EDMUND IGNASIAK

OPTYMALNA REALIZACJA PRZEDSIĘWZIĘCIA INWESTYCYJNEGO W WARUNKACH OGRANICZONEGO RYZYKA

1. Wprowadzenie

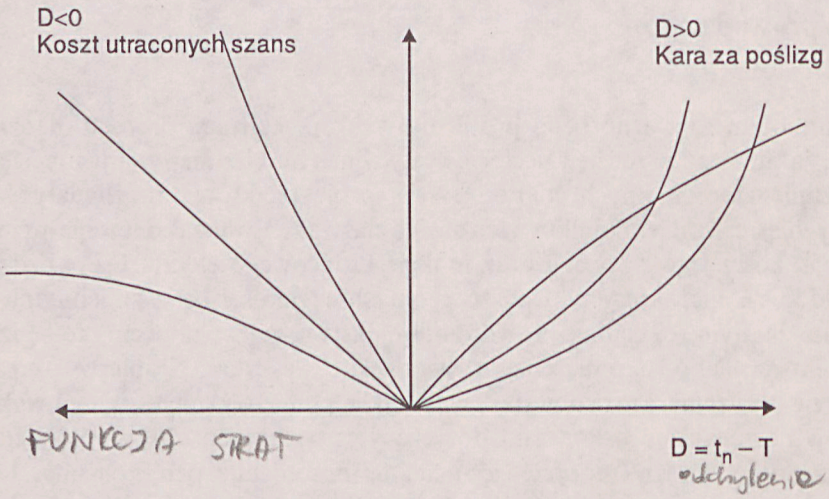
Przedmiotem rozważań będą problemy wyboru realizacji procesu nieregularnego, jakim jest przedsięwzięcie inwestycyjne. Dokładniej zajmiemy się wyznaczaniem optymalnych charakterystyk projektu, które umożliwiałyby jego efektywną realizację. Do głównych z nich należą: termin zakończenia przedsięwzięcia, koszt jego realizacji oraz funkcje krańcowego efektu. Dalej będziemy zakładać, że charakterystyki poszczególnych czynności będą zmiennymi losowymi o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa, zatem założenia te będziemy formułować jako ograniczenia w warunkach ryzyka. Najpierw określimy sytuacje decyzyjne, które powstają w układzie pomiędzy inwestorem a wykonawcą, w negocjacjach o kontrakt dotyczący optymalnego terminu, a następnie pokażemy, co można uczynić, jeśli ten termin zostaje przekroczony. Przedstawiamy tutaj propozycję alokacji dodatkowych środków inwestycyjnych umożliwiających skrócenie tego terminu w sensie wartości oczekiwanej.

2. Optymalny termin zakończenia przedsięwzięcia w warunkach ryzyka — zawieranie kontraktów

Rozważmy sytuację układu gospodarczego, w którym firma zamierza dokonać inwestycji w celu uruchomienia nowej produkcji. Realizacja tego przedsięwzięcia związana jest z dwoma konkurencyjnymi celami: minimalizacją kosztów i minimalizacją czasu. W układzie tym funkcjonują dwa podmioty gospodarcze: firma (inwestor) oraz wykonawca. Oba te podmioty preferują wyżej

wymienione cele. Istota problemu sprowadza się do zawarcia **kontraktu** pomiędzy nimi. Podstawą do takiego porozumienia jest projekt przedsięwzięcia inwestycyjnego. Jednym z podstawowych elementów projektu jest termin zakończenia realizacji zamierzenia. Chodzi o „optymalne" określenie terminu T oddania obiektu inwestycyjnego do eksploatacji. Wszelkie odchylenia od tego terminu związane są ze stratami, które ponosi wykonawca na rzecz inwestora. Straty te wyrażone są określoną funkcją, którą nazywać będziemy **funkcją strat**. Oczywiście postać analityczna tej funkcji związana jest z pewną klasą przedsięwzięcia i nie ma ona charakteru uniwersalnego (nie jest prawem). Niemniej jednak istnieje empiryczne uzasadnienie dla pewnych własności takiej funkcji. W naszym przypadku dla postulowanej funkcji strat przyjmujemy własności znane w neoklasycznej teorii ryzyka: [1], [2].

Obrazowo postać takiej funkcji przedstawia rysunek 1.



Rys. 1

O funkcji tej będziemy zakładać, że:

1. przy zakończeniu przedsięwzięcia w dokładnie wyznaczonym terminie ($t_n = T$) wartość jej równa się zero ($k_r = 0$, gdzie przez k_r będziemy oznaczać koszty ryzyka),

2. jeżeli termin zakończenia różni się od T ($t_n \neq T$), to wartość funkcji strat jest różna od zera,

3. przy rosnącym odchyleniu $D = (t_n - T)$, tj. wzroście różnicy odchyleń od umownego terminu (*in plus* lub *in minus*) wartość funkcji strat nie będzie malała, a co najmniej przedziałami będzie rosła. Zatem nasza funkcja strat przyjmuje postać analityczną:

koszty ryzyka

$$k_r = \begin{cases} f_p(D) & \text{dla } D<0, \\ f_n(D) & \text{dla } D>0, \\ 0 & \text{dla } D=0, \end{cases}$$

przy czym

$$f_p(D+k) \geqslant f_p(D) \quad \text{dla} \quad k>0$$

oraz

$$f_n(D+k) \geqslant f_n(D) \quad \text{dla} \quad k<0.$$

Przypadek, w którym $D<0$, będziemy nazywać **kosztem utraconych szans**, a w którym $D>0$ – **karą za niedotrzymanie terminu** (karą za poślizg). Charakterystykę kosztów ryzyka, jak już wspomnieliśmy, obrazuje rysunek 1.

