Edyta SIDOR-BANASZEK

REZERWY W UBEZPIECZENIACH NA ŻYCIE

Wstęp

Jednym z najważniejszych problemów firmy ubezpieczeniowej jest ustalenie odpowiedniego poziomu rezerw. Nie mogą one być ani za niskie, ani za wysokie. Stosowane są różne metody ich tworzenia w zależności od rodzaju ubezpieczenia. Opierając się na dostępnej literaturze, przedstawiono w pracy ogólną charakterystykę rezerw techniczno-ubezpieczeniowych oraz podstawowe metody rachunku rezerw „matematycznych".

1. Rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe

Zgodnie z wymogiem ustawowym ubezpieczyciel jest zobowiązany tworzyć pewne fundusze rezerw, którymi są środki przeznaczone na pokrycie bieżących i przyszłych zobowiązań jakie mogą wynikać z zawartych umów ubezpieczenia. Są one nazywane rezerwami techniczno-ubezpieczeniowymi, stanowiąc ważny element w gospodarce finansowej ubezpieczyciela.

Celem tworzenia rezerw techniczno-ubezpieczeniowych jest osiągnięcie realnej i rzeczywistej wysokości wyniku finansowego ubezpieczyciela za dany okres obrachunkowy. Ponadto tworzenie i obliczanie ich wysokości ma wpływ na wewnętrzną kontrolę operacji finansowych, sprawozdawczość dla udziałowców, obliczanie zysku dla potrzeb podatkowych, ustalanie składek oraz na wykazanie wypłacalności i siły finansowej ubezpieczyciela.

Obecnie przepisy prawne przewidują osiem rodzajów rezerw techniczno-ubezpieczeniowych:

- rezerwa składek,
- rezerwa na ryzyko niewygasłe,

- rezerwa na niewypłacone odszkodowania i świadczenia, w tym rezerwa na skapitalizowaną wartość rent,
- rezerwa na wyrównanie szkodowości (ryzyka),
- rezerwa w dziale ubezpieczeń na życie,
- rezerwa w dziale ubezpieczeń na życie, gdy ryzyko lokaty (inwestycyjne) ponosi ubezpieczający,
- rezerwa na premie i rabaty (bonifikaty) dla ubezpieczonych,
- pozostałe rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe określone w statucie.

Ze względu na naturę pochodzenia rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe można podzielić na trzy grupy:

- rezerwy związane ze składką,
- rezerwy związane z odszkodowaniami i świadczeniami,
- pozostałe rezerwy.

Do pierwszej grupy należą następujące rodzaje rezerw:

Rezerwa składek znana także jako przeniesienie składki – tworzona jest w zakładach ubezpieczeń majątkowych i osobowych. Stanowi część składki przypisanej brutto przypadającą na przyszłe okresy sprawozdawcze, proporcjonalnie do okresu, na jaki składka jest przypisana, lub w relacji do stopnia ryzyka przewidywanego w następnych okresach sprawozdawczych. Przeniesienie składek ma zastosowanie wówczas, gdy okres zawartego ubezpieczenia (umowy ubezpieczenia) nie mieści się lub nie pokrywa się z okresem sprawozdawczym czy okresem danego roku obrotowego, a przypisana składka ubezpieczeniowa dotyczy dwóch lub więcej okresów sprawozdawczych.

Rezerwa na pokrycie ryzyka niewygasłego – powstaje w momencie, gdy z jakichś przyczyn składka nie została dopasowana do potrzeb danego typu ubezpieczenia. Rezerwa ta służy na pokrycie odszkodowań, świadczeń i innych kosztów, jakie mogą powstać z zawartych umów, które nie wygasają z ostatnim dniem okresu sprawozdawczego, a wysokość rezerwy nie jest wystarczająca na pokrycie zobowiązań zakładu ubezpieczeń. Stanowi ona różnicę pomiędzy przewidywaną wartością przyszłych odszkodowań, świadczeń i kosztów, które mogą wynikać z przyszłych zdarzeń w odniesieniu do umów ubezpieczenia, niewygasających z końcem okresu sprawozdawczego, a wielkością rezerwy składki oraz przychodami, które mogą być przypisane z tytułu tych umów i dotyczących tego samego ubezpieczenia. Rezerwa ta ma zastosowanie w tych ubezpieczeniach, w których występuje ryzyko wzrastające (np. w ubezpieczeniach odpowiedzialności cywilnej lub w ubezpieczeniach chorób i inwalidztwa – ryzyko wzrasta z wiekiem, natomiast składka jest ustalana na średnim poziomie) lub które charakteryzują się nierównomiernym rozkładem ryzyka w okresie ubezpieczenia (np. ubezpieczenie upraw).

