Małgorzata Kowalska

WIELOSTRUMIENIOWE TABLICE ZMIAN STANU CYWILNEGO W ŚWIETLE POLSKIEJ PRAKTYKI DEMOGRAFICZNEJ

1. Uwagi ogólne

Proces zawierania i rozpadu małżeństw można ująć w tablicach zmian stanu cywilnego. Wśród klasycznych tablic zmian stanu cywilnego wyróżnić można tablice częstości zawierania związków małżeńskich oraz tablice długości trwania małżeństw[1]. Zasady budowy takich tablic wzorowane są na konstrukcji tablic trwania życia. Pierwszy tablice trwania życia opublikował w roku 1662 J. Graunt[2] w pracy *Natural and Political Observation Made upon the Bills of Mortality.* Wykorzystano w niej dane z ksiąg parafialnych do opisu procesu wymierania hipotetycznej kohorty 100 osób zamieszkałej w Londynie. Następnymi były tablice opublikowane w roku 1693, opracowane dla Wrocławia przez angielskiego astronoma E. Halleya[3]. Tablice Halleya zawierają większość wskaźników, które używane są współcześnie.

W Polsce pierwsze tablice wymieralności zostały skonstruowane w roku 1938 dla Polski 1931/1932[4].

---

[1] Por. J. Z. Holzer, *Demografia,* PWE, Warszawa 1994.

[2] Por. R. Schoen, *Modelling Multigroup Populations,* Plenu Press, New York, London,1988, w: E. Frątczak, *Modelowanie cyklu życia jednostki i rodziny. Teoria i praktyka.* M i O 466, SGH Warszawa, 1999.

[3] Por. M. Cieślak, *Demografia. Metody analizy i prognozowania,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1992.

[4] Por. S. Szulc, *Metody statystyczne, t. 2.,* Polskie Wydawnictwo Gospodarcze, Warszawa 1954.

Pierwsze próby konstrukcji tablic częstości zawierania związków małżeńskich podjęto już w wieku XVIII[5]. W roku 1764 szwajcarski pastor Murat na podstawie materiałów zebranych w Brnie opracował tablice małżeństw dotyczącą 113 tys. mieszkańców. Z kolei w roku 1879 T. Szperg przedstawił metodę konstrukcji klasycznych tablic zawierania pierwszych związków małżeńskich. Obecnie opracowywane klasyczne tablice zawierania związków małżeńskich nie różnią się w swej istocie od pierwotnych koncepcji.

W klasycznych tablicach za podstawę przyjmuje się hipotetyczną zbiorowość osób w wieku 15 lat, które nigdy nie były w związku małżeńskim. Tablice takie są opracowywane oddzielnie dla kobiet i mężczyzn. Tablice częstości zawierania pierwszych małżeństw stanowią część tablicy pełnej (wielostanowej) uwzględniającej ponadto owdowienia i rozwody małżonków oraz zawieranie małżeństw przez owdowiałych i rozwiedzionych. Tablice zmian stanu cywilnego spotyka się rzadko i nie mają standardowo ustalonej formy.

W Polsce pierwsze kohortowe tablice zawierania związków małżeńskich przez kobiety w wieku rozrodczym opracował L. Bolesławski[6]. Autor zbudował tablice dla kobiet urodzonych w latach 1901–1945 na podstawie materiałów źródłowych pochodzących z badań ankietowych oraz NSP z roku 1970. Z kolei E. Vielrose[7] zbudował tablice małżeńskie uwzględniające proces rozwiązywania małżeństw poprzez wyjście z tego stanu w wyniku zgonu jednego ze współmałżonków. Ponadto autor uwzględnił różnice wieku obojga małżonków i zróżnicowany porządek wymierania. E. Vielrose[8] skonstruował również tablice wymieralności dla poszczególnych kategorii stanu cywilnego oddzielnie dla Polski międzywojennej. W poznańskim naukowym ośrodku badawczym podjęto próbę modelowego badania trwałości związku małżeńskiego[9]; została opracowana koncepcja tablicy trwałości związku małżeńskiego. W polskiej demografii była to pierwsza próba konstrukcji tablicy trwałości związku małżeńskiego, w której przyjmując funkcje biometryczne uwzględniono możliwość wystąpienia ryzyka zgonu męża lub żony

---

[5] *Diemograficzeskij encikłopediczeskij słowar. Sowietskaja Encikłopedija*, Moskwa 1985, w: W. Ignatczyk, *Postawy małżeńskie i prokreacyjne młodzieży polskiej stanu wolnego. Studium statystyczno-demograficzne,* M i O 305, SGPiS, Warszawa 1990.

[6] L. Bolesławski, *Zastosowanie metod kohortowych w badaniach nad częstością zawierania i trwaniem związków małżeńskich oraz nad płodnością,* w: *Analiza kohortowa i jej zastosowanie,* red. S. Borowski, Warszawa 1976; L. Bolesławski, *Prawdopodobieństwo zamążpójścia kobiet i urodzeń dzieci,* „Statystyka Polski" nr 49, GUS, Warszawa 1975.