W układzie, $D>0$ (kara za poślizg) reprezentuje cały system kar umownych związanych z opóźnieniem terminu ukończenia przedsięwzięcia. Natomiast układ $D<0$ reprezentuje sytuację, w której realizujemy zamierzenie przed terminem i ponosimy koszty będące różnicą pomiędzy korzyściami, które uzyskalibyśmy kończąc obiekt w terminie a dodatkowymi środkami, które należy ponieść przyspieszając termin realizacji. Oszacowanie parametrów takiej funkcji można dokonać za pomocą znanych metod estymacji modeli ekonometrycznych kosztów.

Istota problemu polega na takim określeniu terminu zakończenia przedsięwzięcia, aby spełniony był warunek

$$P\{|D|>d_g\}<p_q, \quad \text{gdzie} \quad D=t_n-T,$$

przy czym poszczególne elementy oznaczają:

d_g – graniczne „duże" odchylenie,
p_q – graniczne „niewielkie" prawdopodobieństwo,
t_n – losowy termin zakończenia przedsięwzięcia,
p – prawdopodobieństwo.

Określenie t_n ma podstawowe znaczenie dla zawarcia kontraktu lub negocjacji co do zmiany warunków. Nasuwa się pytanie, jak można wyznaczyć czas zakończenia przedsięwzięcia? Wyobraźmy sobie przedsięwzięcie, którego struktura opisana jest grafem prostym $\langle V, U\rangle$, gdzie wierzchołek $i \in V$ $(i=0,\ldots,m)$ oznacza zdarzenia, a $\langle i, j\rangle \in U$ – czynności. Dalej będziemy zakładać, że graf ten jest uporządkowany topologicznie, tj. spełniony jest warunek $(i \prec j) \rightarrow (i<j)$ dla zdarzeń i czynności. Załóżmy najpierw, że są one określone w sposób deterministyczny. Problem wyznaczania ścieżki krytycznej sprowadza się do rozwiązania zadania maksymalnego przepływu w sieci, tj.[1] [4], [8]:

[1] Dla uproszczenia zapisu indeksy i oznaczają zdarzenia, a indeksy j czynności. Zakładamy tutaj, że zarówno zdarzenia, jak i czynności są uporządkowane topologicznie [3]. Dla czynności przyjmijmy też oznaczenia jednoindeksowe.

$$\text{MAX} \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \tag{2.1}$$

przy warunkach

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = a_i \quad \text{dla} \quad i=0,1,\ldots,m,$$

$$x_j \geqslant 0,$$

gdzie

$$a_i = \begin{cases} +1 & \text{dla } i=0, \\ -1 & \text{dla } i=m, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

$B=\{b_{ij}\}_{m\times n}$, b_{ij} to elementy macierzy incydencji grafu $\langle V, U\rangle$ zwanej macierzą Bellmana-Kalaby, t_j zaś oznaczają czas czynności j-tej.

Zadaniu temu odpowiada zadanie dualne o postaci

$$\text{MIN} \sum_{i=0}^{m} a_i \mu_i, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=0}^{m} \mu_i b_{ij} \geqslant t_j \quad \text{dla} \quad j=1,\ldots,n.$$

Wiadomo bowiem, że wartość funkcji celu tego zadania przy warunkach (2.2) daje górną granicę oszacowania czasu ścieżki krytycznej całego projektu, a więc terminu jego zakończenia. Oczywiście zadania można rozwiązać równocześnie za pomocą algorytmu maksymalnego przepływu o złożoności obliczeniowej $O(|V|^3)$ arytmetycznych operacji.

Rozważmy taki przypadek, w którym t_j są zmiennymi losowymi o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa. Z zasady liniowości oraz struktury podgrafów wynika, że jeżeli parametry t_j są zmiennymi losowymi, to μ_i też są zmiennymi losowymi. Wobec tego można rozkłady μ_i wyrazić poprzez rozkłady t_j występujące w ograniczeniach.

Można do tego problemu podejść nieco inaczej, postępując od końca, tj. od zdarzenia końcowego do początkowego. Wartości μ_i będziemy interpretować jako prawdopodobieństwa odpowiadające występowaniu czynności kończącej się w zdarzeniu o tej wartości. Dla wyznaczenia rozkładów μ_i należy zatem rozwiązać zadanie liniowego programowania stochastycznego o postaci

$$\text{MIN} \sum_{i=0}^{m} \mu_i a_i \tag{2.3}$$

przy ograniczeniach

$P(\sum_{i=0}^{m} \mu_i b_{ij} \geqslant t_j) \geqslant \beta_j$ (gdzie $0 \leqslant \beta_j \leqslant 1$), oznacza z góry dane prawdopodobieństwo dla $j=1,\ldots, n$.

