą dóbr i usług rynkowych, a poziomem i strukturą cen. Sytuacja ta

[6] Por. [18], s. 7-8 i 65.

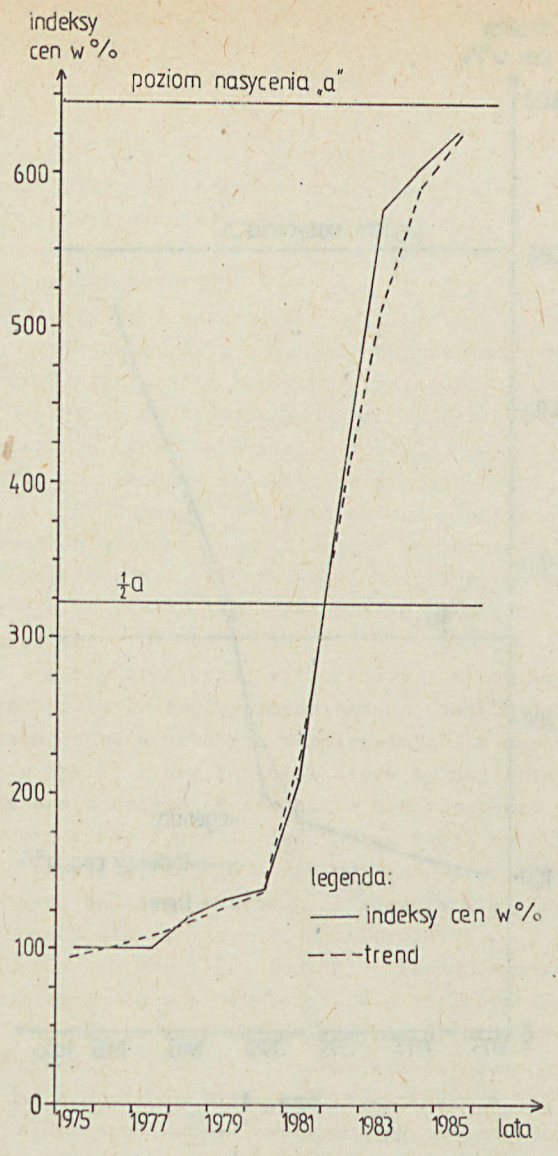


Rys. 2

spowodowała kryzys gospodarczy,który narzucił konieczność przeprowadzenia reform gospodarczych. W 1982 r. przeprowadzono reformę cen[7]. Celem reformy była odbudowa racjonalnej struktury cen, przywrócenie równowagi rynkowej w zakresie towarów i usług konsumpcyjnych oraz ograniczenie dotacji budżetowych do społecznie niezbędnych rozmiarów. Te cele polityki cen wymagały ścisłej synchronizacji z polityką płac i dochodów ludności oraz ze wzrostem podaży dóbr i usług rynkowych. W konsekwencji po 1982 r. zahamowano rosnące tempo wzrostu cen.

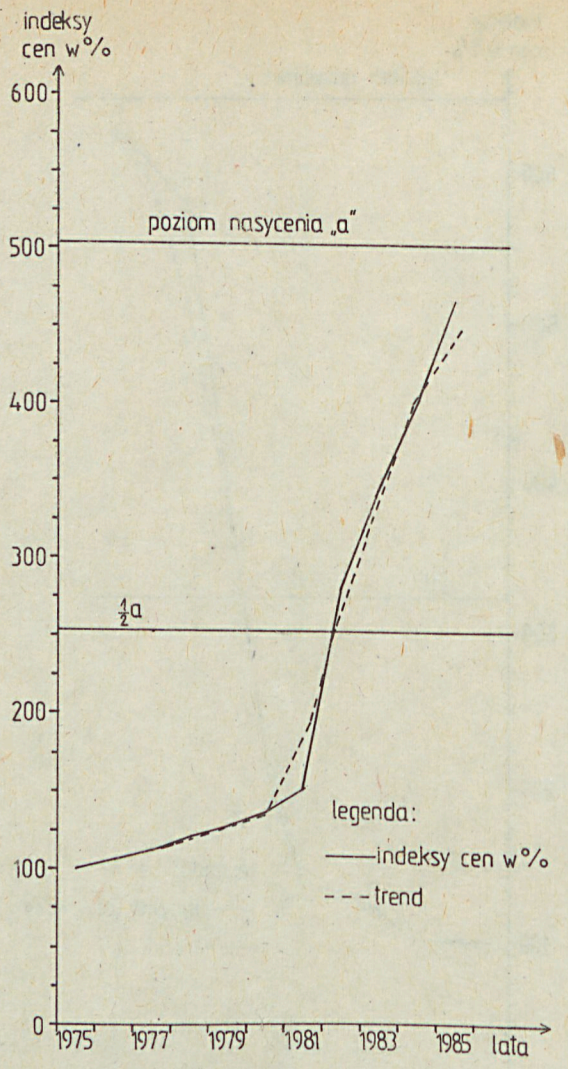
---

[7]Dziennik Ustaw, nr 7 z dnia 9 III 1982 r.



Rys. 3

Przedstawione rozważania na temat zmienności cen detalicznych w Polsce w latach 1975-1985 uzasadniają hipotezę, że tendencja rozwojowa cen ma kształt krzywej wzrostu typu spłaszczonej litery „S". Naprzeciw tej hipotezie wychodzi metoda analityczna wyodrębniania trendu z szeregu czasowego. Problemem natomiast jest wybór odpowiedniej klasy funkcji wzrostu typu „S" i ocena jej parametrów. Z problemem tym wiąże się kolejny problem - czy istnieje taka klasa funkcji wzrostu „S", która pozwoli w całości opisać tendencję rozwojową cen w badanym czasokresie, czy też należałoby wyznaczyć dwa trendy segmentowe. Wyznaczenie trendów seg-



Rys. 4

mentowych uzasadnia fakt, że krzywa cen w latach 1975-1979 cechuje się umiarkowanym rosnącym tempem wzrostu, natomiast silnie rosnące tempo wzrostu cen w latach 1980-1982 wyraźnie różni się od poprzedniego tempa.

W grupie krzywych wzrostu typu spłaszczonej litery „S" stosowanych w badaniu zjawisk społeczno-ekonomicznych wyróżnia się następujące krzywe[8]:

- krzywą logistyczną,
- krzywą Gompertza,
- krzywą Johnsona.

---

[8] Por. [19], s. 53-56.