[7] Por. E. Vielrose, *Długość trwania związku małżeńskiego w Polsce,* „Wiadomości Statystyczne" 1983, nr 11.

[8] Por. E. Vielrose, *Niektóre polskie tablice wymieralności 1931/1932,* Studia i Prace Statystyczne, z. 2–3, GUS, Warszawa 1951.

[9] Por. W. Ignatczyk, *Postawy małżeńskie i prokreacyjne młodzieży polskiej stanu wolnego. Studium statystyczno-demograficzne,* M i O 305, SGPiS, Warszawa 1990.

oraz rozwodu. W ośrodku tym zajmowano się również modelowaniem rodziny w ujęciu jednostanowym[10]. W tym celu wykorzystano model FLC Gustawa Feichtingera i Heralda Hansluwki. Pełne wdrożenie modelu FLC w warunkach polskich nie było możliwe ze względu na brak odpowiednich kohortowych tablic eliminacji. Natomiast opracowana została skrócona wersja modelu pozwalająca określić jedynie częstość zawierania związków małżeńskich oraz śmiertelności jako procesów tworzących cykl życia rodziny.

Klasyczne tablice eliminacji mogą być stosowane bezpośrednio do wyznaczenia prognoz krótkookresowych. Inne podejście stosuje się dla wyznaczenia prognozy dotyczącej dłuższego okresu. W tym wypadku można konstruować prospektywne tablice małżeństw, które uwzględniają kształtowanie się w przyszłości warunków i czynników determinujących intensywność powstania związków małżeńskich. Dla Polski po raz pierwszy tablice takie zbudowała W. Ignatczyk[11]. Bazą źródłową do konstrukcji prospektywnych tablic małżeńskich były materiały źródłowe z badań przeprowadzonych przez poznański ośrodek naukowy w latach 1978–1980[12]. Procedura badawcza zaproponowana przez autorkę miała charakter nowatorski. Po raz pierwszy w polskiej demografii podjęto próbę konstrukcji prospektywnych tablic zawierania pierwszych związków małżeńskich będących odzwierciedleniem wzorca tworzenia się przyszłych kohort małżeńskich. Tablice te są źródłem informacji o możliwościach zarówno zrealizowania, jak i niezrealizowania zamierzeń matrymonialnych, potencjalnej liczbie lat, które będzie oczekiwać osoba stanu wolnego na zawarcie związku małżeńskiego. Prospektywne tablice częstości zawierania pierwszych związków małżeńskich mogą być brutto lub netto. Tablice brutto konstruuje się przyjmując założenie, że osoby planujące zawarcie związku małżeńskiego zrealizują swoje zamierzenie; natomiast uwzględniając działanie czynnika umieralności w zbiorowości osób stanu wolnego, otrzymuje się prospektywne tablice częstości zawierania pierwszych związków małżeńskich netto.

Procesy demograficzne, które zachodziły w latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych w Europie Zachodniej oraz rozwój demografii wieloregionalnej[13]

[10] Por. S. Wierzchosławski, *Demometryczne modele rozwoju rodziny oraz gospodarstwa domowego*, w: *Raporty końcowe z badań w latach 1981 – 1985*, M i O nr 278/18, red. C. Groblewska, cz. 2, SGPiS, Warszawa 1988.

[11] Por. W. Ignatczyk, *Postawy małżeńskie i prokreacyjne...*, op. cit. (por. przyp.9).

[12] Temat 11.5.4.01 „Postawy i preferencje młodzieży w wieku matrymonialnym i metody ich optymalnego kształtowania", w: S. Wierzchosławski, *Raport końcowy...*, op. cit.

[13] Podstawowe pojęcia i kierunki związane z rozwojem demografii wielowymiarowej przedstawione są w: J. Paradysz, *Wielowymiarowa analiza reprodukcji ludności*, Zeszyty Naukowe seria II, nr 88, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 1985.; J. Paradysz, *Wielostanowa analiza demograficzna*, „Studia Demograficzne" 1981, nr 1(63), J. Paradysz, *Demografia wielowymiarowa w Polsce*, „Studia Demograficzne", 1987, nr 2(88).

zwróciły uwagę badaczy na potrzebę konstrukcji bogatszych tablic, dzięki którym można było obserwować zmiany zachodzące w procesie zawierania i trwania małżeństw. Konstrukcja tych tablic, uwzględniająca implikacje między różnymi stanami, umożliwia przeprowadzenie kompleksowej analizy zawierania i oczekiwanego trwania związków małżeńskich według stanu cywilnego w momencie zawierania małżeństwa, ich rozpadu oraz ponownych małżeństw. Charakterystyczne jest, że w tablicach tych można ująć wielokrotne zmiany stanu cywilnego, jak i porządku wymierania kohorty osób w poszczególnych stanach.