Rozwiązanie tego zadania sprowadza się do wyznaczenia momentów rozpoczęcia czynności, których prawdopodobieństwo zakończenia w danym przedziale nie będzie mniejsze od β_j. Liczbę tę będziemy nazywać **gwarantowanym ryzykiem dla j-tej czynności.**

Z zadania tego można przejść do ekwiwalentnej względem (2.3) deterministycznej wersji o postaci:

$$\text{MIN} \sum_{i=0}^{m} \mu_i a_i \tag{2.4}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=0}^{m} \mu_i b_{ij} \geqslant F_j^{-1}(\beta_j) \quad \text{dla} \quad j=1,\ldots, n.$$

Oczywiście liczba $F_j^{-1}(\beta_j)$ jest kwantylem związanym z β_j.

Zadanie dualne względem (2.4) przyjmuje postać

$$\text{MAX} \sum_{j=1}^{n} F_j^{-1}(\beta_j) x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = a_i \quad \text{dla } i=0, 1, \ldots, m, \tag{2.5}$$

$$x_j \geqslant 0.$$

Nietrudno zauważyć, że zadanie (2.5) wykazuje analogię do zadania (2.1). Sens przeprowadzonego zabiegu sprowadza się do rozpatrywania deterministycznej wersji zadania stochastycznego poprzez rozwiązania zadań z parametrami, które są kwantylami z rozkładu. Podejście takie jest znane w teorii programowania stochastycznego, [5].

Jednak trzeba przyznać, że z punktu widzenia obliczeniowego proces rozwiązywania może być kłopotliwy, między innymi z uwagi na złożoność obliczeniową $O(|V|^3)$. Mocną stroną propozycji jest interpretacja zmiennych dualnych x_j w zadaniu (2.5). Mówią one, o ile zwiększy się wartość funkcji kryterium w (2.4), jeżeli gwarantowane ryzyko czynności zostanie przekroczone o jednostkę.

3. Optymalizacja ryzyka niedotrzymania terminu zakończenia przedsięwzięcia

Dotrzymanie przez wykonawcę terminu zakończenia przedsięwzięcia często bywa wyrażone przez czynniki niepewne, tj. takie, które ujawniają się dopiero w czasie realizacji. Mówimy wówczas, że losowość takich parametrów, jak: czas wykonania czynności, efektywność nakładów oraz elementów określających technologię generalną kreuje ryzyko dotrzymania warunków kontraktu. Spróbujmy rozpatrzyć to zagadnienie. Projekt, który będzie przedmiotem naszych zainteresowań, opisany będzie siecią stochastyczną $\langle V, U, P\rangle$ o następujących własnościach:

– graf $\langle V, U\rangle$ jest spójny, ma dokładnie jeden wierzchołek początkowy i co najmniej dwa wierzchołki końcowe,

– na zbiorze U określona jest funkcja P, gdzie $0<p_{ij}<1$ oraz $\sum_j p_{ij}=1$, wartości jej będziemy interpretować jako prawdopodobieństwa realizacji czynności (i, j). Mówiąc intuicyjnie, wszystkie wierzchołki i łuki, z wyjątkiem wierzchołka początkowego, są losowe,

– każda czynność $(i, j)\in U$ może być wykonywana w tempie normalnym, a jej czas trwania jest zmienną losową $f_{ij}(t_{ij})$ o wartości oczekiwanej l_{ij},

– każda czynność $(i, j)\in U$ może być wykonywana w trybie awaryjnym, a jej czas trwania jest zmienną losową $\hat{f}_{ij}$ o wartości oczekiwanej $\hat{l}_{ij}$,

– koszt wykonywania czynności jest monotonicznie nierosnącą funkcją czasu trwania[2] T_{ij}

$$C_{ij}=h_{ij}(T_{ij}). \tag{3.1}$$

Naturalne wydaje się założenie, że, dla danego wolumenu inwestycji, T_{ij} jest zmienną losową o określonej średniej i wariancji.

Zatem im większy jest wolumen inwestycji, tym mniejsza wartość parametrów: średniej i wariancji.

Z założenia T_{ij} jest zmienną losową, zatem C_{ij} też jest zmienną losową.

Oznaczmy odpowiednio wartości oczekiwane T_{ij} oraz C_{ij}

$$E(T_{ij})=\mu_{ij}, \tag{3.2}$$

$$E(C_{ij})=\gamma_{ij}.$$

Dla rozpatrywanej sieci $\langle V, U, P\rangle$ przyjmijmy założenia, znane w analizie sieci GERT[3], które należą do klasy sieci markowowskiej:

---

[2] Najczęściej przyjmuje się, że jest funkcją malejącą.

[3] Graphical Evaluation and Review Technique. Zob. [5], [6].

– prawdopodobieństwo realizacji zdarzenia j jest funkcją wyłącznie prawdopodobieństwa przejścia p_{ij} ze zdarzenia i,

– czas oczekiwany realizacji dowolnego wierzchołka j jest funkcją p_{ij} oraz czasów oczekiwanych μ_{ij}.