Krzywa logistyczna najczęściej w literaturze określana jest wzorem[9]:

$$y_t = \frac{a}{1+be^{-ct}}, \qquad (3)$$

gdzie: y_t - wartość krzywej w punkcie t,
t - numer kolejny okresu lub momentu czasu (t=1,2,...,N),
a,b,c - parametry krzywej (a, b, c, $>$ 0),
a - poziom nasycenia.

Cechą charakterystyczną tej krzywej jest wzrost wartości y_t w tempie przyspieszonym w miarę gdy t dąży do punktu przegięcia ($t = \frac{\ln b}{c}$). W punkcie przegięcia wartość y_t równa się połowie poziomu nasycenia ($y_t = \frac{1}{2} a$). Gdy t przekracza punkt przegięcia i dąży do ∞, wartość y_t wzrasta w tempie malejącym i zbliża się asymptotycznie do poziomu nasycenia. Przebieg zmienności krzywej logistycznej wynika z właściwości jej tempa wzrostu. Otóż tempo wzrostu krzywej ($\frac{dy}{dt}\frac{1}{y_t}$) w każdym okresie czasu t jest proporcjonalne do osiągniętego wzrostu wartości y_t oraz do odległości tego wzrostu od poziomu nasycenia.

Wymienione własności krzywej logistycznej sprawiają, iż znajduje ona liczne zastosowania w badaniach wzrostu zjawisk ekonomicznych, demograficznych, biometrycznych, przyrodniczych i fizykochemicznych[10]. W grupie zastosowań ekonomicznych na czoło wysuwają się zastosowania tej krzywej do badań popytu na dobra trwałego użytku[11].

Parametry krzywej logistycznej nie można szacować bezpośrednio metodą najmniejszych kwadratów (MNK) z uwagi na jej nieliniowy charakter oraz na niedogodność transformacji liniowej. Problem ten rozwiązuje się przy pomocy metod estymacji przybliżonej, wśród których najczęściej wyróżnia się metodę Hotellinga, metodę Tintnera, oraz metody uproszczone trzech punktów i trzech sum[12].

Cechą charakterystyczną metody Hotellinga jest przekształcenie krzywej logistycznej do postaci, która pozwala otrzymać zależność liniową o parametrach będących prostymi funkcjami parametrów tej krzywej[13]. Hotelling równanie różniczkowe krzywej logistycznej zastąpił równaniem różnicowym, w którym stopa wzrostu jest funkcją liniową:

$$\frac{dy}{dt} : y_t = c - \frac{c}{a} y_t. \qquad (4)$$

---

[9] Właściwości algebraiczne krzywej logistycznej są powszechnie omawiane w literaturze ekonometrycznej, stąd pomijamy ich prezentacje. Por. np. [2], s. 457-458.

[10] Por. [9], s. 52-59, [5], s. 71, [19], s. 54-55, [13], s. 83-85, [24], s. 265-268, [17], s. 107-110, [8], s. 120-123, [1].

[11] Por. [13], s. 81-85, [1], [12], [8], s. 123-125 , [7].

[12] Por. [25], s. 128-161, [3], s. 152-154, [10], s. 22-28, [11], s.759-763.

[13] Por. prace [2], s. 457-458, [9], s. 52-59, [25], s. 129-140, [13], s. 83-85, [20].

Z uwagi na to, że nie obserwujemy bezpośrednio granicznych stóp wzrostu $(\frac{dy}{dt} : y_t)$ zastępujemy je dostatecznie przybliżonymi przyrostami względnymi:

$$A_t = \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} \approx \frac{dy}{dt} : y_t, \quad (t=1,2,\ldots,n), \tag{5}$$

gdzie: A_t - przyrosty względne y_t.

Z kolei jeśli do równania różnicowego (4) wprowadzimy oznaczenia

$$a_o = c \quad \text{oraz} \quad a = -\frac{c}{a_1} \tag{6}$$

to równanie (4) przybiera postać liniową:

$$A_t = a_c + a_1 y_t \tag{7}$$

Oceny parametrów tego równania szacujemy MNK. Z kolei oceny parametrów krzywej logistycznej c i a znajdujemy z relacji (6). W celu oszacowania parametru b krzywej logistycznej przekształcamy równanie (3) do postaci:

$$b = \frac{a - y_t}{y_t} e^{ct}, \tag{8}$$

a następnie stosując MNK szacujemy parametr b[14]:

$$b = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \frac{a - y_t}{y_t} e^{ct}. \tag{9}$$

Cechą charakterystyczną metody Tintnera jest określenie równania różnicowego I rzędu[15]. W koncepcji swej Tintner wychodzi z odwrotności krzywej logistycznej (z_t):

$$z_t = \frac{1}{y_t} = \frac{1 + be^{-ct}}{a}, \tag{10}$$

a następnie

$$z_{t+1} = \frac{1}{y_{t+1}} = \frac{1 + be^{-c(t+1)}}{a}. \tag{11}$$

Funkcję odwrotności z_t spełnia równanie różnicowe

$$z_{t+1} = e^{-c} z_t + \frac{1 - e^{-c}}{a}. \tag{12}$$

---

[14] Z.Misiaszek i S.Mynarski w pracy [12] podają zlogarytmowaną postać wzoru na ocenę parametru b. Postać tego wzoru posiada tę wadę, iż jeżeli któraś z wartości empirycznych y_t jest większa od poziomu nasycenia a, to oceny b nie można wyznaczyć. Postulat modyfikacji tego wzoru wysunął Z.Pawłowski w pracy [16] w związku z dyskusją poglądów W.Szwarca na temat warunków stosowania metody Hotellinga [22]. Problemowi temu wychodzi naprzeciw koncepcja Z.Czerwińskiego przedstawiona w pracy [2].

[15] Por. [23], s. 289-291.

Dla:

$$d = e^{-c} \quad \text{oraz} \quad q = \frac{1 - e^{-c}}{a}, \tag{13}$$

równanie to przyjmuje postać liniową:

$$z_{t+1} = dz_t + q. \tag{14}$$

Parametry tego równania szacujemy MNK. Z kolei ze związków (13) znajdujemy oceny parametrów c i a krzywej logistycznej[16]. Ocenę parametru b krzywej logistycznej szacujemy MNK w oparciu o przekształconą postać krzywej (10):

$$b = \frac{1}{n}(az_t - 1)e^{ct}. \tag{14a}$$

Metoda trzech punktów należy do grupy metod uproszczonych [6]. Cechą charakterystyczną tej metody jest estymacja ocen parametrów krzywej logistycznej w oparciu o trzy wyróżnione wartości zmiennej y_t, które położone są w równej odległości na osi odciętej, czyli spełniają warunek: $t_2 = 2t_1$ oraz $t_3 = 3t_1$.