Za prekursorów konstrukcji wielostrumieniowych tablic trwania życia uznaje się Du Pasquiera (1912, 1913), E. Fixa i J. Spławę – Neymana (1951)[14]. Podjęli oni próbę konstrukcji tzw. tablic aktuarialnych w kontekście ubezpieczeń kalectwa oraz analizy stanu zdrowia pacjentów. Jednakże dopiero w latach siedemdziesiątych gwałtowny rozwój demografii wieloregionalnej spowodował zainteresowanie demografów wielostrumieniowymi modelami tablic trwania życia. W okresie tym rozwinęły się równolegle dwie metody badawcze. Pierwszą z nich przedstawili R. Schoen i V. E. Nelson[15]. Zaadaptowali oni metody budowy tablic trwania życia do analizy zmian wzorców zawierania małżeństw. Przy budowie tych tablic przyjęli układ trzech równań definiujących:

- liczbę ludności w każdym ze stanów w określonym wieku,
- średnią liczbę ludności,
- współczynniki zmian stanu cywilnego.

Metodę tę zweryfikowali opracowywując tablice zmian stanu cywilnego dla kobiet w USA w stanie Kalifornia w roku 1960. Następnie R. Schoen[16] przedstawił formuły estymacji prawdopodobieństw przejść między stanami w wielostanowych modelach. Główną zaletą Schoena jest dokonanie symulacji obliczeń wszystkich prawdopodobieństw przejść dla obserwowanych i tablicowych współczynników. Symulacji dokonał dla kobiet w USA w roku 1969.

Dalsze ulepszenie do modelu wprowadzili A. Rogers i J. Ledent[17], którzy wprowadzili zapis macierzowy, umożliwiający powiększenie liczby stanów możliwych do uwzględnienia. Zwrócili również uwagę na podobieństwa i różnice

---

[14] Por. R. Schoen, K. C. Land, *A General Algorithm, for Estmating a Markov – Generated Increment – Decrement life table with Aapplications to Marital Status Patterns,* Journal of the American Statistical Association, t. 74, s. 761–776.

[15] Por. R. Schoen, V. E. Nelson, *Marriage, Divorce and Mortality: a Life Table Analysis,* „Demography" 1974, nr 2, s. 267–290.

[16] Por. R. Schoen, *Constructing Increment – Decrement Life Tables,* „Demography" 1975, nr 2, s. 313–324.

[17] Por. A. Rogers, J. Ledent, *Increment – Decrement Life Tables: a Coment,* „Demography" 1976, nr 2, s. 287–290.

między zastosowaniem metod Schoena i Rogersa[18] w demografii wieloregionalnej.

Druga z metod została wprowadzona przez I. Hoema i M. Fonga do badania udziału siły roboczej (*labour force participatcion*)[19]. Hoem zwrócił uwagę na właściwe wielostanowe tablice trwania życia i na relacje między tymi modelami a teorią procesów stochastycznych. W obydwu wypadkach dążono do skonstruowania modelu wielostrumieniowych tablic życia, które byłyby poprawne teoretycznie i bazowały tylko na kilku restrykcyjnych założeniach oraz były łatwe w zastosowaniu. Wynikiem tych poszukiwań było opracowanie R. Schoena i K. Woodrowa[20], w którym przedstawili podstawy metod konstrukcji i ich weryfikacje. Autorzy opracowali tablice osób aktywnych zawodowo (*working life tables*) dla USA 1972.

Obecnie w literaturze przedmiotu istnieje jedna główna metoda wielostrumieniowych tablic zmian stanu cywilnego. Teoretyczne podstawy matematyczne dla tej metody przedstawił F. Willekens[21]. Przy konstrukcji modelu wykorzystano teorię A. Rogersa. Możemy więc mówić o modelu Rogersa – Willekensa. Model ten możemy traktować jako będący efektem transformacji model ludności ustabilizowanej. W teorii demografii traktuje się go jako generalizację modelu Lotki. Charakterystyczną cechą tego modelu jest założenie o niejednorodności populacji ze względu na stany cywilne i możliwości bilansowania się ludności w wyniku przepływów między stanami. Obok podstaw teoretycznych autorzy zweryfikowali metodę, konstruując wielostrumieniowe tablice zmian stanu cywilnego dla kobiet w Belgii w roku1971.

Warto zauważyć, że modele wielostrumieniowych tablic trwania życia według stanu cywilnego stały się podstawą konstrukcji tzw. rodzinnych tablic trwania życia. Tablice te umożliwiają pomiar wpływu czynników demograficznych na zmiany w wielkości i strukturze rodziny.

Na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych w Polsce podjęto próby budowy wielostrumieniowych tablic zmian stanu cywilnego. Pierwsze próby budowy wielostanowych tablic zmian stanu cywilnego zostały podjęte niemal równolegle w naukowym ośrodku poznańskim i warszawskim. Przy czym można uznać, że większy wkład w opracowanie tego rodzaju tablic ma naukowy ośrodek poznański. Zarówno w ośrodku poznańskim, jak i warszawskim konstrukcja

[18] Por. A. Rogers, *Introduction to Multiregional Mathemathical Demography,* Nowy Jork 1975.

[19] Por. F. J. Willkens, I. Shah, J. M. Shah, P. Ramachandran, *Multi-state Analysis of Marital Status Life Table: Theory and Application,* „Population Studies" 1982, nr 1.