Oznaczmy przez $n_1, n_2, \ldots, n_l$ zdarzenia (wierzchołki) losowe, przy czym założenie o uporządkowaniu topologicznym jest utrzymane. Ponadto przyjmijmy

P_{n_i} – prawdopodobieństwo realizacji wierzchołka n_i dla $i=1,\ldots, L$,

T_{n_i} – czas wykonania podzbioru czynności potrzebnych do realizacji n_i,

C_{n_i} – nakład inwestycyjny (koszt) podzbioru czynności potrzebny do osiągnięcia n_i, gdy wierzchołek ten zostaje zrealizowany.

Przedstawmy P_{n_i}, $E(T_{n_i})$ oraz $E(C_{n_i})$ jako funkcje parametrów rozkładu zmiennych losowych T_{ij} oraz C_{ij}.

$$\begin{aligned} P_{n_i} &= q_1(p_{ij}), \\ E(T_{n_i}) &= q_2(p_{ij}, \mu_{ij}), \quad \text{gdzie} \quad \mu_{ij} = E(T_{ij}), \\ E(C_{n_i}) &= q_3(p_{ij}, v_{ij}), \quad \text{gdzie} \quad v_{ij} = E(C_{ij}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że skrócenie czasu trwania czynności (przyspieszenia tempa wykonania czynności względem czasu normalnego) pociąga za sobą poniesienie dodatkowych inwestycji o wielkości r_{ij}. W rezultacie takiego działania powinno nastąpić przesunięcie rozkładu czasu trwania w kierunku początku osi współrzędnych o pewną wielkość zależną od „wrażliwości" średniego czasu trwania na dodatkową inwestycję.

Niech skrócenie średniego czasu wykonania czynności (i, j) będzie funkcją dodatkowej inwestycji r_{ij}, wówczas „nowe" średnie $\hat{\mu}_{ij}$ oraz $\hat{\gamma}_{ij}$ przyjmują postać:

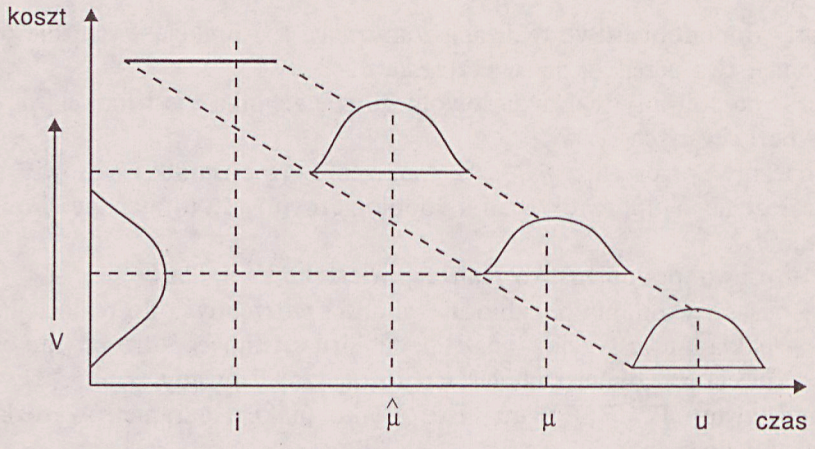
$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{ij} &= \mu_{ij} - \varphi(r_{ij}), \\ \hat{\gamma}_{ij} &= E[\hat{C}_{ij}(r_{ij})] = E[h_{ij}(\hat{T}_{ij})] + r_{ij}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Zwróćmy uwagę, że „uaktualniony" nakład jest funkcją określoną przez (3.4), której wartość oczekiwana określona jest przez formułę zamieszczoną także w (3.4).

Relacje pomiędzy wartościami oczekiwanymi funkcji czasu oraz funkcji kosztów ilustruje rysunek 2.

Jeżeli równania (3.4) podstawimy do (3.3), to otrzymamy (3.5):

$$\begin{aligned} P_{n_i} &= q_1(p_{ij}), \\ E[\hat{T}_{n_i}] &= q_2(p_{ij}, \hat{\mu}_{ij}) = q_2(p_{ij}, \mu_{ij}, r_{ij}), \\ E[\hat{C}_{n_i}] &= q_3(p_{ij}, \hat{v}_{ij}) = q_3(p_{ij}, v_{ij}, r_{ij}). \end{aligned} \tag{3.5}$$



Rys. 2

Spróbujmy ograniczyć zależność typu (3.5) do pewnej klasy funkcji. Załóżmy, że funkcje h_{ij} z równania (3.1) oraz φ z równania (3.4) dadzą się aproksymować za pomocą funkcji liniowej, oczywiście w pewnym obszarze, wówczas średnie $\hat{\mu}_{ij}$ oraz $\hat{\gamma}_{ij}$ przyjmują postać:

$$\hat{\mu}_i = \mu_{ij} + q_{ij} r_{ij} \quad \text{dla} \quad q_{ij} < 0, \tag{3.6}$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = E[s_0 + sT_{ij}] + r_{ij} \quad \text{dla} \quad s > 0;\ s_0 \geqslant 0, \tag{3.7}$$

gdzie $q_{ij} < 0$ można interpretować jako krańcową redukcję czasu trwania czynności na jednostkę zainwestowanych środków, parametr s zaś jest współczynnikiem kątowym liniowej aproksymanty funkcji h_{ij}.