H.Dietrich i O.Schmutzler w pracy [3] podali koncepcję metody trzech punktów, która umożliwia oszacowanie poziomu nasycenia przy pomocy wzoru[17]:

$$a = \frac{y_2^2 - y_1 y_2}{2y_2 - y_1 - y_3}, \tag{15}$$

gdzie: Y_1, Y_2, Y_3 - wybrane wartości zmiennej y_t dla punktów t_1, t_2, t_3 zmiennej czasowej t.

Parametry krzywej logistycznej b i c szacuje się MNK. W tym celu wychodzi się z odwrotności krzywej (3), po przekształceniu której dochodzimy do postaci:

$$\ln \frac{a}{y_t} - 1 = e^{\left(\frac{a}{y_t}-1\right)} = \ln b - ct, \tag{16}$$

która dla:

$$e^{\left(\frac{a}{y_t}-1\right)} = \overset{*}{Y}, \quad \ln b = B, \quad -c = C, \tag{17}$$

przyjmuje postać liniową:

$$\overset{*}{Y} = B + Ct. \tag{18}$$

---

[16] Por. [21].

[17] Z uwagi na to, że wybrane wartości Y_1, Y_2, Y_3 mogą być obciążone składnikiem losowym, zaleca się w miejsce wybranych wartości wyznaczyć średnie cząstkowe szeregu w ten sposób, by wybrane wartości Y_1, Y_2, Y_3 stanowiły wyrazy środkowe tych średnich. Procedura ta wymaga by badany szereg czasowy dzielił się na trzy części bez reszty, co w praktyce nie zawsze jest możliwe. W sytuacji gdy szereg nie spełnia tego warunku należy z niego odrzucić taką liczbę wyrazów (z jego początku) by warunek ten mógł być spełniony.

Z kolei oceny parametrów b i c krzywej logistycznej wyznaczamy z relacji (17).

M.Lesz w pracy [10] podał odmienną koncepcję metody trzech punktów dla krzywej logistycznej[18]. W metodzie tej zakłada się, że wartości zmiennej czasowej t tworzą postęp arytmetyczny, wówczas środkowa wartość zmiennej t jest średnią jej krańcowych wartości, czyli[19]:

$$t_1 = \frac{t_2+t_c}{2} .$$

Oceny parametrów krzywej logistycznej można wyznaczyć według wzorów:

$$a = \frac{Y_1^2(Y_o + Y_2) - 2Y_oY_1Y_2}{Y_1^2 - Y_oY_2} , \tag{19}$$

gdzie: Y_o, Y_1, Y_2 - wybrane wartości zmiennej y_t,

$$c = \frac{\lg \frac{(a - Y_1)Y_2}{(a - Y_2)Y_1}}{(t_2 - t_1)\lg e} , \tag{20}$$

$$b = e^{ct_1} \frac{a - Y_1}{Y_1} = e^{ct_2} \frac{a - Y_2}{Y_2} . \tag{21}$$

W metodzie tej zakłada się, że wartości zmiennej y_t dla tych punktów leżą dokładnie na krzywej logistycznej. Jak podkreśla M.Lesz, z uwagi na to, iż estymacja ocen parametrów tą metodą opiera się na arbitralnym wyborze trzech wartości, jest metodą nieścisłą. W celu wyeliminowania przypadkowości wyboru tych wartości zaleca się wcześniejsze wyrównanie szeregu czasowego jedną ze znanych metod statystycznych.

Z kolei F.C.Mills w pracy [11] podał koncepcję metody trzech sum S_1, S_2, S_3, którą zastosował do zmodyfikowanej funkcji logistycznej[20]:

$$y_t = \frac{1}{a + bc^t} , \quad (t=0,1,2,\ldots,n-1). \tag{22}$$

---

[18] W pracy [19] przygotowanej przez Grupę Organizacji Węgierskiej Akademii Nauk, s. 49 podano podobną koncepcję metody estymacji trzech punktów dla ocen parametrów zmodyfikowanej krzywej logistycznej Reeda i Parla.

[19] W pracy [17] A.Pietraszewski i W.Wagner podają odmienną koncepcję wyznaczania trzech punktów z szeregu. Spośród realizacji zmiennej czasowej t wybiera się dwa punkty krańcowe t_1 i t_n, a następnie wyznacza się punkt środkowy t_s. Z kolei dla punktów t_1 i t_n wyznaczamy z szeregu wartości Y_1 i Y_n, a wartość Y_s wyznaczamy metodą interpolacji liniowej:

$$Y_s = Y_{s-1} + \frac{Y_{s+1} - Y_{s-1}}{x_{s+1} - x_{s-1}} x_s - x_{s-1} .$$

[20] Podobną koncepcję metody estymacji trzech sum podali T.Grabiński, S.Wydymus i A.Zeliaś w pracy 6 , s. 66-70.

Krzywą tą dla potrzeb estymacji przedstawiamy w formie odwrotności:

$$\frac{1}{y_t} = a + bc^t. \tag{23}$$

Oceny parametrów tej funkcji szacujemy według wzorów:

$$c = \frac{d_2}{d_1}, \quad \text{gdzie: } d_2 = S_3 - S_2,\ d_1 = S_2 - S_1, \tag{24}$$

$$b = \frac{d_1(c-1)}{(c^n-1)^2}, \quad a = \frac{1}{n}\ S_1 - \frac{d_1}{c^n-1}.$$

Poziom nasycenia określamy jako odwrotność parametru a.

Krzywa Gompertza należy do grupy krzywych wzrostu typu spłaszczonej litery „S". Cechą charakterystyczną tej krzywej jest asymetryczny przebieg zmienności. Krzywa ta odzwierciedla rozwój zjawiska szybszy niż obrazowany przez krzywą logistyczną[21]. W literaturze krzywa Gompertza najczęściej określana jest w postaci[22]:

$$y = ab^{c^t}, \quad (t=0,1,2,\ldots,n). \tag{25}$$

Dla potrzeb estymacji postać krzywej (25) wyrażana jest w formie zlogarytmowanej:

$$\log y = \log a + (\log b)\, c^t. \tag{26}$$

Oceny parametrów tej krzywej najczęściej estymuje się metodą trzech punktów lub metodą trzech sum.