[20] Por. R. Schoen, K. Woodrow, *Labor Force Life Tables for the US 1972,* „Demography" 1980, nr 17.

[21] Por. F. J. Willkens, I. Shah, J. M. Shah, P. Ramachandran, *Multi-state Analysis...,* op. cit. (por. przyp. 17).

wielostrumieniowych tablic zmian stanu cywilnego bazowała na modelu Rogersa-Willekensa.

W ośrodku poznańskim wielostrumieniowe tablice zostały zbudowane przez E. Englert, E. Gołatę, M. Kędelskiego oraz J. Paradysza.

J. Paradysz i E. Englert[22] zbudowali dwuregionalne tablice zawierania małżeństw według generacji, płci, wieku i z uwzględnieniem czynników zakłócających, takich jak umieralność i emigracja. Budowę tych tablic oparto na badaniu retrospektywnym przeprowadzonym w mikroregionie Dziekanowice w kwietniu 1975 roku. Opracowane tablice stanowiły novum w warunkach polskich. Tablice te przedstawiają prawdopodobieństwo netto ożenku i wyjścia za mąż dla dwóch najstarszych generacji 1900–1919 i 1920–1939, z wyeliminowaniem perturbacyjnego wpływu emigracji, zgonu oraz zgonu i emigracji razem.

Dużym osiągnięciem w poznańskim ośrodku naukowym było zbudowanie wielostrumieniowych tablic zmian stanu cywilnego dla Polski w latach 1982–1984 przez M. Kędelskiego i E. Gołatę[23]. W opracowaniu tym, przy uwzględnieniu zasad konstrukcji tych tablic, zbudowano wielostrumieniowe tablice zmian stanu cywilnego dla generacji hipotetycznej w przekroju ich całej historii życia. Ponadto także dla ludności Polski ogółem zostały zbudowane przez E. Gołatę[24] tablice trwania życia według stanu cywilnego dla wieku bazowego 20 lat. Również M. Kędelski podjął próbę konstrukcji tablic zmian stanu cywilnego z uwzględnieniem migracji przestrzennych (jednak próby te nie zostały opublikowane). Bazą źródłową dla konstrukcji tych tablic były materiały GUS: szacunki ludnościowe GUS z 31.12.1981 roku oraz z tzw. Mikrospisu z 06.12.1984 roku. Autorzy tablic dla ich konstrukcji zaadaptowali program komputerowy opracowany przez F. Willekensa[25]. Opracowane tablice stanowiły novum w warunkach polskich. Były to pierwsze wielostrumieniowe tablice zmian stanu cywilnego, które uwzględniały przejścia pomiędzy poszczególnymi stanami. Należy ponadto zaznaczyć, że w odróżnieniu od tablic opracowywanych na świecie po raz pierwszy opracowano je także dla mężczyzn, co było swego rodzaju novum. Zaletą tych tablic jest to, że mogą być ze sobą porównywane.

W ośrodku warszawskim na szczególną uwagę zasługują tablice opracowane przez M. Wieczorek i E. Frątczak.

---

[22] Por. E. Englert, J. Paradysz, *Dwuregionalne tablice demometryczne*, „Studia Demograficzne" 1978, nr 51.

[23] Por. M. Kędelski, E. Gołata, *Wielostrumieniowe tablice zmian stanu cywilnego ludności w Polsce (1982–1984)*, „Studia Demograficzne" 1986, nr 4(86).

[24] Por. E. Gołata, *Zintegrowane tablice trwania życia według stanu cywilnego, Polska 1982–1984*, „Studia Demograficzne" 1987, nr 1, s. 31–57.

[25] F. Willekens, *Computer Program for Increment – Decrement (Multistate) Life Table Analysis: a Users Manual to LIFEINDEC*, IIASA, Laxenburg 1979.

M. Wieczorek[26] zbudowała wielostanowe tablice trwania życia według zmian stanu cywilnego osobno dla kobiet i mężczyzn w Polsce 1981 roku. Podobnie jak w ośrodku poznańskim, posłużono się tutaj modelem Rogersa-Willekensa. W opracowaniu tym wyznaczono również parametry charakteryzujące zmiany w poszczególnych stanach cywilnych.

Wielostanowe tablice zmian stanu cywilnego były również przedmiotem uwagi E. Frątczak[27]. Zostały one skonstruowane dla wybranych kohort kobiet na podstawie wyników badania retrospektywnego rekonstruującego drogę życiową – biografię rodzinną, zawodową i migracyjną – kobiet. Ponadto autorka zbudowała rodzinne tablice trwania życia[28] dla Polski 1988/1989 oraz 1994/1995. Tablice te zostały zbudowane na podstawie informacji pochodzących z NSP 1988, Mikrospisu 1995 oraz danych bieżącej statystyki GUS z lat 1988, 1989 oraz 1994, 1995. Rodzinne tablice trwania życia są kolejnym etapem w rozwoju metodologii tablic wielostrumieniowych, bazującej na tablicach zmian stanu cywilnego i stanu płodności. Autorka posługuje się modelami tablic trwania życia J. Bongaartsa i Zenga Yi[29].