Równania (3.6) oraz (3.7) umożliwiają nam określenie postaci analitycznych funkcji zawartych w (3.5). Jak już zauważyliśmy, rozpatrywana sieć $\langle V, U, P \rangle$ jest siecią należącą do klasy sieci markowowskiej, w której istnieją ścieżki pełne od zdarzenia początkowego do wyróżnionego zdarzenia końcowego. Są to ścieżki rozbieżne. Oznaczmy dla k-tej ścieżki pełnej: przez P^k – prawdopodobieństwo jej realizacji, a przez $T^{(k)}$ – czas przejścia po k-tej ścieżce k.

Ponadto załóżmy, że $T^{(k)}$ jest sumą niezależnych zmiennych losowych T_{ij} czynności należących do k-tej ścieżki pełnej.

Tak więc $T_{n_i} = \sum_k P^{(k)} T^{(k)} / P_{n_i}$, tzn. że jest wypukłą kombinacją skończonej liczby zmiennych losowych.

Zatem mamy

$$E(T_{n_i}) = E\left\{\sum_k (P^k / P_{n_i}) T^{(k)}\right\} = \left\{\sum_k (P^{(k)} / P_{n_i}) E(T^k)\right\} =$$

$$= \sum_k (P^{(k)} / P_{n_i}) \sum_{(i,j) \in \Pi^{(k)}} \mu_{ij}. \tag{3.8}$$

Z kolei zastępując $\hat{\mu}_{ij}=\mu_{ij}+q_{ij}r_{ij}$ uzyskujemy

$$E(\hat{T}_{n_i})=E(T_{n_i})+\sum_k (P^{(k)}/P_{n_i}) \sum_{(i,j)\in\Pi^{(k)}} q_{ij}r_{ij}=E(T_{n_i})-\alpha_{ij}r_{ij}, \tag{3.9}$$

gdzie

$$\alpha_{ij}=-q_{ij}\sum_{k\supset(i,j)}(P^k/P_{n_i})>0.$$

Natomiast nadzieja matematyczna kosztów wykonania n_i przyjmuje postać

$$E(\hat{C}_{n_i})=E(C_{n_i})+\beta_{ij}r_{ij},$$

gdzie

$$\beta_{ij}=b_{ij}\sum_{k\supset(i,j)}(P^{(k)}/P_{n_i})>0. \tag{3.10}$$

Zauważmy, że w równaniach (3.9) oraz (3.10) występuje r_{ij} – zmienna określona w sposób nieostry jako dodatkowe nakłady inwestycyjne. Spróbujmy dokonać identyfikacji tych zmiennych.

Załóżmy, że T_{ij} – czas trwania czynności (i, j) – ma funkcję rozkładu $F_r(t)$. Natomiast pierwotną funkcję rozkładu oznaczmy przez $F_0(t)$.

Wobec tego oczekiwany koszt danej czynności γ wynosi:

$$\gamma=\int_a^b h(t)\,dF_0(t),$$

gdzie a, b – granice wartości czasu trwania czynności przy danym

$$\mu=\int_a^b t\,dF_0(t).$$

Natomiast $\hat{v}$ przyjmie postać

$$\hat{v}=r+\int_a^b h(\hat{t})\,d\hat{F}_r(\hat{t}).$$

Rozpatrzmy przypadek, w którym $\hat{v}>v$. Interpretacja ekonomiczna jest prosta: oczekiwany koszt czynności jest mniejszy od kosztu przed przydziałem dodatkowego wolumenu inwestycji. Oznacza to, że oszczędności w kosztach spowodowane redukcją czasu więcej niż kompensują dodatkową inwestycję o wolumenie r. Istnieje zatem dodatkowa porcja środków inwestycyjnych v_0 określona przez wyrażenie

$$v_0=\min\left\{r+\int_a^b h(\hat{t})\,dF_r(\hat{t})\right\} \quad \text{dla} \quad 0<r<\alpha.$$

Wynika z tego wniosek, że czynności (i, j) powinno się przydzielić dodatkową kwotę v_0, niezależnie od postulatu redukcji oczekiwanego czasu wykonania

całego projektu. Prowadzi to do końcowego wniosku, że porcja podstawowa dowolnej dodatkowej inwestycji zawiera takie v_o, że uśredniony koszt wykonania czynności wzrasta, każda zaś dodatkowa porcja środków inwestycyjnych w dowolnej czynności powoduje redukcję całkowitego czasu wykonania czynności należących do podsieci związanych z realizacją wyróżnionego zdarzenia finalnego. Dalej przypuśćmy, że stan realizacji projektu po pewnym czasie ujawnia fakt, że przedział czasu, w którym dane czynności powinny być wykonane, został oszacowany zbyt rozwlekle. Tym samym prawdopodobieństwo realizacji wyróżnionych zdarzeń finalnych w określonym terminie jest zbyt małe.

Należy wówczas sformułować następujący problem: jaki powinien być rozdział dodatkowego zasobu finansowego K pomiędzy czynności, by prawdopodobieństwo realizacji wyróżnionego wierzchołka końcowego w danym terminie było maksymalne.

Rozważmy przypadek, w którym występuje jeden wyróżniony wierzchołek n_i.

Oznaczmy przez τ dany termin realizacji projektu, tzn. że przedsięwzięcie powinno być wykonane w horyzoncie $[0, \tau]$.

