Marcin BARTKOWIAK

BUDOWA PORTFELI NEUTRALNYCH Z WYKORZYSTANIEM TAK ZWANYCH GRECKICH PARAMETRÓW

Wstęp

Opcje to jeden z wielu dostępnych na rynkach finansowych instrumentów pochodnych, które stwarzają możliwość zabezpieczenia się przed niekorzystnymi zmianami na rynku (*hedging*). Zabezpieczyć się można nie tylko przed zmianami cen, ale również przed zmianami innych wielkości, mających wpływ na posiadane aktywa. Celem artykułu jest wskazanie na możliwość wykorzystania opcji do osłony przed ryzykiem zmiany ceny akcji, stóp procentowych i odchylenia standardowego cen akcji.

1. Greckie parametry opcyjne

Wzór na cenę europejskiej opcji kupna w klasycznym modelu Blacka-Scholesa ma następującą postać:

$$c = S_T N(d) - Ke^{-rT} N(d - \sigma\sqrt{T}), \tag{1}$$

gdzie:

$$d = \frac{\ln \frac{S_T e^{rT}}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{2}$$

S_T – cena instrumentu bazowego w momencie wyceny opcji,
K – cena wykonania opcji,

r – stopa zwrotu wolna od ryzyka,
T – czas pozostały do wygaśnięcia opcji kupna (w latach),
σ – odchylenie standardowe ceny instrumentu bazowego,
N – dystrybuanta standaryzowanego rozkładu normalnego:

$$N(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{3}$$

Cena opcji zależy od pięciu czynników: S_T, K, r, σ, T. Cena wykonania K dla danej opcji jest stała. Podobnie termin realizacji, ale upływ czasu siłą rzeczy powoduje skracanie terminu pozostałego do wygaśnięcia opcji. Reszta czynników zmienia się[1]. Pojawia się pytanie, jak bardzo cena opcji jest wrażliwa na zmiany tych czynników? Przybliżoną odpowiedź na to pytanie dają pochodne ceny opcji względem tych zmiennych. Zwyczajowo pochodne te oznacza się literami alfabetu greckiego, dlatego też mówi się często o nich jako greckich parametrach (*Greeks*). Definiujemy:

$$\text{delta}(c) = \frac{\partial c}{\partial S_T} = N(d), \tag{4}$$

$$\text{theta}(c) = \frac{\partial c}{\partial T} = -\frac{S_T n(d)\sigma}{2\sqrt{T}} - re^{-rT} KN(d - \sigma\sqrt{T}), \tag{5}$$

$$\text{rho}(c) = \frac{\partial c}{\partial r} = Te^{-rT} KN(d - \sigma\sqrt{T}), \tag{6}$$

$$\text{kappa}(c)^2 = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S_T\sqrt{T}n(d), \tag{7}$$

gdzie $n(x)$ jest gęstością rozkładu normalnego i wyraża się wzorem:

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{8}$$

---

[1] W wyprowadzeniu modelu Blacka-Scholesa dokonuje się formalnego założenia, że odchylenie standardowe ceny instrumentu bazowego i stopa zwrotu wolna od ryzyka jest wielkością stałą, jednak powszechną praktyką jest uzmiennianie tych wielkości ([5], s. 52).

[2] Niektórzy autorzy parametr *kappa* nazywają *vega*, choć nie jest to litera alfabetu greckiego.

By dokładniej zbadać wrażliwość ceny opcji na zmiany ceny instrumentu bazowego, uwzględnia się jeszcze jeden parametr, który jest drugą pochodną ceny opcji względem S_T:

$$\text{gamma}(c)=\frac{\partial^2 c}{\partial S_T^2}=\frac{1}{S_T\sqrt{T}}n(d). \tag{9}$$

Zdefiniowane współczynniki, służące do analizy wrażliwości ceny opcji, można wykorzystać do analizy wrażliwości portfela (na zmianę tych samych czynników) składającego się z instrumentów bazowych i zabezpieczających je instrumentów pochodnych.