Poniżej prezentuję współczesne metody konstrukcji wielostrumieniowych tablic zmian stanu cywilnego w aspekcie matematycznym z uwzględnieniem powszechnie stosowanej notacji pochodzącej z matematyki aktuarialnej oraz z cytowanej literatury.

2. Ogólny model zmian stanu cywilnego

Wielostrumieniowe tablice zmian stanu cywilnego opisują przemieszczanie się osób danej kohorty według ich indywidualnego czasu po stanach modelu. W modelu wielostrumieniowych tablic zmian rozróżnione są cztery kategorie

---

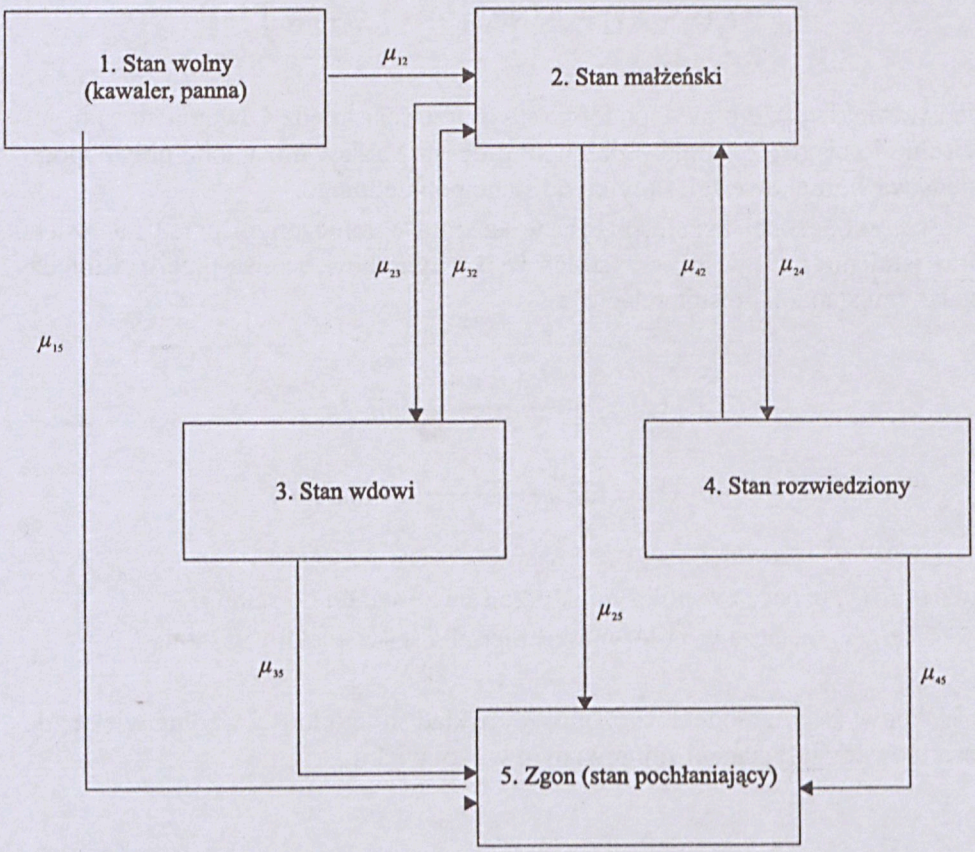
[26] Por. M. Wieczorek, *Wielostanowe tablice trwania życia według stanu cywilnego,* „Studia Demograficzne" 1986, nr 2(84).

[27] Por. E. Frątczak, *Marital Status Life Table for Selected Female Cohorts – Evidence from Polish Retrospective Suervey 1988 „Life Course – Family, Occupational and Migratory Boigraphy"*, „Studia Demograficzne" 1991, nr 3(105).

[28] Por. E. Frątczak, *Rodzinne tablice trwania życia. Polska 1988/1989, 1994/1995,* M i O 485, SGH, Warszawa 2001.

[29] Model J. Bongaartsa jest rozszerzeniem modelowych tablic trwania życia według stanu cywilnego poprzez dodanie informacji o dodatkowych stanach rodzinnych. Natomiast model Zenga Yi jest rozszerzeniem modelu J. Bongaartsa na model rodziny trzypokoleniowej. Obydwa modele są wykorzystywane do badania wpływu czynników demograficznych, tj. małżeństwa, na wielkość i strukturę rodziny oraz jej cykl życia. w: E. Frątczak, *Modelowanie cyklu życia jednostki i rodziny. Teoria i praktyka.* M i O 466, SGH, Warszawa 1999; E. Frątczak, *Rodzinne tablice trwania życia...,* op. cit. (por. przyp. 26).

stanu cywilnego: 1 – stan wolny (kawaler, panna), 2 – stan małżeński, 3 – stan wdowi, 4 – stan rozwiedziony. Stan wolny jest stanem początkowym. W stanie tym można ciągle pozostawać, ale po jego opuszczeniu nie ma już powrotu do niego, jest więc stanem bezzwrotnym. Pozostałe stany: małżeński, wdowi i rozwiedziony są stanami przejściowymi, a zarazem zwrotnymi, istnieje tu możliwość przejść między stanami. Są to stany, z których definitywne wyjście możliwe jest jedynie poprzez zgon. Zgon określany jest często mianem stanu piątego, który w ostateczności pochłania wszystkie badane jednostki (stan pochłaniający lub stan końcowy). Model zmian stanu cywilnego przedstawia rys.1.