Rezerwa na wyrównanie ryzyka – tworzy się ją w wysokości zapewniającej wyrównanie wahań współczynnika szkodowości w przyszłości. Ma zastosowanie do wszystkich grup ryzyka z wyjątkiem grupy 14 działu II (ubezpieczenia kredytu), w której to występują lub mogą wystąpić istotne wahania współczynnika szkodowości. Rezerwa ta odgrywa bardzo ważną rolę z punktu widzenia rentowności firmy ubezpieczeniowej ponieważ współczynnik ten pozwala ocenić nie tylko rentowność operacji finansowych firmy ubezpieczeniowej, ale również pozwala określić prawidłowość kalkulacji składek.

Rezerwy w dziale ubezpieczeń na życie zwane **rezerwami „matematycznymi"** – stanowią wyodrębnioną część składki brutto tzw. składki oszczędnościowej, która służy do budowania tej rezerwy. W ubezpieczeniach na życie bieżącej składki nie ustala się według przewidywanego ryzyka w okresie jej opłaty, ale według ryzyk w całym wieloletnim okresie ubezpieczenia. Ustalając jednakową składkę płaconą przez całe życie lub określoną liczbę lat, zakładamy z góry, że w pierwszym okresie składka jest za duża w stosunku do ryzyka. Nadpłacenie części składki stanowi formę oszczędzania, pozwalającą na płacenie składki małej w stosunku do ryzyka w późniejszych latach. Różnicę między wartością teraźniejszą jeszcze nieopłaconych składek a wartością teraźniejszą przewidywanego świadczenia musi mieć ubezpieczyciel do swej dyspozycji, żeby był zdolny do wywiązywania się z zobowiązań. Różnica ta stanowi właśnie wartość rezerwy „matematycznej", tj. zaoszczędzoną i odłożoną ze składek sumę na pokrycie świadczeń w przyszłości. W przypadku ubezpieczeń na życie, w których ryzyko inwestycyjne ponosi zakład ubezpieczeń, rezerwy techniczne tworzy się w wysokości lokaty, dokonywanej zgodnie z warunkami zawartej umowy ubezpieczenia.

Do grupy rezerw związanych z odszkodowaniami i świadczeniami zaliczamy:

Rezerwy na niewypłacone odszkodowania i świadczenia, zwane rezerwami szkód. Związane są one z takimi sytuacjami, w których szkody pomimo, że zaistniały w okresie obrachunkowym, to jednak nie zostały w tym samym okresie wypłacone. Rezerwa ta spełnia ważną rolę w ocenie sytuacji finansowej ubezpieczyciela (szczególnie dla ustalenia rzeczywistego wskaźnika szkodowości finansowej ubezpieczyciela), choć jest trudna do obliczenia. W zależności od typu szkody ubezpieczyciel musi inaczej postępować przy obliczaniu wysokości tej rezerwy, biorąc pod uwagę różne czynniki związane z danym rodzajem ryzyka, portfelem ryzyk w rodzaju, grupie czy dziale ubezpieczeń, zmianą ryzyka (opłatą dodatkowej składki), czasem likwidacji szkód, poziomem inflacji itd.

Do ostatniej grupy rezerw zaliczamy:

Rezerwy na premie i rabaty dla ubezpieczonych, uprawnionych lub uposażonych, które tworzy się w wysokości kwot, o które zgodnie z zawartymi umowami ubezpieczenia mają być powiększone przyszłe świadczenia bądź pomniejszone przyszłe wpłaty składek ubezpieczonych.

Pozostałe rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe, które mogą występować tylko wtedy, gdy są przewidziane w statucie danego zakładu ubezpieczeń i ich tworzenie jest uzasadnione. Stanowią najczęściej różnego rodzaju rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe, przewidziane na szkody katastrofalne lub ryzyko niewygasłe.

Rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe mają duży wpływ na wynik finansowy zakładu ubezpieczeń. Przyjęte zasady i metody, związane z tworzeniem rezerw techniczno-ubezpieczeniowych decydują nie tylko o samej precyzyjności i dokładności ich ustalania, ale również o ich wielkości. Przyjęcie różnych zasad i metod w tym zakresie mogłoby spowodować, że wyniki finansowe danego zakładu ubezpieczeń z poszczególnych lat obrachunkowych czy okresów sprawozdawczych nie byłyby w pełni porównywalne oraz nie przedstawiałyby jego rzeczywistego stanu.