2. Budowa portfela z wykorzystaniem greckich parametrów

Rozważmy portfel składający się z aktywów, których wartość uzależniona jest od zmiennych S_T, r, σ, T. Wartość portfela jest funkcją tych zmiennych:

$$V=f(S_T, r, \sigma, T). \tag{10}$$

Oznacza to, że parametry charakteryzujące opcje, charakteryzują też portfel:

$$\text{delta}(V)=\frac{\partial f}{\partial S_T}, \tag{11}$$

$$\text{theta}(V)=\frac{\partial f}{\partial T}, \tag{12}$$

$$\text{rho}(V)=\frac{\partial f}{\partial r}, \tag{13}$$

$$\text{kappa}(V)=\frac{\partial f}{\partial \sigma}, \tag{14}$$

$$\text{gamma}(V)=\frac{\partial^2 f}{\partial S_T^2}. \tag{15}$$

Korzystając z twierdzenia Taylora, można wyznaczyć zmianę wartości portfela ΔV w zależności od zmian czynników ΔS_T, Δr, $\Delta \sigma$, ΔT:

$$\Delta V = \text{delta}(V) \cdot \Delta S_T + \text{rho}(V) \cdot \Delta r + \text{kappa}(V) \cdot \Delta\sigma + \\ + \text{theta}(V) \cdot \Delta T + \frac{1}{2}\text{gamma}(V) \cdot (\Delta S_T)^2 + \ldots \qquad (16)$$

Ze wzoru (16) wynika, że budując portfel neutralny (czyli taki, który nie będzie zmieniał swojej wartości) wystarczy, by kolejne pochodne cząstkowe (czyli greckie parametry portfela) były równe zero. Oczywiście nie trzeba zabezpieczać się przed zmianami wszystkich czynników, a jedynie przed tymi, których zmianę przewidujemy i których obawiamy się najbardziej. W literaturze portfele, których poszczególne greckie parametry są równe zero, nazywane są odpowiednio portfelami delta neutralnymi, theta neutralnymi itd.

2.1. Portfel delta neutralny

Rozważmy następującą sytuację: kupujemy 10 akcji po cenie S_T. Obawiając się spadku cen akcji (jednocześnie przewidujemy, że pozostałe zmienne charakteryzujące rynek: r i σ, nie ulegną zmianie) zabezpieczamy się, wystawiając n_1 opcji kupna. Za każdą opcję otrzymujemy cenę c_1. Akcje kupujemy ze środków uzyskanych z wystawienia opcji, a brakującą kwotę B_1 pożyczamy z banku. Wartość takiego portfela wynosi[3]:

$$V_1 = 10S_T - n_1 \cdot c_1 - B_1.$$

Ponieważ zabezpieczamy się jedynie przed zmianą cen akcji, wymagamy, by parametr delta portfela wynosił zero. Na podstawie wzorów (11) i (4) mamy

$$\text{delta}(V_1) = 10 - n_1 \cdot \text{delta}(c_1) = 0.$$

Rozwiązując równanie z jedną niewiadomą, otrzymujemy liczbę opcji kupna, które trzeba wystawić, by portfel, zawierający 10 akcji, był delta neutralny. W tabelach 1 i 2 przedstawione zostały wartości tak skonstruowanego portfela i ceny opcji kupna, po jednym dniu w zależności od ceny akcji. Do obliczeń przyjęto następujące dane:

$$r = 6\%, \quad K_1 = 50 \text{ PLN}, \quad T_1 = 90\text{dni}/365\text{dni}, \quad \sigma = 25\%.$$

Przy niewielkich zmianach cen akcji, zmiany wartości portfela są nieduże. Wzór Blacka-Scholesa został wyprowadzony przy założeniu o ciągłych zmia-

[3] Wystawienie opcji kupna oznacza zobowiązanie finansowe, stąd minus we wzorze.

