Małgorzata DOMAN

DOPASOWANIE MODELI GARCH W PRÓBIE A JAKOŚĆ OTRZYMYWANYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI

Wstęp

Zmienność ceny instrumentu finansowego jest jednym z naistotniejszych parametrów wykorzystywanych przy pomiarze ryzyka. W zarządzaniu ryzykiem duże znaczenie ma możliwość skutecznego prognozowania przyszłej zmienności poszczególnych instrumentów finansowych bądź złożonych z nich portfeli. Zwykle przez zmienność ceny instrumentu finansowego rozumie się wariancję warunkową zwrotu, wyliczaną pod warunkiem zbioru informacji dostępnych jeden okres wcześniej. W takiej sytuacji najczęściej stosowanym narzędziem modelowania i prognozowania zmienności są uogólnione modele warunkowej autoregresyjnej heteroskedastyczności (GARCH). Najprostszy model tego typu został wprowadzony w przez Bollersleva [3], jako uogólnienie modelu ARCH zaproponowanego przez Engle'a [8]. Rodzina modeli GARCH jest bardzo obszerna i zróżnicowana. Wybór najwłaściwszego modelu dla analizowanego szeregu czasowego stanowi zadanie z reguły praco- i czasochłonne, ze względu na stosunkowo dużą liczbę parametrów występujących w bardziej rozbudowanych modelach GARCH. Powstaje jednak pytanie, czy nakład pracy włożony w dobór najlepiej dopasowanego modelu zwraca się w postaci wyraźnie lepszej jakości uzyskiwanych prognoz zmienności.

W niniejszym artykule opisany jest eksperyment związany z poszukiwaniem odpowiedzi na tak postawione pytanie. Analizując prognozy dziennej zmienności kursu walutowego USD/PLN uzyskane za pomocą dwudziestu pięciu modeli GARCH – różniących się bądź postacią, bądź założonym rozkładem błędu – próbujemy ocenić, w jaki sposób jakość dopasowania modelu wpływa na jakość uzyskiwanych z niego prognoz, a także co w tym kontekście ma znaczenie jako miara dopasowania: czy wielkości kryteriów informacyjnych,

czy istotność występujących w modelu parametrów. Oczywiście wyniki uzyskane w tym opracowaniu nie dają podstaw do ogólnej odpowiedzi na tak postawione pytanie. Stanowią jedynie ilustrację praktycznego problemu, jaki napotykamy, podejmując próby prognozowania zmienności przy użyciu modeli GARCH.

1. Modele GARCH

W tym punkcie przedstawione zostaną podstawowe informacje na temat modeli z rodziny GARCH, które zostały wykorzystane w prezentowanej w opracowaniu analizie.

Oznaczmy przez r_t procentowy zwrot logarytmiczny z instrumentu finansowego w momencie t, tzn. $r_t = 100(\ln p_t - \ln p_{t-1})$. Niech $\mathcal{F}_{t-1}$ oznacza zbiór informacji (σ-algebrę zdarzeń) dostępnych w chwili t, a $y_t = r_t - E(r_t|\mathcal{F}_{t-1})$. Przez zmienność instrumentu finansowego zwykle rozumie się wariancję warunkową zwrotu r_t pod warunkiem informacji dostępnej w momencie $t-1$, tzn. $E(y_t^2|\mathcal{F}_{t-1})$.

Uogólniony model autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej, oznaczany symbolem GARCH(p, q), opisuje się równaniami

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \tag{1}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \tag{2}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, 1)$, $\omega > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$ oraz $\beta_j \geqslant 0$.

Przy założeniu że

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1,$$

wariancja bezwarunkowa zmiennej y_t jest skończona i równa

$$E(y_t^2) = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j}.$$

Prognoza zmienności instrumentu finansowego na h dni naprzód, wyliczana za pomocą modelu GARCH(p, q), wyraża się wzorem

$$\sigma^2_{t+h|t}=E(\sigma^2_{t+h}|\mathcal{F}_t)=\omega+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i y^2_{t+h-i|t}+\sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma^2_{t+h-j|t}, \tag{3}$$

gdzie $y^2_{t+i|t}=\sigma^2_{t+i|t}$ dla $i>0$ oraz $y^2_{t+i|t}=y^2_{t+i}$ i $\sigma^2_{t+i|t}=\sigma^2_{t+i}$ dla $i\leqslant 0$.

Początkowo rozważano jedynie normalny rozkład błędu ε_t w równaniu (1). Wśród empirycznych własności finansowych szeregów czasowych wymienia się jednak również obserwowaną często podwyższoną kurtozę rozkładów warunkowych. W celu lepszego dopasowania modeli GARCH do takich przypadków, Bollerslev [4] zaproponował standaryzowany rozkład t Studenta z ν stopniami swobody jako alternatywny rozkład zmiennej ε_t. Jest to rozkład symetryczny o gęstości danej wzorem

$$g(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{z^2}{\nu-2}\right)^{-(\nu+1)/2}, \tag{4}$$

gdzie $\Gamma(\cdot)$ jest standardową funkcją gamma. Rozkład ten przy liczbie stopni swobody dążącej do nieskończoności jest zbieżny do standardowego rozkładu normalnego. Dla $\nu>4$, standaryzowany rozkład t Studenta ma moment rzędu czwartego równy $\frac{3(\nu-2)}{\nu-4}$. Kurtoza rozkładu warunkowego zmiennej y_t jest więc większa niż w przypadku rozkładu normalnego innowacji ε_t. Liczba stopni swobody, ν, nie musi być określona z góry, lecz jest estymowana wraz z pozostałymi parametrami modelu.

Spośród innych stosowanych rozkładów innowacji ε_t, do najbardziej popularnych należy wprowadzony w roku 1991 przez Nelsona [17] uogólniony rozkład błędu GED. Funkcja gęstości tego rozkładu wyraża się wzorem

$$f(z)=\frac{\nu\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{z}{\lambda}\right|^{\nu}\right)}{\lambda\cdot 2^{(\nu+1)/\nu}\,\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}, \tag{5}$$

gdzie

$$\lambda=\left\{\frac{2^{-2/\nu}\,\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)}\right\}^{1/2}.$$

Dla $v=2$ zachodzi równość $\lambda=1$ i (5) jest gęstością standardowego rozkładu normalnego. Przy $v<2$ rozkład GED ma ogony grubsze, a przy $v>2$ cieńsze niż standardowy rozkład normalny.

Opisane powyżej rozkłady uwzględniają własność grubych ogonów, ale są symetryczne. Empiryczne szeregi finansowe charakteryzują się jednak często skośnością. W celu uwzględnienia tego zjawiska stosuje się skośny rozkład t Studenta ([11], [12], [18]). Przy założeniu, że $v>2$, zmienna Z ma standaryzowany skośny rozkład t Studenta, $Z\sim SKST(0, 1, \xi, v)$ jeśli jej gęstość wyraża się wzorem

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\xi+\xi^{-1}}sg(\xi(sz+m)), & \text{gdy } z<-\dfrac{m}{s},\\ \dfrac{2}{\xi+\xi^{-1}}sg\left(sz+\dfrac{m}{\xi}\right), & \text{gdy } z\geq-\dfrac{m}{s},\end{cases} \tag{6}$$

gdzie g jest gęstością standaryzowanego rozkładu t Studenta o v stopniach swobody, ξ jest współczynnikiem asymetrii, a

$$m=\frac{\Gamma\left(\dfrac{v-1}{2}\right)\sqrt{v-2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{v}{2}\right)}(\xi-\xi^{-1}) \quad \text{oraz} \quad s^2=(\xi^2+\xi^{-2}-1)-m^2 \tag{7}$$

przedstawiają średnią i wariancję odpowiadającego rozkładu niestandaryzowanego. Dla $\xi=1$ zmienna Z ma, określony wcześniej, standaryzowany rozkład t Studenta.