Zgodnie z polskim systemem rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe mogą być ustalane według następujących metod:

- indywidualnej – polegającej na ustaleniu rezerwy składek oddzielnie dla każdej umowy ubezpieczenia, natomiast rezerwy szkodowej oddzielnie dla każdej pojedynczej zgłoszonej szkody lub wypadku;
- uproszczonej – polegającej na przemnożeniu liczby zgłoszonych nieuregulowanych szkód i wypadków przez ustaloną statystycznie średnią wysokość odszkodowania lub świadczenia za rok, półrocze lub ostatni kwartał roku obrotowego, w zależności od rodzaju ryzyka i poziomu inflacji;
- ryczałtowej – polegającej na ustaleniu rezerwy zbiorczo dla całego portfela ubezpieczeniowego lub jego części jako procent przypisu składki lub wartości wypłaconych odszkodowań i świadczeń; metoda ryczałtowa powinna dawać wyniki zbliżone do uzyskanych przy zastosowaniu metody indywidualnej, co oznacza konieczność okresowego weryfikowania wyników, uzyskiwanych za pośrednictwem przyjętej metody ryczałtowej;
- aktuarialnej – polegającej na ustalaniu rezerwy przy zastosowaniu metod matematyki i statystyki ubezpieczeniowej.

2. Rezerwy „matematyczne"

W ubezpieczeniach na życie przedmiotem ubezpieczenia jest śmierć, choroba, inwalidztwo osoby ubezpieczonej. Są to ubezpieczenia długoterminowe. Zatem pełny bilans wpłaconej składki i wypłaconych świadczeń dokonywany jest po zakończeniu okresu ubezpieczenia, który upływa na ogół po wielu latach. Ubezpieczenia na życie charakteryzują się tym, że umowa ubezpieczenia kończy się zawsze wypłaceniem świadczenia zgodnie z zawartą umową ubezpieczenia. Zatem firma ubezpieczeniowa powinna posiadać pewne zarezerwowane kwoty, które będą zabezpieczać jej wypłacalność. Umowy, jakie zawiera, są tak ustalone, aby w każdym momencie wartość oczekiwana różnicy pomiędzy przyszłymi świadczeniami a składkami była nieujemna. Składka, która jest wpłacana, ma pokryć ryzyko ubezpieczenia w badanym okresie oraz zwiększone ryzyko w przyszłym okresie, które nie zostanie pokryte odpowiednio wysoką składką. Zwiększone ryzyko ubezpieczenia w przyszłym okresie związane jest z tym, że prawdopodobieństwo zgonu osoby rośnie wraz z wiekiem. Zatem osoby w starszym wieku musiałyby płacić bardzo wysokie składki, w stosunku do aktualnego ryzyka. Aby tego uniknąć stosuję się zasadę jednolitej składki płaconej przez cały okres ubezpieczenia. Oznacza to, że ubezpieczony w pierwszym okresie nadpłaca składkę, która jest utrzymywana przez zakład ubezpieczeń jako tzw. **rezerwa „matematyczna"**. Służy ona na pokrycie przyszłych zobowiązań. Środki gromadzone w postaci tej rezerwy nie są własnością ubezpieczyciela, ale własnością ubezpieczonego. Stanowią jego oszczędności na rzecz przyszłych świadczeń. Zatem w całym procesie ubezpieczeniowym bardzo istotnym czynnikiem jest właściwe ustalenie wysokości składek płaconych przez osoby ubezpieczone w celu stworzenia odpowiedniej rezerwy „matematycznej".

Wielkość rezerw „matematycznych" zależy od wielu czynników wśród których należy wymienić:

- rodzaj ubezpieczenia,
- okres ubezpieczenia,
- wiek ubezpieczonego,
- wysokość stopy procentowej,
- wielkość inflacji.

Istnieją dwie metody obliczania rezerw „matematycznych":

- prospektywna,
- retrospektywna.

2.1. Metoda prospektywna obliczania rezerw

Metoda prospektywna obliczania rezerwy „matematycznej" polega na określeniu potrzebnej kwoty, która łącznie z wpłaconymi jeszcze w przyszłości składkami oraz z uzyskanymi odsetkami pozwoli na wypłatę przyszłych świadczeń.

Rozpatrzmy ubezpieczenie na całe życie. W ubezpieczeniu tym ubezpieczony jest objęty ochroną ubezpieczeniową do końca życia. Z tytułu tego ubezpieczenia zawsze następuje wypłata określonej z góry sumy, niezależnie od tego, kiedy śmierć ubezpieczonego nastąpi. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A_x – obecna (zdyskontowana) wartość przyszłych świadczeń, czyli wartość ubezpieczenia na życie o sumie ubezpieczenia 1 zł osoby x-letniej, a także jednorazowa składka netto ubezpieczenia na całe życie,

P – jednakowa roczna składka płatna w ciągu całego życia osoby ubezpieczonej,

$\ddot{a}_x$ – czynnik, który jest równy zdyskontowanej wartości renty życiowej w wysokości 1 zł, płatnej z góry dla osoby x-letniej.