Tabela 1. Wartości portfela delta neutralnego w zależności od ceny akcji (małe zmiany ceny akcji)

S	c_1	V_1
48,00	1,8105	−2,0550
48,50	2,0389	−1,0491
49,00	2,2840	−0,3337
49,50	2,5455	0,0936
50,00	2,8232	0,2373
50,50	3,1169	0,1030
51,00	3,4260	−0,3016
51,50	3,7500	−0,9675
52,00	4,0884	−1,8845

Tabela 2. Wartości portfela delta neutralnego w zależności od ceny akcji (duże zmiany ceny akcji)

S	c_1	V_1
30	0,00003	−150,3246
40	0,1028	−52,1213
50	2,8232	0,3113
60	10,8937	−40,6270
70	20,7309	−112,8082

nach cen. Ze względu na koszty transakcji, które zostały pominięte w rozważaniach, nie możemy często zmieniać portfela. W rozpatrywanym przykładzie portfel nie był zmieniany przez cały dzień. Skróceniu uległ czas pozostały do realizacji opcji, co zgodnie z wzorami (1)-(3) pociąga za sobą (przy pozostałych czynnikach bez zmian) zmniejszenie ceny opcji.

Natomiast przy większych wahaniach cen akcji zabezpieczenie okazuje się nieskuteczne. Duże straty związane są z wykorzystaniem pochodnych do szacowania zmian wartości funkcji, a pochodna daje tym lepsze przybliżenie przyrostu wartości funkcji, im przyrost argumentu jest mniejszy.

2.2. Portfel delta-gamma neutralny

Chcąc lepiej zabezpieczyć się przed spadkiem cen akcji, można zbudować portfel delta-gamma neutralny. W tym celu do portfela należy dołączyć jeszcze jeden instrument, którego cena uzależniona jest od ceny akcji. Może to być

opcja na tę samą akcję, ale z inną ceną wykonania i terminem realizacji. Zatem kupujemy n_2 opcji kupna, których cena wynosi c_2. Zakup akcji i nowej opcji finansujemy ze środków uzyskanych z wystawienia opcji c_1 i kredytu B_2. Wartość takiego portfela jest równa:

$$V_2 = 10S_T - n_1 \cdot c_1 + n_2 \cdot c_2 - B_2. \tag{17}$$

Natomiast parametry delta i gamma takiego portfela zgodnie z wzorami (4), (9), (11) i (15) będą wynosić odpowiednio:

$$\text{delta}(V_2) = 10 - n_1 \cdot \text{delta}(c_1) + n_2 \cdot \text{delta}(c_2),$$

$$\text{gamma}(V_2) = -n_1 \cdot \text{gamma}(c_1) + n_2 \cdot \text{gamma}(c_2).$$

Jeśli portfel ma być delta-gamma neutralny, to $\text{delta}(V_2) = 0$ i $\text{gamma}(V_2) = 0$. Wobec tego otrzymujemy układ dwóch równań, z których wyznaczamy n_1 i n_2. Tabele 3 i 4 zawierają zestawienie wartości portfela delta-gamma neutralnego, po jednym dniu od jego skonstruowania, w zależności od ceny akcji. Dla opcji c_2 przyjęto:

$$K_2 = 55\text{PLN}, \quad T_2 = 120\text{dni}/365\text{dni}.$$

W porównaniu z portfelem delta neutralnym wyniki są lepsze zarówno dla małych, jak i dużych zmian cen akcji.

Tabela 3. Wartości portfela delta-gamma neutralnego w zależności od ceny akcji (małe zmiany cen akcji)

S	c_1	c_2	V_1	V_2
48,00	1,8105	0,8465	−2,0550	−0,3367
48,50	2,0389	0,9661	−1,0491	−0,0964
49,00	2,2840	1,0972	−0,3337	0,0122
49,50	2,5455	1,2402	0,0936	0,0306
50,00	2,8232	1,3955	0,2373	0,0017
50,50	3,1169	1,5634	0,1030	−0,0309
51,00	3,4260	1,7440	−0,3016	−0,0210
51,50	3,7500	1,9377	−0,9675	0,0775
52,00	4,0884	2,1445	−1,8845	0,3106

Tabela 4. Wartości portfela delta-gamma neutralnego w zależności od ceny akcji (duże zmiany cen akcji)