Sformułujmy liniowe zadanie programowania stochastycznego postaci:

$$\text{MAX}\, P\{T_{n_i}(r_{ij}) \leqslant \tau\}$$

przy warunkach

$$(*) \qquad \sum_{\langle i,j \rangle} r_{ij} \leqslant K, \tag{3.11}$$

$$(**) \qquad 0 \leqslant r_{ij} \leqslant \bar{r}_{ij} \quad \text{dla } \langle i, j \rangle \text{ w pozostałych podsieciach,}$$

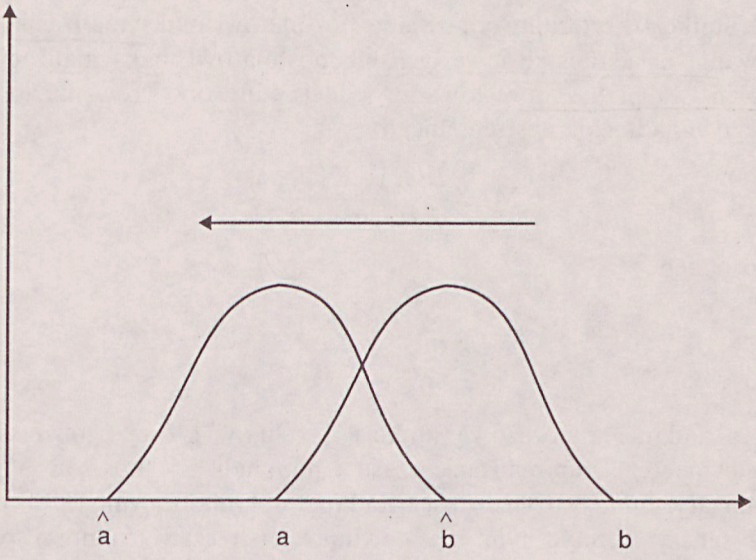
gdzie $\bar{r}_{ij}$ oznacza górną granicę przydziału kwoty środków inwestycyjnych czynności $\langle i, j \rangle$.

Dla realności zadania zakłada się, że $\bar{r}_{ij} \leqslant K$ oraz że $\sum \bar{r}_{ij} > K$.

W praktyce w wielu przypadkach taka postać modelu może być niewygodna. Zmiana postaci analitycznej funkcji – celu (3.11) z wyrażenia na prawdopodobieństwo na funkcję wyrażającą czas trwania jest możliwa. Wiadomo już, że czas trwania ciągu czynności kończących się wierzchołkiem n_i jest zmienną losową postaci

$$T_{n_i} = \sum_{\langle i,j \rangle \in \Pi^k} P^k \cdot T^k / P_{n_i}.$$

Jak już zauważyliśmy, przydział dodatkowej kwoty $r_{ij} > 0$ powoduje przesunięcie funkcji rozkładu czasu na „lewo", tak że nowy uśredniony czas trwania $\hat{\mu}_{ij}$ jest odpowiednio krótszy od pierwotnego uśrednionego czasu trwania μ_{ij} czynności $\langle i, j \rangle$, co obrazowo ilustruje rysunek 3. Właściwość tę sformułujemy w postaci następującego twierdzenia.



Rys. 3

TWIERDZENIE. *Jeżeli T_{ij} jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, to*

$$P\{\hat{T}_{n_t} \leqslant t\} = \hat{F}_r(t) > P[T_{n_t} \leqslant t] = F_r(t).$$

Łatwo zauważyć, że z ciągłości i z założenia liniowej zależności $\hat{\mu}_{ij}$ od r_{ij} wyrażenie $P\{\hat{T}_{ij} \leqslant t\}$ rośnie ze wzrostem r_{ij}, a zatem $P\{\hat{T}_{n_t} = t\}$ jest też ciągłą i monotoniczną funkcją r_{ij}. W związku z tym kryterium na maksymalizację $P\{\hat{T}_{n_t}(r_{ij}) \leqslant t\}$ można zamienić na funkcję – celu postulującą minimalizację $E(T_{n_t})$. Ostatecznie otrzymujemy nowe zadanie ekstremalne postaci

$$\text{MAX}\, E(T_{n_t}) - E(\hat{T}_{n_t})$$

przy warunkach

$$(*) \qquad \sum_{\langle i,j \rangle} r_{ij} \leqslant K, \tag{3.12}$$

$$(**) \qquad 0 \leqslant r_{ij} \leqslant \bar{r}_{ij} \quad \text{dla } \langle i, j \rangle \text{ w podsieciach.}$$

W dotychczasowych rozważaniach nie uświadamialiśmy sobie konsekwencji przypadku, gdy dwie różne kwoty nakładów inwestycyjnych dają tę samą maksymalną redukcję czasu trwania projektu. Rozważmy ten przypadek. Załóżmy, że dwie kwoty $K_1 \leqslant K$ oraz $K_2 \leqslant K$, przy $K_1 < K_2$, dają tę samą redukcję czasu. Powstaje wówczas pytanie, czy odpowiadające tym kwotom programy są równoważne. Intuicja podpowiadałaby, że programy te nie są ekwiwalentne. Spróbujmy dać odpowiedź na to pytanie.