Wówczas

$$P\ddot{a}_x = A_x. \tag{1}$$

Równość ta zachodzi tylko w chwili zawarcia umowy. W kolejnych okresach ubezpieczenia wartość obecna składek netto jest coraz mniejsza, ponieważ mniej składek zostaje do zapłacenia. W tym samym czasie rośnie obecna wartość przyszłych świadczeń, gdyż coraz bliższy jest moment płatności. Różnica między rosnącą obecną wartością wypłat, a malejącą obecną wartością przyszłych składek netto musi być pokryta określoną rezerwą. W metodzie prospektywnej, wielkość rezerwy obliczana jest jako wartość oczekiwana różnicy pomiędzy wartością przyszłych świadczeń a wartością przyszłych składek netto.

Załóżmy, że w momencie wydania polisy ubezpieczony miał x lat. Wtedy rezerwa „matematyczna" po t latach równa jest wartości oczekiwanej różnicy między przyszłymi świadczeniami i przyszłymi składkami, liczonej w momencie t, tj. gdy ubezpieczony osiąga wiek $x+t$.

Ponieważ w zwykłym ubezpieczeniu na całe życie osoby w wieku x, zawartym na sumę 1 zł na końcu roku t trwania polisy, przyszła składka stanowi rentę życiową P płatną na początku każdego roku przez osobę w wieku $x+t$, obecną wartość tych składek możemy zapisać jako

$$P\ddot{a}_{x+t}. \tag{2}$$

Wartość przyszłych świadczeń wynosi

$$A_{x+t}, \tag{3}$$

zatem rezerwa składek w roku t jest równa

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - P\ddot{a}_{x+t} . \tag{4}$$

Stosując liczby komutacyjne

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}, \qquad \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x},$$

gdzie:

$$D_x = v^x \cdot l_x ,$$

$$N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t} ,$$

$$M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t} , \qquad C_x = v^{x+1} \cdot d_x ,$$

przy czym:

D_x – zdyskontowana liczba osób, które osiągnęły wiek x lat,
v^x – czynnik dyskontujący,
l_x – liczba osób dożywających wieku x lat,
d_x – liczba osób zmarłych w wieku x lat,
C_x – zdyskontowana liczba zgonów osób w wieku x,

otrzymujemy

$$ {}_tV_x = \frac{1}{D_{x+t}} \left[M_{x+t} - P_x N_{x+t} \right]. \tag{5}$$

W przypadku ubezpieczenia mieszanego – na życie i na dożycie – zakładamy, że w momencie podpisania umowy ubezpieczony miał x lat i opłacał z góry składkę roczną w wysokości P przez k lat, a suma świadczenia wynosi 1 zł.

Wtedy zdyskontowana do momentu $x+t$ wartość oczekiwana składek jest równa:

$$P \cdot \sum_{j=0}^{k-t-1} v^j \cdot {}_{t+j}p_x = P \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{k-t}|} \quad \text{pod warunkiem, że } t \le k-1, \tag{6}$$

gdzie:

$v = \frac{1}{1+i}$, i – stopa procentowa,

${}_{t+j}p_x$ – oznacza prawdopodobieństwo, że osoba – obecnie w wieku x lat – dożyje wieku $(x+t+j)$ lat.

Zatem, jeżeli $t \ge k$, czyli w momencie obliczania rezerwy i w momentach dalszych ubezpieczony nie płaci składki, więc wartość ta jest równa 0.

Natomiast zdyskontowana do momentu $x+t$ wartość oczekiwana przyszłych świadczeń jest równa:

$$\sum_{j=0}^{n-t-1} v^{j+1+t} \cdot {}_{t+j}p_x \cdot q_{x+t+j} + v^{n-t} \cdot {}_{n-t}p_x = A_{x+t:\overline{n-t}|}, \tag{7}$$

gdzie:

${}_{n-t}p_x$ – prawdopodobieństwo, że osoba obecnie w wieku x lat dożyje wieku $(x+n-t)$ lat,

${}_{t+j}p_x \cdot q_{x+t+j}$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x lat przeżyje okres $(t+j)$ lat i następnie umrze w ciągu jednego roku.