S	c_1	c_2	V_1	V_2
40	0,1028	0,0435	−52,1953	−37,7008
45	0,7816	0,3415	−14,0651	−6,2921
50	2,8232	1,3955	0,2373	0,0017
55	6,3821	3,6609	−11,9898	6,85439
60	10,8837	7,1353	−40,7011	49,2922

2.3. Portfel delta-rho neutralny

W przypadku gdy przewidujemy zmianę stopy zwrotu wolnej od ryzyka, można się zabezpieczyć, konstruując portfel delta-rho neutralny. Tak samo jak w poprzednim punkcie do budowy portfela wykorzystujemy akcje i dwa rodzaje opcji kupna (o różnych terminach realizacji i cenach wykonania). Wartość takiego portfela będzie wyrażać się takim samym wzorem (17). Delta i rho portfela – na podstawie wzorów (4), (6), (11) i (13) – są równe:

$$\text{delta}(V_2) = 10 - n_1 \cdot \text{delta}(c_1) + n_2 \cdot \text{delta}(c_2),$$

$$\text{rho}(V_2) = -n_1 \cdot \text{rho}(c_1) + n_2 \cdot \text{rho}(c_2).$$

Tabela 5. Wartości portfela delta-rho neutralnego w zależności od ceny akcji (małe zmiany cen akcji)

S	c_1	c_2	V_1	V_2
48,00	1,5422	0,8799	2,6370	10,0390
48,50	1,7473	1,0031	4,0502	11,6967
49,00	1,9688	1,1380	5,1773	13,1528
49,50	2,2067	1,2849	6,0175	14,4205
50,00	2,4609	1,4442	6,5726	15,5155
50,50	2,7312	1,6162	6,8461	16,4558
51,00	3,0174	1,8012	6,8427	17,2600
51,50	3,3190	1,9992	6,5691	17,9483
52,00	3,6356	2,2105	6,0335	18,5423

Przyrównując delta(V_2) i rho(V_2) do zera, otrzymujemy układ dwóch równań, z których wyznaczamy n_1 i n_2. Efektywność osłony tego portfela, gdy stopa procentowa wolna od ryzyka r wzrośnie do 7%, możemy prześledzić w tabelach 5 i 6. Również tym razem portfel zabezpieczony przed ryzykiem stopy procentowej i zmianą ceny akcji jest lepszy od portfela chroniącego jedynie przed zmianą ceny. Korzyści są widocznie zarówno dla małych, jak i dużych zmian cen akcji.

Tabela 6. Wartości portfela delta-rho neutralnego w zależności od ceny akcji (duże zmiany cen akcji)

S	c_1	c_2	V_1	V_2
40	0,0772	0,0463	−51,7482	−33,784
45	0,6392	0,3576	−11,5749	5,7413
50	2,4609	1,4442	6,5726	28,5804
55	5,8163	3,7540	−2,0979	55,5741
60	10,2085	7,2676	−28,8965	118,4059

2.4. Portfel delta-kappa neutralny

Kolejny rozważany portfel, delta-kappa neutralny, jest zabezpieczony przed zmianą σ (odchyleniem standardowym ceny instrumentu bazowego). W skład portfela wchodzą akcje i dwa typy opcji, analogicznie jak w dwóch poprzednich przykładach. Wzór na wartość portfela jest więc taki sam. Natomiast parametry delta i kappa na podstawie wzorów (4), (7), (1), (14) wynoszą:

$$\text{delta}(V_2) = 10 - n_1 \cdot \text{delta}(c_1) + n_2 \cdot \text{delta}(c_2),$$

$$\text{kappa}(V_2) = -n_1 \cdot \text{kappa}(c_1) + n_2 \cdot \text{kappa}(c_2).$$

Przyrównując delta(V_2) i kappa(V_2) do zera, ponownie otrzymujemy układ dwóch równań, którego rozwiązaniami są n_1 i n_2. Tabele 7 i 8 prezentują kształtowanie się wartości portfela delta-kappa neutralnego, gdy σ wzrośnie do 26%. Widać, że taki portfel jest dość dobrze (zwłaszcza przy większych zmianach cen) zabezpieczony przed zmianą cen.