Krzywa Gompertza oprócz wymienionej już postaci (25) występuje także w następujących postaciach:

- M.Lesz w pracy [10] podaje następującą postać:

$$y = \frac{a}{b^{c^t}}, \tag{27}$$

- H.Dietrich i O.Schmutzler w pracy [3] oraz F.Förster i B.Rönz w pracy [4] podają następującą postać:

$$\log Y = \log a + bc^x, \tag{28}$$

- T.Grabiński, S.Wydymus i A.Zeliaś w pracy [5] podają postać:

$$y = e^{a+bc^t}. \tag{29}$$

F.C.Mills w pracy [11] podaje procedurę estymacji ocen parametrów krzywej (25) opartą na trzech sumach wartości logarytmów (S_1, S_2, S_3) zmiennej y_t szeregu czasowego. Każda suma cząstkowa szeregu stanowi 1/3

---

[21] Właściwości algebraiczne i poznawcze tej krzywej omówiono w pracy [14] i [19].

[22] Por. [14], s. 172-173, [11], s. 755.

kolejnych składników szeregu. Dla zlogarytmowanej postaci tej krzywej (26), gdzie t=0,1,2,...,N-1 F.C.Mills podaje następujące wzory estymacji parametrów:

$$c = \sqrt[n]{\frac{d_2}{d_1}}, \quad \text{gdzie: } n = N/3,\ d_1 = S_2 - S_1,\ d_2 = S_3 - S_2, \tag{30}$$

$$\log b = \frac{d_1(c-1)}{(c^n-1)^2}, \tag{31}$$

$$\log a = \frac{1}{a} S_1 - \frac{d_1}{(c^n-1)}. \tag{32}$$

Podobną koncepcję estymacji, z tym że dla trzech wybranych punktów oraz dla krzywej o postaci (27) podaje M.Lesz w pracy [10]. W koncepcji tej zakłada się, że wybrane punkty odciętej t_0, t_1, t_2 spełniają warunek: $t_1 = 2t_0$ oraz $t_2 = 3t_0$. Ponadto zakłada się, że wybrane trzy wartości y_0, y_1, y_2 leżą dokładnie na krzywej Gompertza. Oceny parametrów M.Lesz szacuje przy pomocy wzorów:

$$c^3 = \frac{\log y_1 - \log y_2}{\log y_0 - \log y_1}, \tag{33}$$

$$\log a = \frac{\log y_1 - c^3 \log y_0}{1 - c^3},$$

$$\log b = \frac{\log a - \log y_0}{c^3}.$$

Poziom nasycenia stanowi wartość oceny parametru a.

Z kolei H.Dietrich i O.Schmutzler w pracy [3] podają koncepcję metody trzech punktów opartą na trzech średnich dla krzywej Gompertza o postaci[23]:

$$\log y = \log a + bc^t, \quad (t=1,2,\ldots,N). \tag{34}$$

Postać ta po przekształceniu przyjmuje formę liniową:

$$\log(\log a - \log y) = \log(-b) + t \log c, \tag{35}$$

Ocenę parametru log a autorzy szacują według wzoru:

$$\log a = \frac{\log \bar{y}_2^2 - \log \bar{y}_1 \log \bar{y}_3}{2 \log \bar{y}_2 - \log \bar{y}_1 - \log \bar{y}_3}. \tag{36}$$

Poziom nasycenia stanowi ocena parametru a.

Z kolei autorzy proponują dwie procedury estymacji ocen parametrów b i c:
- w I procedurze proponują wyznaczyć te parametry MNK,

---

[23] T.Grabiński, S.Wydymus i A.Zeliaś w pracy [5], s. 67-70 podają podobną koncepcję metody trzech punktów opartą na wartościach średnich szeregu czasowego.

- w II procedurze proponują wyznaczyć te parametry metodą trzech punktów:

$$\log c = \frac{2}{N-n} \log \left(\frac{\log \bar{y}_3 - \log \bar{y}_2}{\log \bar{y}_2 - \log \bar{y}_1} \right),$$

$$\log b = \frac{(\log \bar{y}_2 - \log \bar{y}_1)^2}{2 \log \bar{y}_2 - \log \bar{y}_1 - \log \bar{y}_3} . \qquad (37)$$

Kolejną krzywą wzrostu typu „S" jest krzywa Johnsona:

$$y = 10^{\left(c - \frac{a}{b+x}\right)}, \quad (0 \leqslant x < +\infty). \qquad (38)$$

Krzywa ta po zlogarytmowaniu przyjmuje postać:

$$\log y = c - \frac{c}{b+x} . \qquad (39)$$

Właściwości krzywej:

- pierwsza pochodna $y' = \frac{a}{(b+x)^2 \ln 10 \cdot 10^{\left(c - \frac{a}{b+x}\right)}}$; jest stale dodatnia, co oznacza że jest stale rosnąca,
- druga pochodna $y'' = 0$ gdy $-2b-2x + \frac{a}{\ln 10} = 0$,
- krzywa ma punkt przegięcia dla współrzędnych:

$$x_i = \frac{a}{2 \ln 10} - b, \quad y_i = 10^{c-2\ln 10},$$

- gdy $x = 0$ to $y = 10^{\left(c - \frac{a}{b}\right)}$,
- krzywa ma asymptotę poziomą dla $y = 10^c$,
- parametry $b > 0$, $a > 0$ i $c > 0$.

Krzywa Johnsona jest rosnąca, przy czym zmienia swój przebieg. Na odcinku x_o do $x_i = \frac{a}{2\ln 10} - b$ krzywa jest wypukła w dół, z kolei na odcinku x_i do $+\infty$ krzywa jest wypukła w górę i dąży do poziomu nasycenia 10^c.

Oceny parametrów tej krzywej można oszacować metodą trzech punktów, bądź też można oszacować tą metodą tylko wartość parametru c, a z kolei parametry a i b można oszacować MNK. Opowiadając się za tą ostatnią koncepcją parametr c wyznaczamy przy pomocy wzoru:

$$c = \frac{\log y_1 \log y_3 - \log y_2^2}{\log y_1 + \log y_3 - 2 \log y_3} , \qquad (40)$$

gdzie: y_1, y_2, y_3 - wartości zmiennej y wybrane dla trzech punktów t_1, t_2, t_3.