Stąd rezerwa „matematyczna" dla ubezpieczenia mieszanego w momencie t wynosi

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|} - P \cdot a_{x+t:\overline{k-t}|}, & \text{gdy } t = 0, 1, ..., k-1, \\ A_{x+t:\overline{n-t}|}, & \text{gdy } t = k, k+1, ..., n. \end{cases} \tag{8}$$

Stosując liczby komutacyjne

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}, \quad \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x},$$

mamy

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \dfrac{1}{D_{x+t}}\left[M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n} - P\left(N_{x+t} - N_{x+n}\right)\right], & \text{gdy } t = 0, 1, ..., k-1, \\ \dfrac{1}{D_{x+t}}\left[M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}\right], & \text{gdy } t = k, k+1, ..., n. \end{cases} \tag{9}$$

Sposób obliczania rezerw dla innych rodzajów ubezpieczeń metodą prospektywną jest analogiczny. I tak na przykład rezerwa „matematyczna" dla terminowego ubezpieczenia na wypadek śmierci wynosi

$${}_tV^1_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A^1_{x+t:\overline{n-t}|} - P \cdot a_{x+t:\overline{k-t}|}, & \text{gdy } t = 0, 1, ..., k-1, \\ 0, & \text{gdy } t = k, k+1, ..., n. \end{cases} \tag{10}$$

2.2. Metoda retrospektywna obliczania rezerw

Drugą metodą obliczania rezerwy „matematycznej" jest metoda retrospektywna, która oparta jest na przychodach i rozchodach ubezpieczyciela z przeszłości. Zgodnie z tą metodą, rezerwę stanowi zdyskontowana – do momentu zawarcia

umowy – wartość oczekiwana różnicy między wpływem składki i świadczenia w ciągu t lat trwania ubezpieczenia.

Rozpatrzmy n-letnie terminowe ubezpieczenie na wypadek śmierci. Załóżmy, że suma świadczenia jest równa 1 zł i że w chwili zawarcia umowy ubezpieczony miał x lat oraz przez k lat opłacał z góry składkę roczną w wysokości P. Wówczas zdyskontowana do momentu x wartość oczekiwana składek jest równa

$$P \cdot \sum_{j=0}^{s-1} v^j \cdot {}_jp_x, \tag{11}$$

gdzie:

$s = \min(t, k), \quad t = 1, 2, ..., n,$

$v = \frac{1}{1+i}$, i – stopa procentowa,

${}_jp_x$ – prawdopodobieństwo, że osoba obecnie w wieku x lat dożyje wieku $(x+j)$ lat.

Wzór (11) można zapisać w postaci:

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{s}|}. \tag{12}$$

Natomiast zdyskontowana do momentu x wartość oczekiwana przyszłych świadczeń jest równa:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \cdot {}_jp_x \cdot q_{x+k}, \tag{13}$$

gdzie:

q_{x+k} – jednoroczne prawdopodobieństwo śmierci osoby obecnie w wieku $(x+k)$.

W tym rodzaju ubezpieczenia rezerwa matematyczna w chwili t jest potrzebna, o ile osoba ubezpieczona dożyła tej chwili, co zachodzi z prawdopodobieństwem ${}_tp_x$. W przeciwnym wypadku rezerwa jest równa 0.

Stąd rezerwa „matematyczna" w momencie t dla n-letniego, terminowego ubezpieczenia na wypadek śmierci wynosi

$${}_tV^1_x = \frac{P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{s}|} - A^1_{x:\overline{n}|}}{v^t \cdot {}_tp_x}. \tag{14}$$

Przy obu metodach obliczania rezerwy „matematycznej" wynik otrzymamy taki sam. Wynika to z faktu, że ani w przypadku metody prospektywnej, ani w przypadku metody retrospektywnej rezerwy nie obliczamy według wyników operacji zakładu, ale w oparciu o założenia stanowiące podstawę do obliczenia składki, m.in. odpowiednia tablicę trwania życia i złożone oprocentowanie re-

zerw. Równość rezerw liczonych według tych metod zachodzi dopóty, dopóki nie ulegną zmianie podstawy kalkulacyjne ubezpieczeń, czyli na przykład techniczna stopa procentowa.

2.3. Rezerwa początkowa i końcowa oraz rezerwa średnia w danym roku

Rezerwa początkowa dla danej polisy jest to rezerwa obliczona na początku roku polisowego, zaraz po otrzymaniu przez zakład ubezpieczeń składki. Zatem początkowa rezerwa w roku t składa się z **rezerwy końcowej** poprzedniego roku, powiększoną o składkę netto wpłaconą na początku roku t. Rezerwę początkową w roku t, dla danej polisy wydanej dla osoby w wieku x, oznaczamy jako ${}_tI$. Jest ona równa

$$ {}_tI = {}_{t-1}V + P . \tag{15}$$

Jeśli natomiast skończy się okres płatności składki i żadne nowe składki nie będą w danym ubezpieczeniu wpłacane, to rezerwa początkowa każdego roku jest jednocześnie rezerwą końcową poprzedniego roku.