Oprócz modeli GARCH(p, q) rozważamy kilka ich rozszerzeń, uwzględniających różnego rodzaju własności empirycznych szeregów czasowych i pozwalających na lepszy opis zmienności instrumentów finansowych. Pierwszym z nich jest – uwzględniający asymetrię wpływu zwrotów ujemnych i dodatnich na zmienność – zaproponowany w 1993 roku przez Glostena, Jagannathana i Runkle'a model GJR-GARCH [13]. Wariancja warunkowa w modelu GJR-GARCH(p, q) określona jest równaniem

$$\sigma_t^2=\omega+\sum_{i=1}^{q}(\alpha_i y_{t-i}^2+\gamma_i I(y_{t-i}<0)y_{t-i}^2)+\sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2, \tag{8}$$

gdzie $I(\cdot)$ jest funkcją wskaźnikową.

Model GJR-GARCH(1, 1) opisany równaniem (8) jest kowariancyjnie stacjonarny [16], gdy

$$\alpha_1+\beta_1+\frac{1}{2}\gamma_1<1.$$

Wzór na prognozę zmienności h dni, naprzód w przypadku modelu GJR-GARCH(p, q), ma postać

$$\sigma^2_{t+h|t}=\omega+\sum_{i=1}^{q}(\alpha_i y^2_{t-i+h|t}+\gamma_i S^-_{t-i+h|t}y^2_{t-i+h|t})+\sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma^2_{t-j+h|t}, \qquad (9)$$

gdzie $S^-_{t+i|t}=S^-_{t+i}$ dla $i\leqslant 0$, podczas gdy dla $i\geqslant 1$, $S^-_{t+i|t}$ zależy od rozkładu innowacji ε_t. Jeśli rozkład ten jest symetryczny (a zatem w przypadku rozkładów: normalnego, t Studenta i GED), prawdopodobieństwo, że ε_{t+i} jest ujemne, wynosi $\frac{1}{2}$, a więc $S^-_{t+h|t}=\frac{1}{2}$. Jeśli natomiast ε_t ma standaryzowany skośny rozkład t Studenta o ν stopniach swobody, z parametrem asymetrii ξ, to $S^-_{t+h|t}=\frac{1}{1+\xi^2}$, ponieważ ξ^2 jest stosunkiem masy prawdopodobieństwa po prawej i po lewej stronie mody.

Model GJR jest szczególnym przypadkiem modelu APARCH, wprowadzonego w roku 1993 przez Dinga, Grangera, i Engle'a [7]. Model APARCH(p, q) jest określony równaniem

$$\sigma^\delta_t=\omega+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(|y_{t-i}|-\gamma_i y_{t-i})^\delta+\sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma^\delta_{t-j}, \qquad (10)$$

gdzie $\delta>0$, $-1<\gamma_i<1$, $i=1,\ldots. q$.

Dodatkową zaletą tego modelu, oprócz obecności współczynników asymetrii, jest możliwość dopasowania wykładnika δ, gwarantującego istnienie bezwarunkowego momentu rzędu δ dla procesu σ_t. Model APARCH(p, q) obejmuje, jako szczególne przypadki, wiele innych modeli z rodziny GARCH, dlatego uważany jest za bardzo użyteczne i skuteczne narzędzie modelowania i prognozowania zmienności.

Historycznie pierwszym wariantem modelu GARCH, uwzględniającym efekt asymetrii, był GARCH wykładniczy (EGARCH) wprowadzony przez Nelsona w 1991 roku [17]. W postaci zaproponowanej przez Bollersleva i Mikkelsena w 1996 roku [5], wariancja warunkowa w modelu EGARCH(p, q) określona jest równaniem

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + [1-\beta(L)]^{-1}[1+\alpha(L)]g(\varepsilon_{t-1}), \tag{11}$$

gdzie $\alpha(L)=\alpha_1 L+\alpha_2 L^2+...+\alpha_q L^q$, a $\beta(L)=\beta_1 L+\beta_2 L^2+...+\beta_p L^p$ jest wielomianem, którego wszystkie pierwiastki leżą poza kołem jednostkowym. Funkcja g uwzględniająca zarówno wielkość, jak i znak ε_t, wyraża się wzorem

$$g(\varepsilon_t)=\gamma_1 \varepsilon_t+\gamma_2(|\varepsilon_t|-E|\varepsilon_t|). \tag{12}$$

W szczególności odchylenie zmiennej $|\varepsilon_{t-j}|$ od jej wartości oczekiwanej wpływa na zmianę wariancji warunkowej zwrotu w sposób zależny od kierunku i siły tego odchylenia.

W praktycznych zastosowaniach, związanych z modelowaniem danych o wysokiej częstotliwości, dość często występuje sytuacja, gdy suma estymowanych współczynników α_i oraz β_j w standardowym modelu GARCH jest bliska jeden, tzn. $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i+\sum_{j=1}^{p}\beta_j \approx 1$. Zgodnie z terminologią pochodzącą z pracy Engle'a i Bollersleva [9], model GARCH(p, q), w którym $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i+\sum_{j=1}^{p}\beta_j=1$, nazywa się zintegrowanym (IGARCH). Jeśli y_t jest generowany przez proces IGARCH, to wariancja bezwarunkowa zmiennej y_t jest nieskończona, a zatem proces y_t nie jest kowariancyjnie stacjonarny. Może być on jednak ściśle stacjonarny.

Przyjmując $\alpha_1+\beta_1=1$ we wzorze określającym prognozę h dni naprzód w modelu GARCH(1, 1), otrzymamy dla modelu IGARCH(1, 1) zależność

$$\sigma_{t+h|t}^2=\omega(h-1)+\sigma_{t+1}^2. \tag{13}$$

Wynika z niej tak zwana persystencja, charakteryzująca model IGARCH, polegająca na trwałej zależności prognozy σ_{t+h}^2 od zmienności σ_{t+1}^2. Stanowi to wyraźną różnicę jakościową w stosunku do własności standardowego modelu GARCH, gdzie zależność ta zanika w tempie wykładniczym wraz z wydłużaniem horyzontu prognozy.

Zintegrowany ułamkowo model GARCH (FIGARCH) został wprowadzony przez Bailliego, Bollersleva i Mikkelsena [2], z zamysłem modelowania długookresowych zależności w procesie zmienności. Jednak oryginalna definicja modelu FIGARCH(p, d, q) spotkała się z krytyką różnych autorów. W związku z tym w 1999 roku Chung zaproponował zmodyfikowaną postać modelu FIGARCH [6]. W tym badaniu używamy tej właśnie specyfikacji, określonej za pomocą równania

$$\phi(L)(1-L)^d(y_t^2-\sigma^2)=(1-\beta(L))(y_t^2-\sigma_t^2), \tag{14}$$

w którym σ^2 jest parametrem. W równoważnej postaci równania (14):

$$\sigma_t^2=\sigma^2+\lambda(L)(y_t^2-\sigma^2), \tag{15}$$

występuje nieskończone sumowanie $\lambda(L)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i L^i$, które w praktyce musi być ucięte. Zgodnie z propozycją Chunga, sumowanie jest obcinane przy $i=t-1$, przy czym przyjmuje się $y_t^2-\sigma^2=0$ dla $t<1$.