W celu oszacowania parametrów a i b przekształcamy postać krzywej (40) do postaci liniowej:

$$\frac{1}{c - \log y} = \frac{b}{a} + \frac{1}{a} t, \quad \text{(za x podstawiono t)} \qquad (41)$$

Jeśli przyjmiemy, że:

$$\frac{1}{c - \log y} = Z, \quad \frac{b}{a} = \beta_0, \quad \frac{1}{a} = \beta_1, \tag{42}$$

to równanie (41) przyjmie postać:

$$Z = \beta_0 + \beta_1 t. \tag{43}$$

Parametry tego równania szacujemy MNK, a następnie podstawiając je do relacji (42) wyznaczamy oceny parametrów a i b krzywej Johnsona.

Stopień poprawności dopasowania krzywych wzrostu „S" do krzywych indeksów cen detalicznych oceniono przy pomocy współczynnika zbieżności φ^2. W modelach nieliniowych sprowadzalnych do liniowych badanie to przeprowadza się na pierwotnej postaci modelu. Ponadto jeśli posługujemy się modelem segmentowym trendu to badanie to przeprowadzamy cząstkowo dla każdego segmentu, a następnie łącznie dla zbioru segmentów.

Rozmiar błędu oszacowania trendu określono w oparciu o standardowy błąd szacunku:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} (Y_t - \bar{Y}_{(t)})^2}{n - k - 1}};$$

Z uwagi na brak możliwości oszacowania błędów ocen parametrów strukturalnych badanych krzywych wzrostu indeksów cen detalicznych nie można ocenić istotności oszacowanych parametrów. Problem ten uniemożliwia ocenę błędu prognozy, a w efekcie ogranicza stronę metodyczną i poznawczą budowanych prognoz.

Podjęcie próby doboru krzywych logistycznej, Gompertza i Johnsona do wyznaczenia tendencji rozwojowych indeksów cen detalicznych dla lat 1975--1985 nie dały pomyślnych rezultatów i to dla wszystkich stosowanych w niniejszym opracowaniu metod estymacji[24]. Przyczynę tej sytuacji badawczej należy upatrywać w niezgodności przebiegu zmienności indeksów cen z hipotetycznie przyjętymi krzywymi wzrostu oraz w niespełnieniu warunków stosowanych metod estymacji ocen parametrów tych krzywych.

Zmiany indeksów cen detalicznych badanych grup towarowych są rosnące (rys. 1-4), przy czym cechuje je także zmienność tempa wzrostu. W latach 1975 do 1982 miało miejsce rosnące tempo wzrostu cen, przy czym w okresie od 1975 r. do 1978 r. poziom tempa wzrostu cen był stosunkowo niski, z kolei w latach 1979 do 1982 poziom tempa wzrostu był bardzo wysoki. W dalszej kolejności w latach 1982 do 1985 tempo wzrostu cen było malejące, przy czym w latach 1982 do 1983 miał miejsce bardzo silny spadek tempa wzrostu cen, a z kolei w latach 1983 do 1985 natężenie spadku tempa wzrostu cen bardzo znacznie zmalało.

---

[24] Wyniki estymacji ocen parametrów były nie do przyjęcia (poziom nasycenia $Q < 0$), stąd nie prezentujemy ich w niniejszym opracowaniu.

Stosowanie każdej z metod estymacji ocen parametrów krzywych wzrostu wiąże się ze swoistym zakresem uwarunkowań. W.Szwarc w pracy [22] sformułował następujący warunek stosowania metody Hotellinga:

$$u < \sum \frac{\Delta Y}{Y} < v$$

gdzie:

$$u = \frac{N}{\Sigma Y} \sum \Delta Y, \qquad v = \frac{N Y_{N51} - \Sigma Y}{Y_{N+1} \Sigma Y - \Sigma Y^2} \sum \Delta Y.$$

Jeśli warunek ten nie jest spełniony, to nie można stosować metody Hotellinga. Warunek powyższy sprawdzono w badanych szeregach indeksów cen detalicznych dla lat 1975 do 1985 i otrzymano następujące rezultaty:

- dla towarów konsumpcyjnych

$$u = 2,104 > \sum \frac{\Delta Y}{Y} = 2,101,$$

- dla żywności

$$u = 2,563 > \sum \frac{\Delta Y}{Y} = 2,339,$$

- dla alkoholu

$$u = 2,295 > \sum \frac{\Delta Y}{Y} = 2,118,$$

- dla towarów nieżywnościowych

$$u = 1,96 > \sum \frac{\Delta Y}{Y} = 1,84.$$

Powyższe wyniki jednoznacznie wykazują, że w tych sytuacjach badawczych nie można stosować metody Hotellinga.

Kolejna metoda Tintnera oparta jest na transponowanej postaci równania liniowego (16):

$$z_{t+1} = q + dz_t.$$

Oceny parametrów tego równania wyznaczane są MNK. Jak wynika z właściwości funkcji logistycznej parametry tej funkcji $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Spełnienie tych warunków nakłada swoiste wymagania na parametry równania (16). Otóż muszą być spełnione warunki:

$$0 < d < f = \frac{\frac{1}{Y_{N+1}} - \frac{1}{Y_1}}{\sum z_t} + 1, \qquad (Y_{N+1} > Y_1)$$

oraz $q > 0$.

Powyższe warunki nie są spełnione w zakresie badanych szeregów indeksów cen detalicznych dla lat 1975 do 1985. I tak na przykład dla szeregu indeksów cen detalicznych:

- towarów konsumpcyjnych $f = 0,877 < d = 0,985$,
- towarów nieżywnościowych $f = 0,884 < d = 0,993$.

Wyniki weryfikacji warunku stosowania metody Tintnera pozwalają wnioskować, iż metody tej nie można stosować do badanych szeregów indeksów cen.

Kolejną metodą estymacji jest metoda trzech punktów (średnich lub sum cząstkowych). Metoda ta stosowana była do estymacji parametrów krzywej logistycznej, Gompertza i Johnsona. Cechą charakterystyczną tej metody jest szacowanie w pierwszym etapie poziomu nasycenia, a więc parametru a. W wyniku badań ustalono, że jeśli pomiędzy trzema wybranymi wartościami z szeregu Y_1, Y_2 i Y_3 lub sumami cząstkowymi szeregu S_1, S_2 i S_3 zachodzą następujące nierówności:

$$Y_2 - Y_1 < Y_3 - Y_2$$

lub w zakresie sum cząstkowych

$$S_2 - S_1 < S_3 - S_2$$

nie można oszacować tą metodą parametru a. Tym samym nie można oszacować tą metodą parametrów hipotetycznie przyjętych krzywych wzrostu. Ponadto należy podkreślić, że jest to właściwość metody trzech punktów, która działa niezależnie od postaci krzywej wzrostu S. Weryfikację powyższego warunku przeprowadzono przykładowo dla cen detalicznych:

- towarów konsumpcyjnych

$$Y_2 - Y_1 = 37,3 < Y_3 - Y_2 = 401,2$$

oraz

$$S_2 - S_1 = 135,0 < S_3 - S_2 = 1224,2,$$

- żywności

$$Y_2 - Y_1 = 38,2 < Y_3 - Y_2 = 496,7$$

oraz

$$S_2 - S_1 = 226,3 < S_3 - S_2 = 1534,0.$$

Powyższe wyniki wskazują, iż nie można do badanych szeregów stosować metody trzech punktów.