Niech funkcja kryterium odpowiada postulatowi maksymalizacji redukcji czasu trwania na jednostkę inwestycji lub postulatowi maksymalizacji prawdopodobieństwa przy zainwestowaniu jednej jednostki. Prowadzi to do następującego zagadnienia ekstremalnego:

$$\text{MAX}\frac{E(T_{n_i})-E\{\hat{T}_{n_i}(r)\}}{E\{\hat{C}_{n_i}(r)-EC_{n_i}\}}$$

przy warunkach

$$\sum_{\langle i,j\rangle} r_{ij}\leqslant K, \tag{3.13}$$

$$0\leqslant r_{ij}\bar{r}_{ij}.$$

Jest to zadanie z ilorazową funkcją – celu, w której „godzi się" dwa konkurencyjne cele: minimalizację czasu i minimalizację kosztów – poprzez maksymalizację funkcji użyteczności. Zadanie optymalizacyjne (3.13) przynajmniej w sensie teoretycznym nie powinno nastręczać trudności przy ich rozwiązaniu. Jest ono jednak niewygodne z uwagi na dużą liczbę informacji, którą należy uzyskać i przetworzyć, aby otrzymać niezbędne wartości parametrów. Spróbujmy tę trudność pokonać, wykorzystując pewne własności sieci GERT, [5]. Oznaczmy prawdopodobieństwo funkcji generującej zmienną losową T_v przez $M_v(s)=E[e^{sT_v}]$.

Niech w – funkcja dla czynności v – będzie określona przez $w(v)=p_vM_v(s)$. Wówczas łuk przekształcony $(1, n_i)$, czyli zawierający wierzchołek początkowy i wierzchołek finalny ma funkcję, którą można otrzymać, stosując procedurę GERT.

Zgodnie z tą procedurą mamy:

$$P_{n_i}=w(0,n_i)\ \wedge\ M_{n_i}(s)=w(s,n_i)/w(0,n_i),$$

gdzie $w(s,n_i)$ jest w-funkcją „zlepionego" łuku $(1, n_i)$, a

$$M_{n_i}(s)=E[e^{sT_{n_i}}].$$

Wnioskujemy zatem, że

$$E(T_{n_i})=\frac{d}{d_s}M_{n_i}(s)\qquad |s=0,$$

natomiast

$$E[\hat{T}_{n_i}(r)]=\frac{d}{d_s}M_{v,n_i}(s)\qquad |s=0.$$

Dalej korzystać będziemy z własności:

(1*) własność: $E[\hat{T}_{n_i}(r)]$ jest liniową funkcją r_{ij},

(2*) własność: $E(\hat{C}_{n_i})$ jest liniową funkcją r_{ij}.

To, co powiedzieliśmy o funkcjach $E[\hat{T}_{n_i}(r)]$ oraz $E(\hat{C}_{n_i})$, umożliwi nam transformację zadania (3.13) w zadanie postaci:

$$\text{MAX} \frac{\sum_v \alpha_v r_v}{\sum_v \beta_v r_v}, \tag{3.14}$$

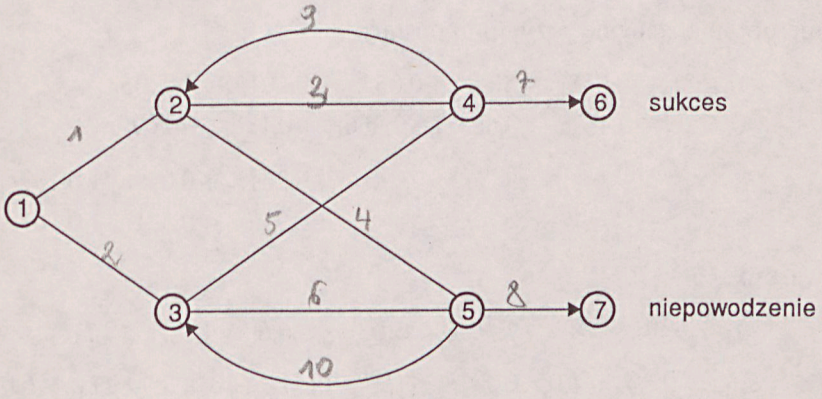
$$\sum_v r_v \leqslant K,$$

$$0 \leqslant r_v \leqslant \bar{r}_v.$$

Jest to zadanie programowania hiperbolicznego, które daje się rozwiązywać zmodyfikowaną metodą simpleks.

Przykład [5]:

Rozważmy projekt przedsięwzięcia opisany siecią stochastyczną, którą przedstawia rysunek 4 oraz tabela 1.



Rys. 4

Tabela 1

Nr	Czynności	μ_{ij}	u_{ij}	$-q_{ij}$	s_{ij}	v_{ij}	$\bar{r}_{ij}$
1	⟨1,2⟩	3	1,5	0,2	1,2	5,0	7,5
2	⟨1,3⟩	5	2,5	0,1	1,4	4,0	25,0
3	⟨2,4⟩	4	2,0	0,3	1,8	4,0	6,6
4	⟨2,5⟩	5	2,5	0,3	0,8	4,0	8,3
5	⟨3,4⟩	4	2,0	0,4	1,5	6,0	5,0
6	⟨3,5⟩	5	3,0	0,2	1,0	5,0	1,0
7	⟨4,6⟩	6	3,0	0,2	1,5	9,0	15,0
8	⟨5,7⟩	7	3,5	0,5	2,0	9,0	7,0
9	⟨4,2⟩	2	1,0	0,1	1,5	3,0	10,0
10	⟨5,3⟩	4	1,0	0,5	0,5	2,0	6,0

$$\bar{r}_{ij} = (u_{ij} - \mu_{ij})/q_{ij}$$

Interesować nas będzie sukces reprezentowany przez wierzchołek n_6.