Rys. 1. Model zmian stanu cywilnego

Konstrukcja wielostanowego modelu zmian stanu cywilnego opiera się na teorii procesów Markowa ze skończoną dyskretną przestrzenią stanów (Ω) obejmującą stan wolny, małżeński, rozwiedziony, wdowi oraz stan pochłaniający. Stany: małżeński, wdowi, rozwiedziony pozostają we wzajemnej relacji zapew-

niającej przejścia między tymi stanami. Na przestrzeni stanów Ω zdefiniowany jest proces stochastyczny $\{S(x): x \geq 0\}$, gdzie parametr x oznacza dokładnie osiągnięty wiek, w którym wiek jest ciągłym parametrem czasu. Przy konstrukcji modelu założono, że model ten nie rejestruje czasu przebywania badanych jednostek w danym stanie ze względu na ich wiek. Przyjęte założenia pozwoliły zdefiniować proces stochastyczny $S(x)$ jako niehomogeniczny w czasie proces Markowa[30].

Prawdopodobieństwo przebywania w stanie j w wieku x lat wyznacza relacja:

$$l_{ij}(x,x+t) = P\{S(x+t) = j | S(x) = i\}$$

pod warunkiem, że prawdopodobieństwo przejścia między dwoma stanami jest absolutnie ciągłe. Zgodnie z definicją procesu Markowa ustalone prawdopodobieństwa warunkowe zależą tylko od stanu poprzedniego.

Przy skończonej liczbie przejść w każdym ograniczonym przedziale wieku oraz istnieniu i ciągłości wszystkich współczynników przejść przejścia między badanymi stanami opisują relacje[31]:

$$\mu_{ij}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{l_{ij}(x,x+t)}{t} \text{ dla } i \neq j,$$

$$-\mu_{ii}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1 - l_{ii}(x,x+t)}{t} \text{ dla } i \neq j,$$

gdzie: $\mu_{ij}(x)$ oznacza współczynnik przejścia ze stanu i do stanu j,

$\mu_{i5}(x)$ oznacza współczynnik śmiertelności w wieku x w stanie i.

W powyższym modelu założono, że rozkład śmiertelności według wieku zdeterminowany jest stanem zajmowanym w tym wieku.

[30] Proces Markowa jest to taki proces stochastyczny, którego przyszłość zależy tylko od teraźniejszości i nie zależy od przeszłości. W naszym modelu dane są realizacjami procesu i parametrami, które muszą zostać wyestymowane z tych danych. Za: A. Plucińska, E. Pluciński, *Probabilistyka: Rachunek prawdopodobieństwa, Statystyka matematyczna, Procesy stochastyczne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2000, s. 358–372.

[31] Por. R. Schoen, K. Land, *A General Algorithm...*, op. cit. (por. przyp. 12).

3. Estymacja macierzy prawdopodobieństw przejść[32]

Warunkiem koniecznym przy konstrukcji tablic wielostrumieniowych jest:
- oszacowanie macierzy prawdopodobieństw przejścia między stanami,
- ustalenie związku między prawdopodobieństwami przejścia a współczynnikami demograficznymi.

Przejścia między stanami w teorii procesów Markowa opisują równania różniczkowe Kołmogorowa[33].

Estymację macierzy prawdopodobieństw przejść przeprowadzono na podstawie kohorty osób będących w wieku dokładnie y lat.

Przyjmując następujące oznaczenia:

${}_y l_{ij}(y+n)$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku y lat w stanie i będzie w stanie j n lat później,

${}_y l_{ij}(x)$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku y lat w stanie i będzie w stanie j n lat później dla $y+n = x$ $(x \geq y)$.

Prawdopodobieństwo, że osoba w wieku y w stanie i będzie w stanie j w wieku $(x+ dx)$ ustalona się z formuły:

$$ {}_y l_{ij}(x+dx) = \sum_{k=1}^{N} {}_y l_{ik}(x)\mu_{kj}(x)dx, \qquad (1) $$

gdzie: $\mu_{ij}(x)dx$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x w stanie i będzie w stanie j na końcu przedziału dx,
$\mu_{jj}(x)dx$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x będzie nadal w stanie j dx lat później (innymi słowy: jednostkę czasu później).