W roku 1987 Engle, Lilien i Robins [10] przedstawili tzw. model GARCH in Mean (GARCH-M), opisujący bezpośrednie zależności pomiędzy zwrotem instrumentu finansowego a zmieniającym się w czasie ryzykiem mierzonym wariancją warunkową, czyli w przyjętej tu terminologii, zmiennością. Była to odpowiedź na postulowaną w licznych teoriach finansowych bezpośrednią zależność pomiędzy wielkością zwrotu a ryzykiem. Zaproponowany model włącza do równania średniej warunkowej zmiennej reprezentującej zwrot, funkcję, której argumentem jest zmienność. Rozważamy tutaj model GARCH-M(p, q) postaci

$$r_t=a_0+\sum_{k=1}^{s}b_k x_{k,t}+\sum_{i=1}^{m}a_i\left(r_{t-i}-a_0-\sum_{k=1}^{s}b_k x_{k,t-i}\right)+c\sigma_t^2+y_t, \tag{16}$$

$$y_t=\sigma_t\varepsilon_t, \tag{17}$$

$$\sigma_t^2=\omega+\sum_{t=1}^{q}\alpha_i y_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2, \tag{18}$$

gdzie $x_{k,t}$, $k=1,\ldots,s$, są ewentualnymi dodatkowymi zmiennymi objaśniającymi. Parametr c, zgodnie z jego interpretacją ekonomiczną, nosi nazwę parametru premii za ryzyko.

2. Metody oceny dopasowania modelu w próbie i jakości prognoz zmienności

Problem doboru modelu GARCH właściwego dla danego szeregu jest zagadnieniem dość złożonym. Z reguły poszukiwania opierają się na wyliczaniu wartości kryteriów informacyjnych oraz na analizie własności reszt stan-

daryzowanych kolejnych modeli. Kryteria doboru nie są jasne w tym sensie, że na przykład dyskusyjny jest problem istotności współczynników, występujących w modelu. W prezentowanej analizie zestawiamy ranking dopasowania modeli w próbie, dokonany za pomocą wartości kryteriów informacyjnych, z rankingami jakości prognoz. Stosujemy cztery kryteria informacyjne: Akaike'go (AIC), Schwarza (BIC), Hannana-Quinna (H-Q) oraz Shibaty (Sh). Wyliczamy je w postaci określonej wzorami:

$$\mathrm{AIC} = -2\frac{\ln L}{n} + 2\frac{k}{n},$$

$$\mathrm{BIC} = -2\frac{\ln L}{n} + 2\frac{k \ln n}{n},$$

$$\mathrm{H\text{-}Q} = -2\frac{\ln L}{n} + 2\frac{k \ln(\ln n)}{n},$$

$$\mathrm{Sh} = -2\frac{\ln L}{n} + \ln\frac{n+2k}{n},$$

gdzie L oznacza wartość funkcji wiarygodności, n jest liczbą wyrazów szeregu obserwacji, a k liczbą parametrów modelu.

Ocena jakości prognoz również nie jest zagadnieniem, które może być rozwiązane w sposób jednoznaczny. Z reguły różne miary jakości prognoz dają różne uporządkowania modeli według ich skuteczności prognostycznej. W kontekście modelowania zmienności najczęściej używaną miarą jest współczynnik R^2 regresji Minzera-Zarnowitza (por. [1]):

$$y_{T+i} = a + b\hat{y}_{T+i} + u_{T+i}, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

W tym artykule do oceny jakości prognoz stosujemy również następujące miary (por. [19]):

- Błąd średniokwadratowy (MSE)

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_{T+i} - \hat{y}_{T+i})^2.$$

- Medianowy błąd kwadratowy (MedSE)

$$\mathrm{MedSE} = \mathrm{mediana}\{(y_{T+i} - \hat{y}_{T+i})^2\}_{i=1}^{N}.$$

- Błąd średni (ME)

$$\mathrm{ME}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_{T+i}-\hat{y}_{T+i}).$$

- Średni błąd bezwzględny (MAE)

$$\mathrm{MAE}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|y_{T+i}-\hat{y}_{T+i}|.$$

- Pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE)

$$\mathrm{RMSE}=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_{T+i}-\hat{y}_{T+i})^2}.$$

- Średni bezwzględny błąd procentowy (MAPE)

$$\mathrm{MAPE}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{y_{T+i}-\hat{y}_{T+i}}{y_{T+i}}\right|.$$

- Skorygowany średni bezwzględny błąd procentowy (AMAPE)

$$\mathrm{AMAPE}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{y_{T+i}-\hat{y}_{T+i}}{y_{T+i}+\hat{y}_{T+i}}\right|.$$

- Udział prawidłowych znaków (PCS)

$$\mathrm{PCS}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\max(\mathrm{sign}(y_{T+i}\hat{y}_{T+i}),0).$$

BIBLIOTEKA AE w Poznaniu

- Współczynnik rozbieżności Theila (TIC)

$$\mathrm{TIC}=\frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_{T+i}-\hat{y}_{T+i})^2}}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_{T+i}^2}+\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{y}_{T+i}^2}}.$$

- Logarytmiczna funkcja straty (LLF)

$$\mathrm{LLF}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{\hat{y}_{T+i}}{y_{T+i}}\right)^2.$$

W powyższych wzorach T oznacza liczbę obserwacji w próbie, N jest liczbą prognoz na okres poza próbą, a i jest długością horyzontu prognozy.

Ponieważ zdefiniowana w poprzednim punkcie zmienność ceny instrumentu finansowego jest wielkością nieobserwowalną, powstaje pytanie, z czym powinny być porównywane jej prognozy. Kwadrat zwrotu dziennego jest nieobciążonym, ale bardzo zanieczyszczonym szumem estymatorem zmienności dziennej, która jest rozważana w tej pracy. Od wprowadzenia w 1998 roku przez Andersena i Bollersleva [1] pojęcia zmienności zrealizowanej, wyliczanej jako suma kwadratów zwrotów śróddziennych, uważana jest ona za bardziej adekwatny estymator zmienności dziennej. W literaturze funkcjonują różne warianty zmienności zrealizowanej. W niniejszym artykule jako miarę zmienności zrealizowanej, do której odnosimy prognozy, wykorzystujemy zaproponowaną przez Koopmana i Hol [14] wielkość

$$Real3_t=(1+c)\sum_{d=1}^{D}R_{t,d}^2.$$

Zmienność *Real*3 jest równa sumie kwadratów zwrotów środdziennych bez uwzględniania zwrotu nocnego, przemnożonej przez współczynnik $c=\frac{\sigma_{\mathrm{co}}^2}{\sigma_{\mathrm{oc}}^2}$, gdzie σ_{co}^2 oznacza wariancję zwrotu między kursem zamknięcia a kursem otwarcia następnego dnia, a σ_{oc}^2 jest wariancją zwrotu dziennego.

3. Analiza empiryczna

W opracowaniu poddajemy analizie szereg dziennych zwrotów kursu USD/PLN w okresie od 12 kwietnia 2000 roku do 6 czerwca 2003 roku. Pierwsze 699 (12.04.2000-02.01.2003) obserwacji zostało wykorzystane do estymacji modeli. Na pozostałe dni dokonujemy 112 prognoz zmienności jeden dzień naprzód. Opisane w punkcie 2 metody oceny jakości dopasowania modelu w próbie i jakości prognoz stanowią narzędzie wykorzystane do badania przydatności poszczególnych typów modeli. Zgodnie z metodologią zaproponowaną w pracach Andersena i Bollersleva [1] oraz jej rozwinięciem z pracy Hol

i Koopmana [14], prognozy zmienności odnosimy do zmienności zrealizowanej *Real*3 opartej na pięciominutowych zwrotach dziennych. Miara *Real*3 nie zawiera zwrotu nocnego. Zamiast tego, w celu uwzględnienia wpływu zwrotu nocnego na zmienność dokonujemy przeskalowania za pomocą współczynnika $c = 1{,}08178$.