Przedstawione rozważania w zakresie możliwości wyznaczenia tendencji rozwojowych indeksów cen detalicznych dla lat 1975 do 1985 wykazały, że metody Hotellinga, Tintnera i trzech punktów oraz krzywe logistyczna, Gompertza i Johnsona nie mogą być stosowane. W tej sytuacji wydaje się celowe podjęcie próby wyznaczenia tendencji segmentowych.

Analiza przebiegu krzywych indeksów cen detalicznych na rys. 1-4 pozwala wyodrębnić dwa charakterystyczne podokresy zmian, to jest:
- okres zmian cen w latach 1975-1980,
- okres zmian cen w latach 1980-1985.

Wyróżnione podokresy zmian cen uzasadniają przyjęcie założenia, iż zmiany cen w latach 1965 do 1985 można opisać przy pomocy trendu dwusegmentowego.

Przebieg zmian cen detalicznych badanych grup towarowych w latach 1975-1980 (rys. 1-4) pozwala sądzić, iż ich przebieg można opisać zmodyfikowaną krzywą wykładniczą[25].

$$Y_t = b_o e^{b_1 t}, \quad (t=1,2...,n)$$

Funkcja ta dla $b_1 = 0$ jest funkcją rosnącą. Funkcja ta po zlogarytmowaniu przyjmuje postać liniową:

$$\ln Y = \ln b_o + b_1 t.$$

Jeśli przyjmiemy: $Z = \ln Y$, $\ln b_o = \beta_o$, $b_1 = \beta_1$, to powyższe równanie przyjmuje postać liniową:

$$Z = \beta_o + \beta_1 t,$$

Oceny parametrów β_o i β_1 estymujemy MNK, a z kolei po wstawieniu ich do przyjętych relacji otrzymujemy oceny parametrów krzywej wykładniczej.

Wyniki estymacji krzywej wykładniczej dla segmentu 1 indeksów cen detalicznych zamieszczono w tablicy 2. O dobrym stopniu zgodności tej krzywej świadczą bardzo niskie wartości współczynników zbieżności $0.001 < \varphi^2 < 0.077$. Średnia roczna stopa wzrostu cen w latach 1975 do 1980 w zakresie towarów konsumpcyjnych wynosi 6,4%, przy czym najwyższa średnia roczna stopa wzrostu miała miejsce w zakresie cen alkoholu 7,5%, na drugim miejscu kształtuje się stopa wzrostu żywności 6,5%, natomiast nieco niżej stopa wzrostu cen towarów nieżywnościowych 6,2%.

Z kolei zmiany cen detalicznych badanych grup towarowych w latach 1980-1985 (rys. 1-4) pozwalają sądzić, iż ich przebieg można opisać krzywymi logistyczną, Gompertza i Johnsona. Przyjęcie w drugim segmencie trendu krzywych wzrostu typu „S" uzasadnia ponadto fakt, iż silny wprawdzie w tym okresie wzrost cen nie może być nieskończony, tym bardziej iż w latach 1983 do 1985 pojawiły się symptomy spadku tempa wzrostu cen. Tym samym sądzić należy, iż wzrost cen dążyć będzie do poziomu nasycenia, a właściwość ta jest cechą krzywych wzrostu.

Wyniki estymacji krzywej logistycznej dla segmentu 2 trendu indeksów cen detalicznych badanych grup towarowych metodami Hotellinga, Tintnera i trzech punktów w wersjach Millsa, Lesza i Dietricha-Schmutzlera zamieszczono w tablicy 2. O bardzo wysokim stopniu zgodności tej krzywej świadczą bardzo niskie wartości współczynników zbieżności $0{,}001 < \varphi^2 < 0{,}114$. Najlepsze wyniki zgodności uzyskano stosując metodę Hotellinga i metodę trzech sum cząstkowych Millsa, nieco gorsze wyniki zgodności uzyskano stosując metodę Tintnera i metodę Lesza.

Wyniki estymacji krzywej logistycznej metodą Hotellinga i metodą Tintnera nasuwają pewną refleksję. Otóż z punktu widzenia stopnia zgodności metoda Hotellinga dała wyraźnie lepsze wyniki estymacji od metody Tintnera, natomiast z punktu widzenia metodologicznego metoda Tintnera jest poprawniejszą metodą estymacji. Ponadto oszacowany poziom nasycenia metodą Hotellinga jest najniższy z oszacowanych poziomów innymi metodami

[25] Por. [3], s. 231-233.

Tablica 2

Wyniki estymacji parametrów trendu segmentowego dla indeksów cen detalicznych w uspołecznionym handlu rynkowym w Polsce w latach 1975-1985 (1975 = 100)