Prawdopodobieństwa przejścia ze stanu i do stanu j dla jednostki są niezależne od stanu w wieku y, ale są zależne od jej stanu na początku przedziału $(x; x + dx)$, stąd prawdopodobieństwo $\mu_{jj}(x)dx$ można zapisać w postaci:

---

[32] Opracowano na podstawie: R. Schoen, K. Land, *A General Algorithm for Estmating a Markov – Generated Increment – Decrement Life Table with Applications to Marital Status Patterns*, „Journal of the American Statistical Association", t.74, s. 761–776; S. Kirhnamoorthy, *Classical Approach to Increment – Decrement Life Tables: an Application to the Study of the Marital Status of the United States females, 1970,* Mathematical Biosccences, t.44, 1979, s. 139–154; J. Bongaarts, T. K. Burch, K. W. Watcher, *Family Demography. Methods and their Application,* Clarendon Press, Oxford 1987; F. J. Willkens, I. Shah, J. M. Shah, P. Ramachandran, *Multi-state Analysis ...,* op. cit.

[33] Por. R. Schoen, K. Land, *A General Algorithm ...,* op.cit. (por. przyp. 12); S. Kirhnamoorthy, *Classical Approach to Increment – Decrement Life Tables...,* op.cit. (por. przyp. 30).

$$\mu_{jj}(x)dx = 1 - \left[\sum_{k \neq j} \mu_{jk}(x)dx + \mu_{j5}(x)dx\right] = 1 - \hat{\mu}_{jj}(x)dx, \tag{2}$$

a równanie (1) przyjmuje postać:

$${}_y l_{ij}(x+dx) = {}_y l_{ij}(x)\left(1 - \hat{\mu}_{jj}(x)dx\right) + \sum_{k \neq j} {}_y l_{ik}(x)\mu_{kj}(x)dx, \text{czyli}$$

$$\frac{{}_y l_{ij}(x+dx) - {}_y l_{ij}(x)}{dx} = -\hat{\mu}_{jj}\,{}_y l_{ij}(x) + \sum_{k \neq j} \mu_{kj}(x)\,{}_y l_{ik}(x). \tag{3}$$

Uzyskane powyżej równanie jest równaniem różniczkowym Kołomogorowa dla procesu Markowa[34], które można zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dx}\,{}_y l_{ij}(x) = -\hat{\mu}_{jj}\,{}_y l_{ij}(x) + \sum_{k \neq j} \mu_{kj}(x)\,{}_y l_{ik}(x). \tag{4}$$

Opisuje ono zmiany w prawdopodobieństwie przeżycia ${}_y l_{ij}(x)$. Jest to funkcja współczynników przejść i śmiertelności oraz warunku początkowego, tzn. stanu zajmowanego przez daną jednostkę w wieku dokładnie x lat.
Forma macierzowa ustalonego równania (4) wyraża się relacją:

$$\frac{d}{dx}\,{}_y l(x) = -\mu(x)\,{}_y l(x), \tag{5}$$

gdzie: $\mu(x)$ macierz współczynników przejść ma postać:

$$\mu(x) = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11}(x) & -\mu_{21}(x) & \dots & -\mu_{N1}(x) \\ -\mu_{12}(x) & \hat{\mu}_{22}(x) & \dots & -\mu_{N2}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\mu_{1N}(x) & -\mu_{2N}(x) & \dots & \hat{\mu}_{NN}(x) \end{bmatrix}$$

[34] R. Durrett, *Essentials of Stochastic Processes,* Springer – Verlag, New York, Berlin, Heideburg 1999.

oraz

$$ {}_{y}l(x) = \begin{bmatrix} {}_{y}l_{11}(x) & {}_{y}l_{21}(x) & \dots & {}_{y}l_{N1}(x) \\ {}_{y}l_{12}(x) & {}_{y}l_{22}(x) & \dots & {}_{y}l_{N2}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {}_{y}l_{1N}(x) & {}_{y}l_{2N}(x) & \dots & {}_{y}l_{NN}(x) \end{bmatrix}. $$

Wiek y określa typ kohorty, dla której chcemy budować tablice wielostrumieniowe. W przypadku jeśli $y = 0$, to kohortę nazywamy kohortą urodzonych lub *„radix"*. Zaś w przypadku, gdy $y = \overline{\alpha}$, gdzie $\overline{\alpha}$ jest najniższym wiekiem, w którym wszystkie stany cywilne mogą być niepuste (w praktyce jest to minimalny wiek zawarcia związku formalnego), kohortę nazywamy *„full cohort age"*. Z kolei, w wieku poniżej $\overline{\alpha}$ zakładamy, że wszystkie kategorie stanu cywilnego są puste. *„Full cohort age"* ma szczególne znaczenie dla obliczenia charakterystyk tablic zmian stanu cywilnego typu *„marital status based"*.