Badany szereg zwrotów charakteryzuje się bliską zeru ujemną średnią i odchyleniem standardowym poniżej 1. Wykazuje prawostronną skośność i wysoką kurtozę. Analiza statystyk opisowych wydaje się wskazywać, że najlepiej dopasowanymi modelami GARCH powinny się okazać modele ze skośnym rozkładem t Studenta, jako rozkładem błędu.

Tabela 1. Statystyki opisowe szeregu zwrotów kursu walutowego USD/PLN

Średnia	Odchylenie standardowe	Minimum	Maksimum	Skośność	Kurtoza
−0,0116	0,6628	−3,4125	4,2208	0,5012	7,3784

Idea badania jest taka, że nie odrzucamy z góry żadnego typu modelu spośród wybranych do analizy. Do rozważanego szeregu dopasowujemy poszczególne modele i niezależnie od jakości dopasowania i poziomu istotności parametrów wyznaczamy prognozy. W każdym przypadku rozważamy wszystkie cztery postacie rozkładu błędu (normalny, t Studenta, skośny t Studenta oraz GED). Wszystkie obliczenia zostały wykonane przy użyciu pakietu G@RCH 2.3 [15]. Wyniki testu Engle'a wskazują, że wystarczy rozważać modele z opóźnieniem 1. Jedynym typem modelu, który nie dał się dopasować do szeregu dziennych zwrotów kursu USD/PLN, jest model EGARCH (brak zbieżności przy estymacji). W tabeli 2 podajemy parametry pozostałych 24 dopasowanych modeli. W nawiasach pod ocenami parametrów znajdują się standardowe błędy szacunku.

Modele przedstawione w tabeli 2, w większości przypadków spełniają zwykle stawiane ograniczenia, związane między innymi z zapewnieniem stacjonarności. Wyjątek stanowią modele FIGARCH. Poza jednym przypadkiem (uogólniony rozkład błędu) są one wyestymowane niepoprawnie, ponieważ oceny parametrów ϕ_1 i β_1 są ujemne. Mimo to przedstawiamy wyliczone z ich pomocą prognozy w celach porównawczych.

Przy analizie tabeli 2 zwraca uwagę jeszcze jedno zjawisko, często pojawiające się przy estymacji modeli GARCH, a mianowicie niski poziom istotności stałej ω występującej w równaniu wariancji warunkowej. Jedno z pytań, na które szukamy odpowiedzi, dotyczy tego właśnie problemu: czy należy kierować się istotnością współczynników przy dopasowywaniu modeli GARCH, czy też bardziej rozbudowany model, niezależnie od istotności współczynników daje lepsze prognozy?

Tabela 2. Parametry wyestymowanych modeli

Model	Rozkład błędu	ω	α_1 lub ϕ_1	β_1	γ_1 lub c	δ lub d	ξ	ν
1	2	3	4	5	6	7	8	9
GARCH	N	0,0697 (0,0427)	0,1838 (0,0929)	0,6606 (0,1593)				
	S	0,0673 (0,0345)	0,1581 (0,0689)	0,6964 (0,0689)				8,0365 (2,5312)
	SS	0,0625 (0,0350)	0,1574 (0,0596)	0,6952 (0,1272)			0,1253 (0,0551)	8,2349 (2,5831)
	GED	0,0642 (0,0358)	0,1723 (0,0711)	0,6799 (0,1333)				1,4527 (0,1533)
GJR	N	0,0694 (0,0455)	0,2474 (0,1623)	0,6667 (0,1739)	−0,1404 (0,1347)			
	S	0,0600 (0,0355)	0,1736 (0,0743)	0,7021 (0,1348)	−0,0413 (0,0540)			8,2754 (2,6567)
	SS	0,0615 (0,0363)	0,1680 (0,0699)	0,7011 (0,1343)	−0,0304 (0,0538)		0,1232 (0,0546)	8,4246 (2,6930)
	GED	0,0634 (0,0371)	0,2060 (0,1014)	0,6875 (0,1407)	−0,0819 (0,0744)			1,4783 (0,1478)
APARCH	N	0,0424 (0,0476)	0,1480 (0,1232)	0,6109 (0,2586)	−0,1143 (0,1687)	3,1200 (1,4110)		
	S	0,0211 (0,0244)	0,0850 (0,0697)	0,6094 (0,2930)	0,0231 (0,0812)	4,2954 (1,1648)		8,1285 (2,6687)
	SS	0,0223 (0,0227)	0,0877 (0,0655)	0,5994 (0,2614)	0,0364 (0,0744)	4,3118 (1,1213)	0,1265 (0,0564)	8,3115 (2,7229)
	GED	0,0266 (0,0322)	0,1116 (0,0963)	0,5953 (0,3021)	−0,0230 (0,1106)	3,9547 (1,3990)		1,4693 (0,1493)
FIGARCH	N	0,8203 (0,8983)	−0,5353 (0,2437)	−0,4620 (0,2205)		0,3468 (0,1456)		
	S	0,4852 (0,2785)	−0,5041 (0,2468)	−0,4365 (0,2706)		0,2616 (0,1013)		7,4029 (2,2765)
	SS	0,4824 (0,2518)	−0,4758 (0,2961)	−0,4050 (0,3212)		0,2548 (0,0967)	0,1229 (0,0549)	7,6006 (2,3184)
	GED	0,7166 (0,8480)	0,1457 (0,4964)	0,2539 (0,6483)		0,3509 (0,2452)		1,4286 (0,1437)

cd. tab. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
IGARCH	N	0,0228 (0,0246)	0,2296 (0,1409)	0,7704				
	S	0,0183 (0,0154)	0,1881 (0,0880)	0,8119				6,0936 (1,8075)
	SS	0,0186 (0,0164)	0,1833 (0,0916)	0,8167			0,1232 (0,0552)	6,0740 (1,8172)
	GED	0,0193 (0,0168)	0,2070 (0,1004)	0,7930				1,3903 (0,1438)
GARCH-M	N	0,0697 (0,0431)	0,1868 (0,0954)	0,6576 (0,1625)	−0,0729 (0,0539)			
	S	0,0598 (0,0348)	0,1552 (0,0612)	0,7006 (0,1307)	−0,0653 (0,0559)			
	SS	0,0614 (0,0352)	0,1541 (0,0599)	0,6981 (0,1293)	−0,0397 (0,0580)		0,1165 (0,0555)	8,3656 (2,6741)
	GED	0,0632 (0,0356)	0,1690 (0,0697)	0,6846 (0,1327)	−0,0698 (0,0589)			1,4539 (0,1512)

Rozkład błędu: N – normalny, S – Studenta, SS – skośny Studenta, GED – uogólniony rozkład błędu.

W tabeli 3 przedstawiamy wyliczone wartości kryteriów informacyjnych i dokonujemy jednocześnie uporządkowania modeli według sugerowanej przez każde z kryteriów jakości dopasowania. Tabela 4 zawierająca oceny i rankingi jakości prognoz przy użyciu wszystkich wykorzystywanych w tej pracy miar wraz z tabelą 3, stanowi podstawę oceny poszczególnych modeli i próby odpowiedzi na postawione wcześniej pytania.