Grupy towarowe	Segment 1 trendu -f.wykładn.-MNK				Segment drugi trendu - funkcja logistyczna								Mierniki zgodności trendu segmentowego ogółem	
	Oceny parametrów		Mierniki zgodności trendu		Postać funkcji logistycznej	Metoda estymacji	Oceny parametrów			Poziom nasycenia	Mierniki zgodności trendu			
	$\hat{b}_0$	$\hat{b}_1$	$s_{y,1}$	φ_1^2			$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$		$s_{y,2}$	φ_2^2	s_y	φ^2
Towary konsumpcyjne	91,80	0,064	2,42	0,017	L-1	Hotellinga	532,5	8,378	0,8347	532,5	34,57	0,031	23,60	0,013
					L-1	Tintnera	846,0	7,569	0,4497	846,0	48,75	0,053	31,82	0,025
					L-2	Millsa	0,184	0,690	0,4141	544,1	39,93	0,035	25,16	0,016
					L-3	Lesza	420,1	249,0	1,5751	546,6	52,00	0,060	34,09	0,029
					L-1	Dietricha[a]	676,0	7,268	0,5754	676,0	39,09	0,034	25,60	0,016
Żywność	91,09	0,065	3,21	0,029	L-1	Hotellinga	574,2	10,934	1,1270	574,2	78,29	0,088	51,17	0,043
					L-1	Tintnera	882,4	8,192	0,5071	882,4	74,11	0,079	48,40	0,038
					L-2	Millsa	0,161	0,762	0,3546	619,31	51,88	0,038	32,69	0,017
					L-3	Lesza	553,4	28,68	0,9632	680,0	66,66	0,063	42,06	0,029
					L-1	Dietricha[a]	744,9	9,220	0,6717	744,9	60,05	0,052	39,30	0,025
Alkohol	87,47	0,075	6,25	0,077	L-1	Hotellinga	645,2	11,993	0,9699	645,2	40,95	0,022	26,16	0,029
					L-1	Tintnera	875,6	8,952	0,5371	875,6	76,40	0,078	50,01	0,106
					L-2	Millsa	0,156	0,653	0,3546	642,4	36,70	0,018	23,94	0,024
					L-3	Lesza	495,2	241,4	1,9136	626,9	7,14	0,001	5,75	0,001
					L-1	Dietricha[a]	699,5	8,177	0,7711	699,5	49,12	0,032	32,31	0,044
Towary nieżywnościowe	93,24	0,062	1,28	0,001	L-1	Hotellinga	502,8	6,032	0,6357	502,8	27,82	0,026	17,44	0,012
					L-1	Tintnera	868,0	8,629	0,3606	868,0	58,21	0,114	37,90	0,055
					L-2	Millsa	0,2026	0,660	0,4943	493,6	28,40	0,027	17,41	0,012
					L-3	Lesza	350,81	265,6	1,5200	476,9	41,50	0,058	27,13	0,028
					L-1	Dietricha[a]	739,8	7,118	0,4291	739,8	29,68	0,030	19,42	0,014

Objaśnienia: a - koncepcja Dietricha i Schmutzlera, L-1 - funkcja określona wzorem (3), L-2 - funkcja określona wzorem (24), L-3 - funkcja określona wzorem (29).

Tablica 3

Wyniki estymacji parametrów funkcji Gompertza i funkcji Johnsona dla indeksów cen detalicznych w uspołecznionym handlu rynkowym w Polsce w latach 1975-1985 (1975 = 100)

Grupy towarowe	Segment drugi trendu									Mierniki zgodności modelu trendu segmentowego ogółem	
	Funkcja	Metoda estymacji parametrów	Oceny parametrów			Poziom nasycenia	Mierniki zgodności trendu - segment 1				
			$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$		S_y	φ_1^2		S_y	φ^2
Towary konsumpcyjne	G-1	Millsa	582,4	0,1762	0,567	582,4	39,37	0,034		23,30	0,0134
	G-2	Lesza	576,2	49,71	0,367	576,2	48,13	0,051		31,54	0,0245
	G-3	Dietrich[a]	582,4	-1,417	0,556	582,4	39,92	0,035		22,34	0,0123
	J	"	6,413[b]	3,654[b]		576,2	80,59	0,144		52,61	0,0681
Żywność	G-1	Millsa	655,6	0,140	0,514	655,6	61,37	0,054		37,38	0,0227
	G-2	Lesza	604,8	340,6	0,503	604,8	83,84	0,101		54,91	0,0490
	G-3	Dietrich[a]	655,6	-2,053	0,476	655,6	65,74	0,062		36,91	0,022
	J	"	6,406[b]	3,626[a]		604,8	118,87	0,202		77,68	0,098
Alkohol	G-1	Millsa	663,7	0,161	0,487	663,7	49,04	0,032		30,73	0,040
	G-2	Lesza	779,3	89,98	0,620	779,3	52,70	0,037		34,74	0,051
	G-3	Dietrich[a]	663,7	-1,608	0,487	663,7	50,08	0,034		31,67	0,043
	J	"	6,644[b]	3,753[b]		779,3	88,11	0,104		57,77	0,142
Towary nieżywnościowe	G-1	Millsa	530,8	0,197	0,653	530,8	29,72	0,030		17,26	0,011
	G-2	Lesza	561,2	17,93	0,699	561,2	35,89	0,043		23,51	0,021
	G-3	Dietrich[a]	530,8	-1,163	0,621	530,8	32,46	0,036		17,78	0,012
	J	"	6,435[b]	3,687		561,2	48,92	0,081		32,04	0,039

Objaśnienia: a - koncepcję metody podali Dietrich i Schmutzler, b - z uwagi na zbyt duże liczby podano ich wartości logarytmów, funkcja G-1 określona wzorem (37), funkcja G-2 określona jest wzorem (38), funkcja G-3 określona jest wzorem (39), funkcja J oznacza funkcję Johnsona (49)

estymacji, natomiast poziom nasycenia oszacowany metodą Tintnera jest najwyższy z oszacowanych, a w porównaniu do metody Hotellinga jest od 30% do 50% wyższy. Z kolei porównując oszacowane poziomy nasycenia indeksów cen z realizacjami tych indeksów w latach 1984 i 1985 oraz z planowanym wzrostem cen detalicznych w 1986 r. o 8%, poziom nasycenia oszacowany metodą Hotellinga wydaje się być zaniżony, natomiast poziom nasycenia oszacowany metodą Tintnera wydaje się być bardziej prawdopodobny. Rozstrzygnięcie problemu, który z poziomów nasycenia jest poprawnie oszacowany wymaga motywacji merytorycznej mechanizmu kształtowania indeksów cen detalicznych w czasie. Z uwagi na to,iż rozwiązanie tego problemu wychodzi poza ramy niniejszego opracowania, ocenę wyników estymacji chwilowo ograniczamy do kryterium formalno-statystycznego zgodności - a tym samym wybieramy wyniki estymacji metodą Hotellinga.

Z kolei wyniki estymacji parametrów krzywej Gompertza metodą trzech punktów w wersjach Millsa, Lesza oraz Dietricha-Schmutzlera dla segmentu 2 trendu indeksów cen detalicznych badanych grup towarowych zamieszczono w tablicy 3. Dla krzywej Compertza otrzymano także bardzo wysoki stopień zgodności tej krzywej, o czym świadczą bardzo niskie współczynniki zbieżności $0{,}030 \leqslant \varphi^2 \leqslant 0{,}101$. Najlepsze wyniki estymacji otrzymano stosując wersję Millsa, a następnie wersję Dietricha-Schmutzlera. Wersja Lesza dała nieco gorsze wyniki zgodności, przy czym różnice te są zapewne rezultatem także zmodyfikowanej konstrukcji tej krzywej (38).