Tabela 7. Wartości portfela delta-kappa neutralnego w zależności od ceny akcji (małe zmiany cen akcji)

S	c_1	c_2	V_1	V_2
48,00	1,9041	0,9304	−2,0550	−0,3367
48,50	2,1343	1,0552	−1,0491	−0,0964
49,00	2,3805	1,1912	−0,3337	0,0122
49,50	2,6425	1,3389	0,0936	0,0306
50,00	2,9202	1,4986	0,2373	0,0017
50,50	3,2131	1,6704	0,1030	−0,0309
51,00	3,5209	1,8547	−0,3016	−0,0210
51,50	3,8431	2,0515	−0,9675	0,0775
52,00	4,1792	2,2611	−1,8845	0,3106

Tabela 8. Wartości portfela delta-kappa neutralnego w zależności od ceny akcji (duże zmiany cen akcji)

S	c_1	c_2	V_1	V_2
40	0,1249	0,0564	−52,5827	−38,0672
45	0,853	0,3931	−15,3137	−6,6811
50	2,9202	1,4986	−1,4575	0,1457
55	6,1520	3,7835	−13,2121	12,0389
60	10,9151	7,2341	−41,2511	54,9977

2.5. Portfel delta-gamma-kappa neutralny

Nic nie stoi na przeszkodzie, by budować bardziej skomplikowane portfele – na przykład delta-gamma-kappa neutralny. Do jego budowy potrzeba kolejnej opcji kupna, o jeszcze innym terminie wykupu i cenie wykonania niż dwie dotąd wykorzystywane. Portfel będzie się więc składał z 10 akcji po cenie S_T, n_1 wystawionych opcji o cenie c_1, n_2 i n_3 zakupionych opcji kupna, których ceny wynoszą odpowiednio c_2 i c_3 oraz kredytu bankowego B_3. Wartość portfela wynosi:

$$V_3 = 10S_T - n_1 \cdot c + n_2 \cdot c_2 + n_3 \cdot c_3 - B_3.$$

Na podstawie wzorów (4), (7), (9), (11), (14) i (15) mamy:

$$\text{delta}(V_3) = 10 - n_1 \cdot \text{delta}(c_1) + n_2 \cdot \text{delta}(c_2) + n_3 \cdot \text{delta}(c_3),$$

$$\text{gamma}(V_3) = -n_1 \cdot \text{gamma}(c_1) + n_2 \cdot \text{gamma}(c_2) + n_3 \cdot \text{gamma}(c_3),$$

$$\text{kappa}(V_3) = -n_1 \cdot \text{kappa}(c_1) + n_2 \cdot \text{kappa}(c_2) + n_3 \cdot \text{kappa}(c_3).$$

Przyrównując $\text{delta}(V_3)$, $\text{gamma}(V_3)$ i $\text{kappa}(V_3)$ do zera, otrzymujemy układ trzech równań. Po jego rozwiązaniu znajdujemy wartości n_1, n_2 i n_3. W tabelach 9 i 10 są zestawione wartości portfela delta-gamma-kappa neutralnego.

Tabela 9. Wartości portfela delta-gamma-kappa neutralnego w zależności od ceny akcji (małe zmiany ceny akcji)

S	c_1	c_2	c_3	V_1	V_2	V_3
48,00	1,9041	0,9304	0,7073	−3,6910	−1,8001	−1,0354
48,50	2,1343	1,0552	0,7935	−2,7164	−1,0316	−0,6628
49,00	2,3805	1,1912	0,8872	−2,0213	−0,4636	−0,3932
49,50	2,6425	1,3389	0,9886	−1,6030	−0,0779	−0,1930
50,00	2,9202	1,4986	1,0980	−1,4576	0,1457	−0,0278
50,50	3,2131	1,6704	1,2157	−1,5795	0,2279	0,1357
51,00	3,5209	1,8547	1,3419	−1,9617	0,1916	0,3324
51,50	3,8431	2,0515	1,4769	−2,5958	0,0602	0,5963
52,00	4,1792	2,2611	1,6208	−3,4725	−0,1423	0,9600

Obliczenia wykonano, zakładając, że dla trzeciej, dodatkowej opcji, cena wykonania i termin realizacji wynoszą odpowiednio:

$K_3 = 55\text{PLN}$,

$T_3 = 120\text{dni}/365\text{dni}$,

$\sigma = 26\%$.