Nawet przy bardzo pobieżnej analizie tabel 3 i 4 łatwo zauważyć, że rankingi dopasowania modelu i jakości prognoz nie mają ze sobą wiele wspólnego. Kryteria informacyjne dość podobnie oceniają modele. Drobne różnice w uszeregowaniu nie mają większego znaczenia, zwłaszcza że przedział wahań wartości tych kryteriów dla poszczególnych modeli ma długość kilka setnych.

Trzy najlepiej dopasowane modele, według najczęściej stosowanego kryterium BIC, to GARCH(1, 1) z rozkładem błędu *t* Studenta, GARCH(1, 1) ze skośnym rozkładem *t* Studenta oraz IGARCH(1, 1) z rozkładem błędu *t* Studen-

Tabela 3. Wartości kryteriów informacyjnych dla wyestymowanych modeli

Model	Rozkład błędu	AIC		BIC		H-Q		Shibaty	
GARCH	N	1,917908	**21**	1,937434	**19**	1,925456	**21**	1,917871	**21**
	S	1,866505	**6**	1,892540	**1**	1,876570	**2**	1,866440	**6**
	SS	1,861687	**2**	1,894231	**2**	1,874268	**1**	1,861586	**2**
	GED	1,883998	**14**	1,910033	**13**	1,894063	**13**	1,883933	**14**
GJR	N	1,911570	**19**	1,937605	**20**	1,921535	**19**	1,911505	**19**
	S	1,868665	**9**	1,901209	**5**	1,881246	**8**	1,868564	**9**
	SS	1,864164	**4**	1,903217	**8**	1,879261	**5**	1,864018	**4**
	GED	1,884400	**15**	1,916944	**15**	1,896981	**14**	1,884299	**15**
APARCH	N	1,911947	**20**	1,944491	**22**	1,924528	**20**	1,911846	**20**
	S	1,864831	**5**	1,903884	**9**	1,879928	**7**	1,864685	**5**
	SS	1,860117	**1**	1,905679	**11**	1,877730	**3**	1,859919	**1**
	GED	1,882811	**13**	1,921864	**18**	1,897908	**16**	1,882665	**13**
FIGARCH	N	1,923888	**23**	1,949924	**24**	1,933953	**23**	1,923823	**23**
	S	1,872284	**10**	1,904828	**10**	1,884865	**10**	1,872182	**10**
	SS	1,867939	**8**	1,906992	**12**	1,883036	**9**	1,867793	**8**
	GED	1,890259	**17**	1,922803	**18**	1,902840	**18**	1,890158	**17**
IGARCH	N	1,935860	**24**	1,948877	**23**	1,940892	**24**	1,935844	**24**
	S	1,880220	**12**	1,899746	**3**	1,887768	**12**	1,880183	**12**
	SS	1,875883	**11**	1,901919	**6**	1,885948	**11**	1,875818	**11**
	GED	1,896813	**19**	1,916340	**14**	1,904363	**18**	1,896776	**18**
GARCH-M	N	1,918146	**22**	1,944181	**21**	1,928211	**22**	1,918081	**22**
	S	1,867269	**7**	1,899813	**4**	1,879850	**6**	1,867168	**7**
	SS	1,863829	**3**	1,902882	**7**	1,878926	**4**	1,863683	**3**
	GED	1,884464	**16**	1,917008	**16**	1,897045	**15**	1,884363	**16**

Tłustym drukiem podane są pozycje poszczególnych modeli w rankingu wyznaczonym przez każde z kryteriów.

ta. Jeśli dokonujemy oceny uzyskanych prognoz pod względem wielkości współczynnika R^2, to ich miejsca w rankingu są odpowiednio 6, 6 oraz 23. Modele GARCH(1, 1) zajmują miejsca w drugiej dziesiątce, jeśli chodzi o pozostałe kryteria oceny jakości prognozy. Ze względu na większość miar błędów (poza MAPE i AMAPE) do pierwszej trójki zaliczane są modele IGARCH z różnymi rozkładami błędów. Modele te z reguły zajmują odległe

Tabela 4. Ocena jakości prognoz zmienności otrzymanych za pomocą rozważanych modeli w odniesieniu do zmienności *Real3*. Okres prognozy 2 stycznia do 6 czerwca 2003 roku

Model	RB	R^2		MSE		MedSE		ME		MAE		RMSE		MAPE		AMAPE		TIC		LL	
GARCH	N	0,189	2	0,6261	11	0,1577	7	0,4989	9	0,5626	9	0,7912	9	0,5752	13	0,3624	6	0,5100	11	0,9096	8
	S	0,184	6	0,6465	19	0,1622	18	0,5133	18	0,5695	15	0,8040	18	0,5733	4	0,3671	16	0,5252	18	0,9466	16
	SS	0,184	6	0,6429	17	0,1590	10	0,5096	14	0,5676	13	0,8018	16	0,5740	8	0,3649	12	0,5227	16	0,9325	12
	GED	0,187	3	0,6354	12	0,1593	11	0,5057	11	0,5658	11	0,7971	11	0,5740	8	0,3647	10	0,5169	12	0,9283	11
GJR	N	0,168	19	0,6410	15	0,1580	9	0,5083	13	0,5709	19	0,8006	14	0,5834	19	0,3696	20	0,5187	14	0,9625	20
	S	0,182	11	0,6225	9	0,1622	18	0,5174	21	0,5718	20	0,8078	22	0,5742	10	0,3687	19	0,5296	22	0,9618	19
	SS	0,183	10	0,6477	20	0,1593	12	0,5130	17	0,5694	14	0,8048	19	0,5745	11	0,3662	14	0,5263	19	0,9438	14
	GED	0,178	14	0,6457	18	0,1601	13	0,5127	16	0,5706	18	0,8035	17	0,5772	14	0,3685	18	0,5239	17	0,9584	18
APARCH	N	0,182	11	0,6153	8	0,1643	20	0,4922	8	0,5607	8	0,7844	8	0,5780	15	0,3625	7	0,4994	8	0,9227	10
	S	0,178	14	0,6106	7	0,1487	5	0,4862	7	0,5533	4	0,7814	7	0,5699	1	0,3557	2	0,4957	7	0,9018	5
	SS	0,176	16	0,6048	5	0,1489	6	0,4803	5	0,5502	1	0,7777	5	0,5707	2	0,3532	1	0,4910	5	0,8864	3
	GED	0,185	5	0,6051	6	0,1580	9	0,4839	6	0,5542	5	0,7779	6	0,5734	6	0,3576	4	0,4917	6	0,9022	6
FIGARCH	N	0,165	21	0,6362	13	0,1684	22	0,5108	15	0,5770	22	0,7976	12	0,5924	20	0,3883	24	0,5080	9	1,0460	24
	S	0,169	18	0,6620	23	0,1760	24	0,5292	24	0,5816	24	0,8137	23	0,5826	18	0,3842	23	0,5334	23	1,0370	23
	SS	0,170	17	0,6626	24	0,1735	23	0,5288	23	0,5807	23	0,8140	24	0,5813	17	0,3820	21	0,5346	24	1,0270	21
	GED	0,182	11	0,6427	16	0,1677	21	0,5199	22	0,5764	21	0,8017	15	0,5802	16	0,3840	22	0,5179	13	1,0290	22
IGARCH	N	0,166	20	0,5793	1	0,1323	4	0,4528	1	0,5531	3	0,7611	1	0,6089	24	0,3636	9	0,4682	1	0,9001	4
	S	0,151	23	0,5931	4	0,1315	3	0,4591	3	0,5547	6	0,7701	4	0,6081	21	0,3597	5	0,4799	4	0,8847	3
	SS	0,149	24	0,5908	2	0,1277	1	0,4555	2	0,5528	2	0,7686	2	0,6087	23	0,3567	3	0,4785	3	0,8684	1
	GED	0,158	22	0,5909	3	0,1299	2	0,4610	4	0,5565	7	0,7687	3	0,6082	22	0,3647	10	0,4775	2	0,9093	7
GARCH-M	N	0,190	1	0,6260	10	0,1610	16	0,4996	10	0,5630	10	0,7912	9	0,5752	12	0,3631	8	0,5100	10	0,9144	9
	S	0,184	6	0,6487	22	0,1614	17	0,5148	20	0,5700	17	0,8054	21	0,5730	3	0,3673	17	0,5269	21	0,9511	17
	SS	0,184	6	0,6481	21	0,1608	15	0,5139	19	0,5696	16	0,8050	20	0,5733	5	0,3667	15	0,5266	20	0,9457	15
	GED	0,187	3	0,6379	14	0,1604	14	0,5076	12	0,5666	12	0,7987	13	0,5740	8	0,3652	13	0,5189	15	0,9335	13