Kolejne wyniki estymacji parametrów krzywej Johnsona metodą trzech punktów w wersji Dietricha-Schmutzlera zamieszczono w tablicy 3. Wyniki zgodności tej krzywej są wysokie, bowiem współczynniki zbieżności przyjmują wartości $0{,}081 \leqslant \varphi^2 \leqslant 0{,}202$.

Porównując wyniki estymacji parametrów krzywych logistycznej Gompertza i Johnsona dla segmentu 2 trendu, najlepsze wyniki zgodności otrzymano dla krzywej logistycznej, następnie dla krzywej Gompertza i w końcu dla krzywej Johnsona. Jednakże podkreślić należy, iż różnice w zakresie stopnia zgodności krzywych logistycznej i Gompertza są nieznaczne, natomiast są one wyraźne w porównaniu z wynikami zgodności krzywej Johnsona.

Przedstawione wyniki analizy porównawczej stopnia zgodności oszacowanych krzywych wzrostu metodami Hotellinga, Tintnera i trzech punktów wykazały, iż najlepszą krzywą wzrostu dla potrzeb wyodrębnienia trendu segmentu 2 indeksów cen detalicznych badanych grup towarowych jest funkcja logistyczna, której parametry oszacowano metodą Hotellinga. Przebieg trendów dla segmentu 2 badanych grup towarowych zamieszczono na rys.1-4. Analizując przebieg zmienności trendów w latach 1980-1982 obserwujemy bardzo silne rosnące tempo wzrostu indeksów cen, przy czym dla towarów konsumpcyjnych średnio roczne tempo wzrostu wynosiło 52,3%, dla żywności 50,7%, dla alkoholu 66,4%, a dla towarów nieżywnościowych 44,9%. W 1982 r. wystąpiło przegięcie poziomu wzrostu indeksów cen dla badanych grup towarowych. Stąd w latach 1982-1985 wystąpił spadek tempa wzrostu indeksów cen, przy czym średnio roczne tempo wzrostu dla towarów konsump-

cyjnych wynosiło 23,6%, dla żywności 25,4%, dla alkoholu 24,5%, a dla towarów nieżywnościowych 21%.

Pozytywne cząstkowe wyniki analizy trendów segmentu 1 i segmentu 2 pozwoliły zaakceptować hipotezę o budowie trendu segmentowego dla indeksów cen badanych grup towarowych. Wyniki stopnia zgodności krzywych trendów segmentowych z realizacjami krzywych indeksów cen zamieszczono w tablicach 2 i 3.

W efekcie zmiany indeksów cen detalicznych badanych grup towarowych w latach 1975-1985 opisano trendem segmentowym przy pomocy zmodyfikowanej funkcji wykładniczej i funkcji logistycznej. Bardzo wysoki stopień zgodności tego trendu, wymaga z kolei podjęcia rozważań merytorycznych w zakresie mechanizmu rozwoju cen detalicznych w czasie. Rozważania te powinny doprowadzić do formalnej konstrukcji odpowiednich równań różniczkowych i różnicowych indeksów cen, a tym samym powinny potwierdzić merytorycznie zasadność wyznaczonych analitycznie trendów segmentowych.

Literatura

[1] Barczak A.: Badanie trendów popytu niektórych dóbr trwałego użytkowania, Zeszyty Naukowe WSE w Katowicach, nr 21/1965.

[2] Czerwiński Z.: Matematyka na usługach ekonomii, PWN - Warszawa 1972, wyd. III.

[3] Dietrich H. i Schmutzler O.: Statistische Methoden in der Marktforschung, Verlag die Wirtschaft, Berlin 1968.

[4] Forster E. i Rönz B.: Methoden der Korrelations und Regressions analyse, Verlag die Wirtschaft, Berlin 1979.

[5] Grabiński T., Wydymus S., Zeliaś A.: Modele ekonometryczne w procesie w prognozowania, Wyd. AE, Kraków 1978.

[6] Hellwig Z.: Aproksymacja stochastyczna, PWE, Warszawa 1965.

[7] Praca zbiorowa pod red. Z.Hellwiga, Zarys ekonometrii, PWE, Warszawa 1970, wyd. II.

[8] Kudrycka I.: Metody ekonometrycznej analizy popytu na dobra trwałego użytku, PWN, Warszawa 1969.

[9] Lange O.: Wstęp do ekonometrii, PWN, Warszawa 1961, wyd. II.

[10] Lesz M.: Matematyczna optymalizacja w programowaniu rozwoju przemysłu, PWE, Warszawa 1972.

[11] Mills F.C.: Statistical Methods, New York 1955, Edition III.

[12] Misiaszek Z., Mynarski S.: Zastosowanie funkcji logistycznej do badania stanu posiadania dóbr trwałych, Handel Wewnętrzny 1964 nr 6.

[13] Mynarski S.: Analizy rynku, PWN, Warszawa 1977.

[14] Kryński H.: Matematyka wyższa z elementami zastosowań w ekonomii, PWN, Warszawa 1977, wyd. II.

[15] Pawłowski Z.: Ekonometria, PWN, Warszawa 1978, wyd. V.

[16] Pawłowski Z.: Uwagi o warunkach wyznaczania trendu logistycznego, Przegląd Statystyczny 1967, z. 1.

[17] Pietraszewski A., Wagner W.: Ekonometria rolnicza, Wyd. AR Poznań 1975.
[18] Popkiewicz J.: Ceny a reforma gospodarcza, Ossolineum 1984.
[19] Polska 2000. Poradnik metodologiczny prognozowania. Ossolineum 1978.
[20] Smaga E.: Analiza rozwiązania równania Hotellinga, Prace Naukowe AE we Wrocławiu, 1979 nr 160/182.
[21] Stanisz T.: Analiza porównawcza metody Hotellinga i Tintnera wyznaczania parametrów funkcji logistycznej, Folia Oecon. Cracov. 1980, t. 23.
[22] Szwarc W.: Uwagi o metodzie tempa wzrostu, HW 1966, nr 2-3.
[23] Tintner G.: Handbuch der Ökonometrie, 1960, tłum. w j.rosyjskim, Moskwa 1965.
[24] Trembecki A.: Matematyczne metody w górnictwie, Wyd. „Śląsk" 1969, Katowice.
[25] Stanisz T.: Funkcje jednej zmiennej w badaniach ekonomicznych, PWN, Warszawa 1986.