Przyjmujemy, że na realizację opóźnień projektu mamy 10 mld zł, funkcja generująca zaś ma rozkład normalny o średniej μ i wariancji δ^2 dla momentu

$$M_t(s) = E(e^{st}) = e^{\mu s + \delta^2 s^2/2}.$$

Z standardowej analizy GERT mamy:

$$P(1.6) = 0{,}462,$$

$$E[T_{1.6}(r)] = 11{,}221 - 0{,}155r_1 - 0{,}35r_2 - 0{,}384r_3 - 0{,}054r_4 - \\ - 0{,}101r_5 - 0{,}023r_6 - 0{,}261r_7 - 0{,}049r_9 - 0{,}107r_{10},$$

$$E[C_{1.6}(r)] = 29{,}033 + 0722r_1 + 0{,}482r_2 + 0{,}625r_3 + 0{,}266r_4 + \\ + 1{,}82r_5 + 0{,}092r_6 + 0{,}913r_7 + 0{,}581r_9 + 0{,}163r_{10}.$$

Zadanie optymalizacyjne przyjmuje postać:

$$\text{MAX} = \frac{0{,}153r_1 + 0{,}035r_2 + 384r_3 + 0{,}054r_4 + 0{,}101r_5 + 0{,}0236r_6 + \\ 0{,}722r_1 + 0{,}482r_2 + 0{,}625r_3 + 0{,}266r_4 + 0{,}182r_5 + 0{,}092r_6 + \\ + 0{,}261r_7 + 0{,}049r_9 + 0{,}107r_{10}}{+ 0{,}913r_7 + 0{,}581r_9 + 0{,}163r_{10}}$$

przy warunkach

$$0 \leqslant r_1 \leqslant 7{,}5; \quad 0 \leqslant r_2 \leqslant 25{,}0; \quad 0 \leqslant r_3 \leqslant 6{,}6; \quad 0 \leqslant r_4 \leqslant 8{,}3;$$

$$0 \leqslant r_5 \leqslant 5; \quad 0 \leqslant r_6 \leqslant 1{,}0; \quad 0 \leqslant r_7 \leqslant 15; \quad 0 \leqslant r_9 \leqslant 10{,}0; \quad 0 \leqslant r_{10} \leqslant 6{,}0,$$

$$\sum_{i=1}^{10} r_i = 10.$$

Optymalne rozwiązanie wynosi 0,6262 dla $r_3 = 4{,}0$ oraz $r_{10} = 6{,}0$. Redukcja czasu (w sensie wartości oczekiwanej) wykonania projektu została „oszacowana" na 2,178.

Wnioski wynikające z naszych rozważań:

1. Punktem wyjścia negocjacji pomiędzy inwestorem a wykonawcą jest funkcja strat uwzględniająca karę za poślizg oraz koszty utraconych szans.

2. Optymalna sytuacja to taka, w której koszty są równe zeru. Ponieważ zdarza się to bardzo rzadko, zatem należy oszacować dobry termin zakończenia przedsięwzięcia w sensie wartości oczekiwanej.

3. Można to uczynić za pomocą metod programowania stochastycznego lub poprzez rekonstrukcję rozkładu zmiennej losowej terminu zakończenia realizacji projektu.

4. W sytuacji gdy termin ten zostanie oszacowany zbyt rozwlekle, należy zainwestować dodatkową porcję kapitału, którego rozdział uzyskujemy poprzez rozwiązanie odpowiednich zadań programowania hiperbolicznego.

Literatura

[1] **Arrow K. J.**, Eseje z teorii ryzyka, PWN, Warszawa 1979.
[2] **Gedymin O.**, Systemowe przesłanki skutecznego zarządzania, PAN, Zakład Nauk Zarządzania, Warszawa 1990.
[3] **Gondran M., Minoux M., Vajde S.**, Graphs and Algorithms, I. P., New York 1984.
[4] **Ignasiak E.**, Procedury rozdziału zasobów w realizacji przedsięwzięć przy występowaniu niepewnych czynników, w: Komputerowe sterowanie procesami produkcji w kierunku inteligentnych systemów wspomagania decyzji, pod red. Z. Hellwiga, AE, Wrocław 1990.
[5] **Neumann K., Steinhardt U.**, GERT Networks and the Time – Oriented Evaluation of Projects – Berlin, New York, 1989.
[6] **Pritsher A. A.**, Introduction to Symulation and SLAM II. System Publishing Corporation, 1987.
[7] **Roy B.**, Wielokryterialne wspomaganie decyzji, WNT, Warszawa 1990.
[8] **Papadimitriov Ch. H.**, Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity, New Jersey 1985.
[9] **Van Slyke R.**, Monte Carlo Methods and the PERT, Problem, Operations Research 14/1983.