miejsca w rankingach dopasowania. Najwyższą wartość współczynnika R^2 uzyskana została dla prognoz z modelu GARCH-M(1, 1), który kryteria informacyjne umieszczają na 21-22 miejscu.

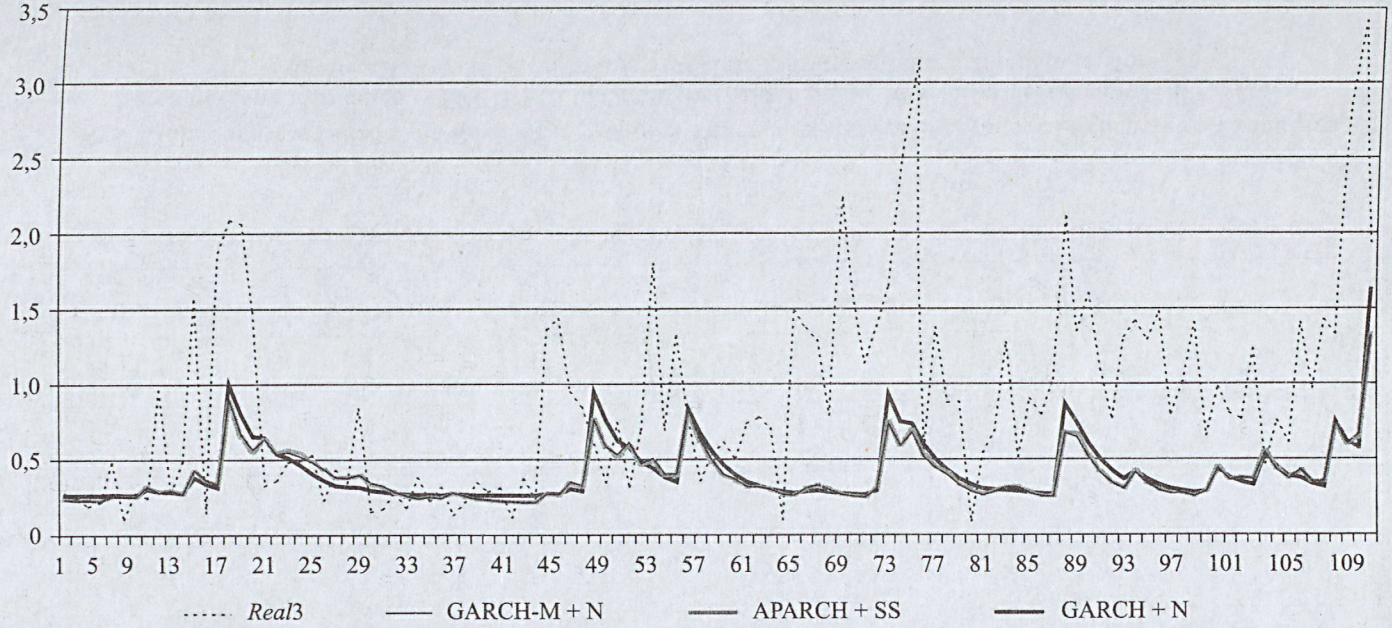
Model APARCH(1, 1) ze skośnym rozkładem t Studenta jako rozkładem błędu jest najlepszy, jeśli bierze się pod uwagę wszystkie kryteria oceny jakości prognozy jednocześnie (suma punktów rankingowych 43). Należy zwrócić uwagę na fakt, że według wartości kryteriów Akaikego i Shibaty jest to najlepiej dopasowany model, a według kryterium Hannana-Quinna znajduje się na trzecim miejscu. Model ten zawiera największą liczbę parametrów z wszystkich badanych tu modeli i w związku z tym kryterium Schwarza, które bardzo mocno karze za dużą liczbę parametrów, umieszcza go dopiero na 11 miejscu.

Trzy modele FIGARCH, o których z góry wiedzieliśmy, że są źle dopasowane, zajmują dalsze miejsca w rankingach dopasowania i rankingach prognoz. Również model FIGARCH z uogólnionym rozkładem błędu, choć jego parametry spełniają wymagane ograniczenia, nie daje dobrych prognoz zmienności.

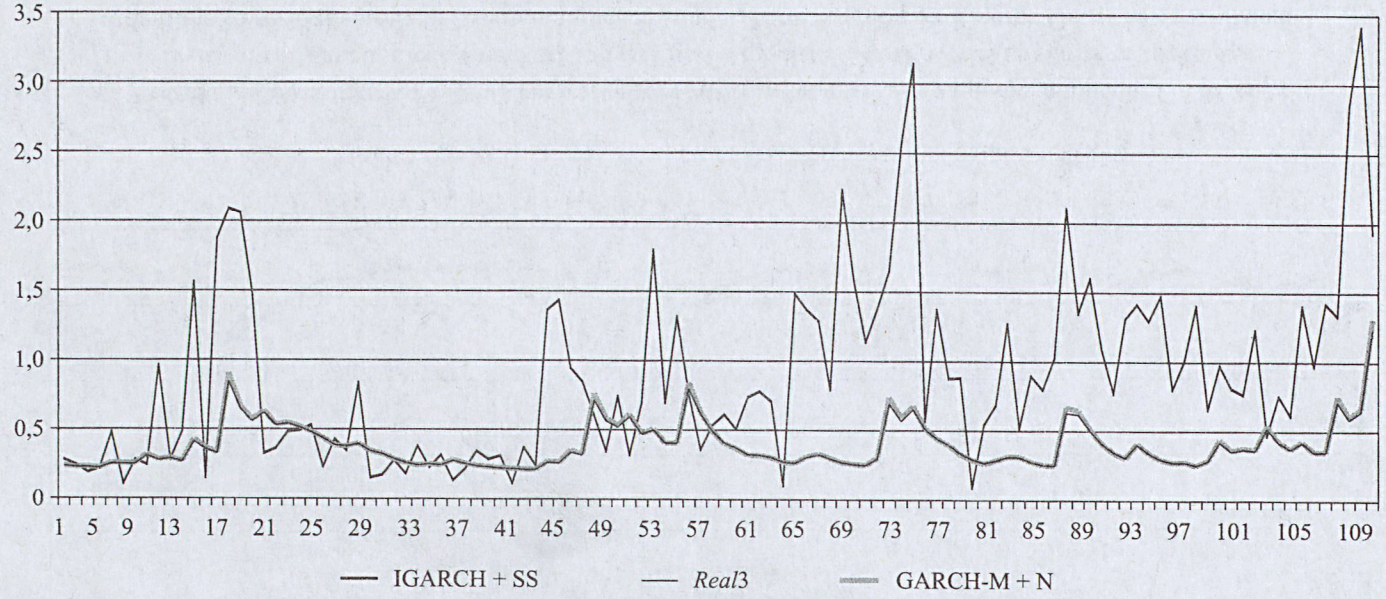
Z analizy rozważanego tu przykładu wynika kilka spostrzeżeń. Przede wszystkim nie ma bezpośredniego, prostego związku między jakością dopasowania modelu w próbie, a jakością prognozy zmienności. Kolejny fakt sprowadza się do tego, że trudno uzyskać model, dający prognozy bardzo dobre pod względem każdej ze zwykle stosowanych miar jakości prognozy. Jeśli zależy nam na uzyskaniu wysokiej wartości współczynnika R^2, to lepsze wyniki zdają się dawać modele prostsze, o mniejszej liczbie parametrów.