Z przeprowadzonej symulacji wynika, że portfel delta-gamma-kappa neutralny w przypadku zmiany ceny akcji i odchylenia standardowego jest lepiej zabezpieczony przed dużymi zmianami cen niż prostsze, wcześniej analizowane portfele. Natomiast w przypadku mniejszych zmian cen zabezpieczenie portfela delta-gamma-kappa neutralnego jest podobna lub nieco gorsza. Zaletą takiego

Tabela 10. Wartości portfela delta-gamma-kappa neutralnego w zależności od ceny akcji (duże zmiany cen akcji)

S	c	c_1	c_2	V	V_1	V_2
40	0,1249	0,0564	0,0623	−52,5827	−45,8874	−36,1091
45	0,8530	0,3931	0,3273	−15,3137	−11,3319	−6,97187
50	2,9202	1,4986	1,0980	−1,4576	0,1457	−0,0278
55	6,4520	3,7835	2,6808	−13,2121	−1,5651	6,7788
60	10,9151	7,2341	5,2148	-41,2511	3,1435	36,3890

portfela jest łączenie cech dwóch prostszych portfeli: delta-gamma neutralnego i delta-kappa neutralnego.

Nie należy jednak sądzić, że im portfel jest bardziej skomplikowany, tym lepiej. Zabezpieczając się przed niekorzystnymi zmianami czynników, tracimy na ogół premię, wynikającą ze zmiany przeciwnej (na przykład portfel delta-rho neutralny niweluje straty wynikające ze wzrostu stopy wolnej od ryzyka, ale pozbawi nas korzyści w przypadku spadku tej stopy).

Przeprowadzona analiza, mimo że wycinkowa, wskazuje na użyteczność tzw. greckich parametrów przy budowaniu portfela. Należy mieć jednak świadomość ograniczeń stosowania powyższych rozwiązań w praktyce. Po pierwsze, w artykule został wykorzystany model Blacka-Scholesa, który należy do ciągłych modeli wyceny opcji, a zmian w portfelu można dokonywać jedynie w sposób dyskretny. Po drugie, częste zmiany składu portfela związane są z pewnymi kosztami transakcyjnymi, które w rozważaniach pominięto. Po trzecie, sprawne wykorzystanie greckich parametrów wymaga zastosowania aplikacji, które zautomatyzują proces poszukiwania liczby instrumentów pochodnych zabezpieczających portfel.

Literatura

[1] Black F., Scholes M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 1973, 81, 637-654

[2] Capiński M., *Osłona przed ryzykiem*, w: *Instrumenty pochodne, Sympozjum matematyki finansowej*, Universitas, Kraków 1998

[3] Ford D., *Opcje giełdowe*, K.E. Liber, Warszawa 1997
[4] *Instrumenty pochodne: wprowadzenie*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków,
[5] *Matematyka finansowa, instrumenty pochodne*, red. M. Rutkowski, WNT, Warszawa 2003
[6] Tarczyński W., *Inżynieria finansowa*, Agencja Wydawniczo-Poligraficzna PLACET, Warszawa 1999

BUILDING NEUTRAL PORTFOLIOS WITH THE USE OF OPTION SENSITIVITIES

Summary

The article comments on the possibility of building mixed portfolios, containing shares and options, protected from share price fluctuations, riskfree interest rate fluctuations and volatility fluctuations. The author defines option sensitivities (known less formally as the ''Greeks'') and indicates the method of using them in building neutral portfolios. The analysis has proved (with some reservations) the efficiency of option sensitivities as a risk management tool. The analysis has been supported by sample calculations.