Średnia rezerwa jest stosowana dla określenia przeciętnej rezerwy dla danego roku polisowego, to jest średniej pomiędzy rezerwą początkową i końcową. Możemy to zapisać następująco:

$$ \frac{{}_{t-1}V + P + {}_tV}{2} . \tag{16}$$

Pojęcie średniej rezerwy jest powszechnie stosowane i wynika z tego, że towarzystwa ubezpieczeń na życie są zobowiązane przez organ nadzorczy do przedstawienia na końcu roku sprawozdania pokazującego, wśród innych danych, całkowite rezerwy na wypłatę świadczeń z czynnych polis. Dla ułatwienia przygotowania tego rodzaju sprawozdania zakłada się, że wszystkie polisy wydane w danym roku kalendarzowym zostały wydane w połowie tego roku. W związku z tym wszystkie polisy wydane w danym roku są traktowane jako wydane 1 lipca. Ponieważ dzień 31 grudnia, stanowiący datę szacowania rezerw, znajduje się pośrodku początku i końca rocznego okresu polisowego, obliczona rezerwa stanowi przeciętną rezerwy początkowej i końcowej dla danego roku, czyli rezerwę średnią.

2.4. Rezerwy zmodyfikowane

W celu obliczenia rezerw zmodyfikowanych stosuje się metody prospektywną i retrospektywną, ale uwzględnia się również koszty, jakie ponosi zakład ubez-

pieczeń. Dotychczas przy obliczaniu rezerwy stosowana była składka netto. Jak wiemy, składka jaką otrzymuje firma ubezpieczeniowa, jest składką brutto. Musi ona pokryć zarówno świadczenia wynikające z umowy, jak też wydatki związane z prowadzeniem ubezpieczenia tak bezpośrednie, jak i pośrednie, a więc wydatki związane z zawarciem ubezpieczenia oraz z jego obsługą. Składka brutto składa się zatem ze składki netto, równoważącej spodziewane wydatki na świadczenia ubezpieczeniowe oraz dodatków na koszty, zwanych narzutami do składki netto.

W każdej firmie ubezpieczeniowej inaczej wylicza się składki brutto. Załóżmy, że roczna składka netto wynosi P, a suma ubezpieczenia jest równa 1 zł. Jeden ze sposobów obliczenia składki brutto jest przedstawiony w [3], gdzie jej wysokość można wyznaczyć ze wzoru

$$B = \frac{\alpha_1 + P \cdot \sum_{j=0}^{k-1} v^j {}_j p_x + \alpha_2 \cdot \sum_{j=0}^{n-1} v^j {}_j p_x + \alpha_5 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} v^j {}_j p_x}{(1-\alpha_3) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} v^j {}_j p_x - \alpha_4} \tag{17}$$

lub

$$B = \frac{\alpha_1 + P\ddot{a}_{x:\overline{k}|} + \alpha_2 \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \alpha_5 \ddot{a}_{x:\overline{k}|}}{(1-\alpha_3)\ddot{a}_{x:\overline{k}|} - \alpha_4}. \tag{18}$$

W metodzie Zillmera obliczania rezerwy zmodyfikowanej zakłada się, że okres płacenia składek jest równy okresowi ubezpieczenia, czyli że $k=n$ oraz że koszt prowizji agenta jest równy zero, $\alpha_4=0$. Załóżmy, że składka brutto jest płatna z góry.

Wtedy zdyskontowana do momentu $x+t$ wartość oczekiwana składek brutto wynosi

$$\sum_{j=0}^{n-t-1} B \cdot v^j \cdot {}_{t+j}p_x = B \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, \tag{19}$$

natomiast zdyskontowana do momentu $x+t$ wartość oczekiwana świadczeń i wydatków ponoszonych przez zakład ubezpieczeń wynosi

$$A_{x+t:\overline{n-t}|} + (\alpha_2 + \alpha_5 + B\alpha_3)\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}. \tag{20}$$