Zamieszczone w tabeli 4 wartości miar jakości prognozy pozwalają na uszeregowanie modeli według ich skuteczności prognostycznej. Jednak dopiero porównanie wykresów prognoz i zmienności zrealizowanej pozwala na ocenę, o jakim zróżnicowaniu mówimy. Wykresy przedstawione na rysunkach 1-4 pokazują, że prognozy uzyskane za pomocą różnych modeli różnią się niewiele albo wcale. Przedstawione na rysunku 2 prognozy uzyskane za pomocą najlepszego w rankingu ze względu na współczynnik determinacji w regresji Mincera-Zarnowitza, modelu GARCH-M oraz najgorszego pod tym względem modelu IGARCH ze skośnym rozkładem t Studenta jako rozkładem błędu nie różnią się prawie wcale. Podobnie małe różnice są widoczne zarówno w przebiegu wykresu, jak i prognozowanym poziomie zmienności w zestawieniach przedstawionych na pozostałych rysunkach. Rysunek 4 pokazuje, jak znikomy wpływ na prognozę ma dobór rozkładu błędu modelu.

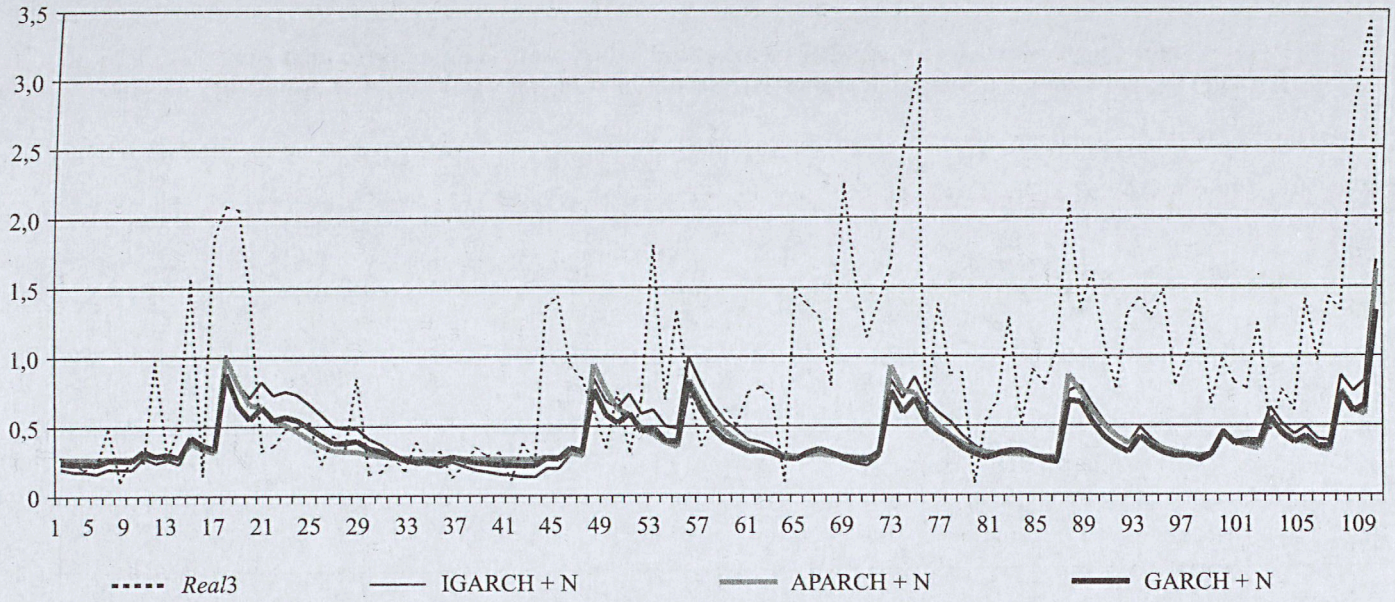
Wyniki przedstawionej analizy wydają się wskazywać możliwą odpowiedź na pytanie, dlaczego przy takim bogactwie modeli typu GARCH, z różnymi zmiennymi objaśniającymi, uwzględniających różne aspekty zachowań finansowych szeregów czasowych najpopularniejszym i najczęściej stosowanym



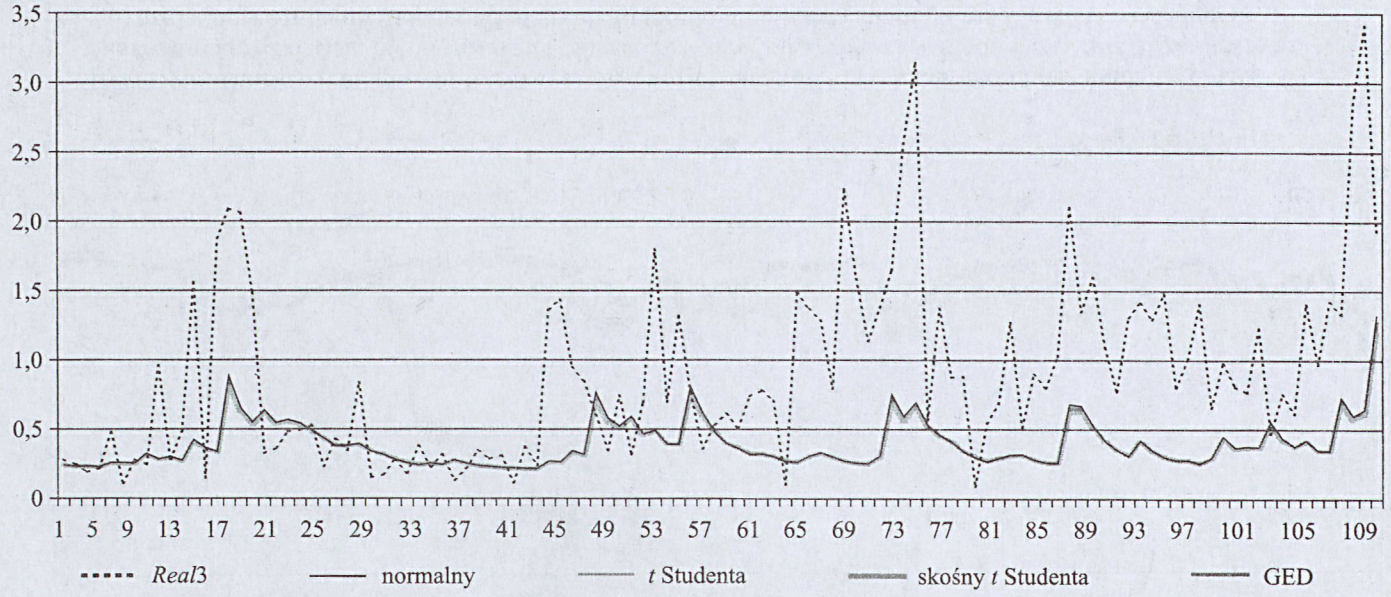
Rys. 1. Zmienność zrealizowana *Real*3 oraz prognozy zmienności uzyskane za pomocą modeli: GARCH-M z normalnym rozkładem błędu (pierwsze miejsce pod względem R^2), APARCH ze skośnym rozkładem *t* Studenta jako rozkładem błędu (średnio najlepszy model, 16 ze względu na R^2) oraz GARCH z rozkładem normalnym (drugie miejsce ze względu na R^2). Okres prognozy od 2 stycznia do 6 czerwca 2003 roku