Obliczona metodą prospektywną rezerwa zmodyfikowana jest równa różnicy zdyskontowanych wartości oczekiwanych uzyskanych składek i wypłaconych świadczeń:

$$
\begin{aligned}
{}_tV^{\mathrm{mod}}_{x:\overline{n}|} &= A_{x+t:\overline{n-t}|} + (\alpha_2 + \alpha_5 + B\alpha_3)\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - B\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, \\
{}_tV^{\mathrm{mod}}_{x:\overline{n}|} &= A_{x+t:\overline{n-t}|} + (\alpha_2 + \alpha_5)\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + (\alpha_3 - 1)B\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Wiedząc, że

$$
B = \frac{\alpha_1 + P\ddot{a}_{x:\overline{k}|} + \alpha_2\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \alpha_5\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}{(1-\alpha_3)\,\ddot{a}_{x:\overline{k}|} - \alpha_4}
$$

oraz

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P\cdot a_{x+t:\overline{n-t}|},$$

otrzymujemy

$${}_tV^{\mathrm{mod}}_{x:\overline{n}|} = {}_tV_{x:\overline{n}|} - \alpha_1\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{22}$$

Wynika stąd, że rezerwa ustalona dla składki netto przewyższa rezerwę zmodyfikowaną. Istotnym założeniem w metodzie zmodyfikowanej jest to, że prowizja dla agenta równa jest 0. Większość wydatków poniesionych przez zakład ubezpieczeń w pierwszym roku dotyczy sprzedaży ubezpieczenia oraz wystawienia polisy. Zatem znaczna część składki pierwszorocznej przeznaczana jest na wypłatę prowizji. Wiemy, że taka sytuacja jest niebezpieczna dla zakładów nowych lub szybko rozwijających się, w których dominują ubezpieczenia pierwszoroczne, a także drugo- lub trzecioroczne, kiedy to jeszcze koszty akwizycji jeszcze się nie zamortyzowały. Uchylenie omawianego założenia mogłoby spowodować, że po pierwszym roku ubezpieczenia wyznaczone rezerwy byłyby niewystarczające i musiałyby być pokryte z ogólnej nadwyżki towarzystwa, jeżeli taka istniałaby.

2.5. Rezerwy ciągłe

Rozpatrywane powyżej metody obliczania rezerw „matematycznych" dotyczyły ubezpieczeń, w których świadczenie płatne jest na koniec roku oraz składki są płacone w odstępach rocznych. Rozważmy teraz sytuację w której składki płacone są w sposób ciągły z intensywnością $\pi(t)$ tzn. składka płacona w chwili t wynosi $\pi(t)$, natomiast wypłata świadczenia następuje natychmiast po śmierci ubezpieczonego. Zatem jeżeli osoba w wieku x umrze w wieku $x+t$, to natychmiast zostanie wypłacone świadczenie w wysokości $c(t)$.

Oznaczmy $V(t)$ będzie rezerwą jaką powinna dysponować firma ubezpieczeniowa w momencie t.

Wartość obecna przyszłych świadczeń jest określona wzorem

$$Z = c(T)v^T \tag{23}$$

gdzie $T = T(x)$ jest czasem dalszego życia osoby w wieku x.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej Z określona jest następująco:

$$EZ = \int_0^\infty c(h)v^h f_T(h)\,dh = \int_0^\infty c(h)v^h {}_h p_x \mu_{x+h}\,dh, \tag{24}$$

gdzie

$f_T(t)$ – gęstość zmiennej losowej $T(x)$,

μ_{x+h} – funkcja intensywności umieralności.

Wartość oczekiwana przyszłych składek płaconych w sposób ciągły z intensywnością $\pi(t)$ do momentu śmierci ubezpieczonego określona jest następująco:

$$EY = \int_0^\infty v^h \pi(h)_h p_x\,dh. \tag{25}$$

Zatem rezerwa matematyczna obliczona metodą prospektywną jest równa:

$$V(t) = \int_0^\infty c(t+h)v^h {}_h p_{x+t}\mu_{x+t+h}\,dh - \int_0^\infty \pi(t+h)v^h {}_h p_{x+t}\,dh. \tag{26}$$

Dokonując zamiany zmiennych, $s=t+h$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_t^\infty c(s)v^{s-t} {}_{s-t}p_{x+t}\mu_{x+s}\,ds - \int_t^\infty \pi(s)v^{s-t} {}_{s-t}p_{x+t}\,ds = \\ &= \frac{e^{\delta t}}{{}_t p_x}\left(\int_t^\infty c(s)v^s {}_s p_x \mu_{x+s}\,ds - \int_t^\infty \pi(s)v^s {}_s p_x\,ds\right) = \frac{e^{\delta t}}{{}_t p_x} I, \end{aligned} \tag{27}$$

gdzie δ jest intensywnością oprocentowania.

Różniczkując powyższą tożsamość, dostajemy:

$$\begin{aligned} V'(t) &= \left(\frac{e^{\delta t}}{{}_t p_x}\right)' I + \frac{e^{\delta t}}{{}_t p_x} I' = \\ &= \frac{\delta e^{\delta t} {}_t p_x - \mu_{x+t} e^{\delta t} {}_t p_x}{{}_t p_x^2} I + \frac{e^{\delta t}}{{}_t p_x}\left(\pi(t)v^t {}_t p_x - c(t)v^t {}_t p_x \mu_{x+t}\right) \end{aligned}$$

oraz następujące równanie różniczkowe nazywane **równaniem Thielego**:

$$V'(t) = (\delta + \mu_{x+t})V(t) + \pi(t) - c(t)\mu_{x+t}. \tag{28}$$

Po przekształceniu równania (28) otrzymujemy:

$$\pi(t) = V'(t) - \delta V(t) + \pi(t) + \big(c(t) - V(t)\big)\mu_{x+t}. \tag{29}$$

Składkę ubezpieczeniową można przedstawić jako sumę dwóch składników:

$$\pi(t) = \pi^s(t) + \pi^r(t), \tag{30}$$

gdzie:

$$\pi^s(t) = V'(t) - \delta V(t), \tag{31}$$

$$\pi^r(t) = \big(c(t) - V(t)\big)\mu_{x+t}, \tag{32}$$

$\pi^s(t)$ – część składki o charakterze oszczędnościowym,
$\pi^r(t)$ – część przeznaczona na pokrycie ewentualnych świadczeń w przypadku śmierci ubezpieczonego.

Literatura

[1] Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A., Nesbitt C. J. *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Schaumburg 1986
[2] Gerber H. U. *Life insurance Mathematics*, Springer, Berlin 1995
[3] Matłoka M., *Matematyka w ubezpieczeniach na życie*, Wydawnictwo WSB, Poznań 1997
[4] Monkiewicz J., Gąsiorkiewicz L. Hadyniak B., *Zarządzanie finansami ubezpieczeń*, Poltex, Warszawa 1999
[5] Ostasiewicz W., *Modele aktuarialne*, Wydawnictwo AE we Wrocławiu, Wrocław 2000
[6] Ortyński K., *Zastosowanie metod ilościowych w ubezpieczeniach. Ubezpieczenia w gospodarce rynkowej*, cz. 2, Wydawnictwo Branta, Bydgoszcz 1994
[7] Ronka-Chmielowiec W., *Ubezpieczenia – Rynek i ryzyko*, PWE, Warszawa 2002
[8] Sangowski T., *Gospodarka finansowa kapitałami i rezerwami ubezpieczyciela. Ubezpieczenia w gospodarce rynkowej*, cz. 1, Wydawnictwo Branta, Bydgoszcz 1994
[9] Sangowski T., *Rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe – rola i znaczenie oraz rodzaje, zasady i metody ich tworzenia. Ubezpieczenia w gospodarce rynkowej*, cz. 3, Wydawnictwo Branta, Bydgoszcz 1997

[10] Skałba M., *Matematyka w ubezpieczeniach. Ubezpieczenia na życie*, WNT, Warszawa 1999
[11] Stroiński E., *Ubezpieczenia na życie*, WSUiB, Warszawa 1996
[12] Stroiński E., *Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych*, Wiadomości Ubezpieczeniowe 1992, nr 7, 8, 9
[13] Stroiński E., Stroiński K., *Niektóre zagadnienia związane z tworzeniem rezerw w towarzystwach na życie*, Wiadomości Ubezpieczeniowe 1991, nr 4, 5, 6
[14] Ustawa o działalności ubezpieczeniowej z dnia 28 lipca 1990 r. (stan na 01.07.2001)

RESERVES OF LIFE INSURANCE

Summary

The paper presents total characterization of techno-insurance and methods of calculation of mathematical reserves.

The object of life insurance are death, illness and disability of the insured person. These are long-term insurance, which always finish payment of benefit in compliance with included insurance contract. Therefore, insurance company should owned some reserved amount, which will be against its solvent.

The risk of insured person's death goes up together with age, but using the principle of equal premium paying by the whole of insurance period, the insured person making an excess payment premium in first period. It's the mathematical reserve for insurance company, which will cover future liabilities. This reserve isn't insurer's ownership but it's insured person's ownership.

There are two methods of building up mathematical reserves: the prospective method and the retrospective method.

In the prospective method, value of reserve counts as expectation of difference between value of future benefit and value of future net premium. In the retrospective method the reserve makes discounted to moment of entered into the contract expectation of difference between premium receipt and benefit by t-years of duration insurance. Using both methods we will obtain the same result.

In this paper, the method of building up reserve concerns insurance payable at the end of year of death and insurance payable at the moment of insured person's death.

BIBLIOTEKA AE W POZNANIU