Rys. 2. Zmienność zrealizowana *Real*3 oraz prognozy zmienności uzyskane za pomocą najlepszego w rankingu ze względu na R^2 modelu GARCH-M z normalnym rozkładem błędu oraz najgorszego w tym rankingu modelu IGARCH ze skośnym rozkładem *t* Studenta jako rozkładem błędu



Rys. 3. Zmienność zrealizowana *Real*3 oraz prognozy zmienności uzyskane za pomocą modeli: IGARCH z normalnym rozkładem błędu (pierwsze miejsce ze względu na większość błędów), APARCH ze skośnym rozkładem *t* Studenta, jako rozkładem błędu (średnio najlepszy model) oraz GARCH z rozkładem normalnym (około 10 pozycji ze względu na błędy). Okres prognozy od 2 stycznia do 6 czerwca 2003 roku



Rys. 4. Zmienność zrealizowana *Real*3 oraz prognozy zmienności uzyskane za pomocą modeli GARCH z różnymi rozkładami błędów. Okres prognozy od 2 stycznia do 6 czerwca 2003 roku

modelem pozostaje GARCH(1, 1). Opisane doświadczenia pokazują, że bardzo często dokładniejszy opis zachowania zmienności w próbie nie skutkuje wyraźną poprawą jakości prognoz. Jeśli uwzględnimy to, że czas estymacji bardziej złożonych modeli jest z reguły dłuższy, cały wysiłek może okazać się wysoce nieopłacalny. Proste modele dostarczają bowiem prognoz o jakości porównywalnej z jakością prognoz uzyskiwanych za pomocą modeli bardzo złożonych.

Nie należy z tego faktu wyciągać pochopnych wniosków co do przydatności bardziej rozbudowanych modeli GARCH. Są one niezastąpionym źródłem informacji na temat zależności i mechanizmów występujących na rynkach finansowych i w związku z tym są niezwykle użyteczne. Przedstawione tutaj wyniki pokazują jedynie, że nie zawsze prognozy uzyskane za pomocą modeli bardziej rozbudowanych okazują się lepszej jakości niż prognozy uzyskane za pomocą modeli prostych.

Podsumowanie

Prognozowanie zmienności instrumentów finansowych należy do najważniejszych zadań w procesie zarządzania ryzykiem. Jednym z możliwych sposobów prognozowania zmienności jest wykorzystanie modeli z rodziny GARCH. Jest to bardzo szeroka rodzina modeli, zawierająca zarówno modele bardzo proste, jak i bardzo złożone, zawierające dużą liczbę parametrów.

W niniejszej pracy, na przykładzie szeregu notowań kursu walutowego USD/PLN, podjęto próbę odpowiedzi na narzucające się pytanie o związek jakości dopasowania modelu, mierzonej za pomocą kryteriów informacyjnych, z jakością uzyskiwanych za jego pomocą prognoz. Przeprowadzona analiza pokazuje, że modele różniące się jakością dopasowania mogą dawać prognozy porównywalnej jakości. Sugeruje to możliwość wykorzystywania w prognozowaniu zmienności cen instrumentów finansowych modeli prostych, o małej liczbie parametrów. Bardziej skomplikowane modele stanowią użyteczne narzędzia opisu dynamiki rynku, ale uzyskiwane za ich pomocą prognozy niewiele różnią się od tych uzyskiwanych na przykład za pomocą najprostszych modeli GARCH. W szczególności opisane doświadczenia pokazują, że zakładany rozkład błędu ma zwykle niewielki wpływ na jakość uzyskiwanych prognoz.

Literatura

[1] Andersen T.G., Bollerslev T., *Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts*, International Economic Review 1998, 39, 885-905

[2] Baillie R., Bollerslev T., Mikkelsen H., *Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics 1996, 74, 3-30

[3] Bollerslev T., *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics 1986, 31, 307-327

[4] Bollerslev T., *A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return*, Review of Economics and Statistics 1987, 69, 542-547

[5] Bollerslev T., Mikkelsen H., *Modeling and Pricing Long-memory in Stock Market Volatility*, Journal of Econometrics 1996, 73, 151-184

[6] Chung C.-F., *Estimating the Fractionally Integrated GARCH Model*, National Taiwan Uniwersity Working Paper, 1999

[7] Ding Z., Granger C.W.J., Engle R., *A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model*, Journal of Empirical Finance 1993, 1, 83-106

[8] Engle R.F., *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, Econometrica 1982, 50, 987-1007

[9] Engle R.F., Bollerslev T., *Modeling the Persistence of Conditional Variances*, Econometric Reviews 1986, 5, 1-50

[10] Engle R.F., Lilien D.M., Robins R.P., *Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model*, Econometrica 1987, 55, 525-542

[11] Fernández C., Osiewalski J., Steel M.F.J., *Modelling and Inference with v-spherical Distributions*, Journal of the American Statistical Association 1995, 90, 1331-1340

[12] Fernández C., Steel M.F.J., *On Bayesian Modelling of Fat Tails and Skewness*, Journal of the American Statistical Association 1998, 93, 359-371

[13] Glosten L.R., Jagannathan R., Runkle D.E., *On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*, Journal of Finance 1993, 48, 1779-1801

[14] Hol E., Koopman S.J., *Stock Index Volatility Forecaststing with High Frequency Data*, Tinbergen Institute Discussion Paper 2002, 068/4

[15] Laurent S., Peters J.-P., G@RCH2.2: *An Ox Package for Estimating and Forecasting Various ARCH Models*, Journal of Economic Surveys 2002, 16, 447-484

[16] Ling S., McAleer M., *Stationarity and the Existence of Moments of a Family of GARCH Processes*, Journal of Econometrics 2002, 106, 109-117

[17] Nelson D.B., *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*, Econometrica 1991, 59, 347-370
[18] Osiewalski J., Pipień M., *GARCH-in-Mean Through Skewed t Conditional Distributions: Bayesian Inference for Exchange Rates*, Macromodels'1999, Łódź 2000 355-369
[19] Welfe A., *Ekonometria*, PWE, Warszawa 1998.

GARCH MODELS: GOODNESS OF IN-SAMPLE-FIT AND QUALITY OF VOLATILITY FORECASTS

Summary

GARCH models are useful tool for modeling the volatility of financial instruments. The aim of this paper is to verify if in the case of models from this family the improvement of the goodness of in-sample-fit results in better volatility forecasts. Time series under scrutiny consists of daily returns of USD/PLN exchange rate. Our results show that models which are better in the sense of information criteria may produce worse forecasts. The difference between quality of the forecasts from GARCH(1,1) and those from more sophisticated GARCH models is rather insignificant.