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (4) umożliwia wyznaczenie ${}_{y}l(x)$z relacji:

$$ {}_{y}l(x) = {}_{y}l(y) - \int_{0}^{n} \mu(y+t)\ {}_{y}l(y+t)\,dt, \text{ gdzie } n=x-y. \tag{6} $$

Oznacza to, że rozwiązanie równań różniczkowych Kołomogorowa (4) sprowadza się do rozwiązania całki:

$$ \int_{0}^{n} \mu(y+t)\ {}_{y}l(y+t)\,dt. \tag{7} $$

Rozwiązuje się ją etapami, dzieląc przedział $(y; x)$ na mniejsze przedziały o długości h, tzn.:

$$ \begin{aligned} {}_{y}l(y+h) &= {}_{y}l(y) - \int_{0}^{h} \mu(y+t)\ {}_{y}l(y+t)\,dt, \\ {}_{y}l(y+2h) &= {}_{y}l(y+h) - \int_{0}^{h} \mu(y+h+t)\ {}_{y}l(y+h+t)\,dt, \\ &\vdots \\ {}_{y}l(x+h) &= {}_{y}l(x) - \int_{0}^{h} \mu(x+t)\ {}_{y}l(x+t)\,dt. \end{aligned} \tag{8} $$

Z kolei macierz warunkowych prawdopodobieństw przejść między stanami ma postać:

$$P(x)=\begin{bmatrix} p_{11}(x) & p_{21}(x) & \dots & p_{N1}(x) \\ p_{12}(x) & p_{22}(x) & \dots & p_{N2}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{1N}(x) & p_{2N}(x) & \dots & p_{NN}(x) \end{bmatrix},$$

gdzie $p_{ij}(x)$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba żyjąca w stanie i w wieku x będzie w stanie j, h lat później, tzn. w wieku $x+h$. Prawdopodobieństwo to jest z założenia niezależne od zajmowanego stanu w wieku y, a zależy tylko od stanu zajmowanego na początku przedziału o długości h. Natomiast prawdopodobieństwo zgonu ustala się na podstawie poniższego równania bilansowego:

$$q_i(x)=1-\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(x).$$

Przy założeniu, że macierz ${}_yl(x)$ jest macierzą nieosobliwą macierz warunkowych prawdopodobieństw przejść wyraża formuła:

$$P(x)={}_yl(x+h)\left[{}_yl(x)\right]^{-1}. \tag{9}$$

Dla $x \geq \overline{\alpha}$ warunek nieosobliwości jest ogólnie spełniony, zaś dla wieku poniżej $\overline{\alpha}$ wartości macierzy prawdopodobieństw przejść mogą być równe zeru. Z kolei poniżej najniższego formalnego wieku zawarcia związku małżeńskiego wszystkie wartości $p_{ij}(x)$ są równe zero, za wyjątkiem $p_{11}(x)$, które jest zwykłą miarą prawdopodobieństwa przeżycia w stanie wolnym w przedziale wieku od x do $x+h$ lat.

Prawdopodobieństwo to jest równe:

$$p_{11}(x)=\frac{{}_yl_{11}(x+h)}{{}_yl_{11}(x)}. \tag{10}$$

Równanie (9) implikuje, że

$${}_yl(x+h)=P(x)\,{}_yl(x). \tag{11}$$

Porównując wyrażenie (11) z wyrażeniem (8), macierz prawdopodobieństw przejść możemy zapisać w postaci:

$$P(x)=\left[I-\int_0^h \mu(x+t)\,{}_xl(x+t)\left[{}_yl(x)\right]^{-1}dt\right]. \tag{12}$$

Z wyrażenia (8) uzyskujemy również macierz prawdopodobieństw dla rocznych przedziałów wieku w wielostrumieniowych tablicach zmian stanu cywilnego, którą można zapisać w postaci:

$$ {}_{y}l(x+h) - {}_{y}l(x) = -\int_0^h \mu(x+t)\, {}_{y}l(x+t)dt \left[\int_0^h {}_{y}l(x+t)dt\right]^{-1} \left[\int_0^h {}_{y}l(x+t)dt\right], \tag{13} $$

gdzie całka $\int_0^h {}_{y}l(x+t)dt$ przedstawia liczbę lat przeżytych w każdym stanie między wiekiem x a $x+h$ lat, w przeliczeniu na jednostkę w każdym stanie w wieku y lat. Wyrażenie to oznaczono przez ${}_{y}L(x)$. O ile założymy, że jest to macierz przedstawiającą liczbę osób w danych stanach w grupach wieku od x do $x+h$ lat w przeliczeniu na liczbę osób w każdym stanie w wieku y lat, to otrzymamy dystrybuantę (rozkład) wieku dla populacji teoretycznej postaci:

$$ m(x) = \left[\int_0^h \mu(x+t)\, {}_{y}l(x+t)dt\right] \left[\int_0^h {}_{y}l(x+t)dt\right]^{-1}, $$

która to macierz jest macierzą współczynników tablicowych dla określonego (wyspecyfikowanego) wieku.
Stąd równanie (13) przedstawiamy w postaci macierzowej:

$$ {}_{y}l(x+h) - {}_{y}l(x) = -m(x)\,{}_{y}L(x). \tag{14} $$

A zatem z (14) i (11) macierz prawdopodobieństw przejść możemy przedstawić za pomocą formuły:

$$ P(x) = I - m(x)\,{}_{y}L(x)[{}_{y}l(x)]^{-1}. \tag{15} $$

Wszystkie charakterystyki tablic wielostrumieniowych są opisane w formie zależności od macierzy prawdopodobieństw przejść. Macierz prawdopodobieństw przejść $P(x)$ w zależności od współczynników intensywności przejść dana jest wzorem (15).
Rogers i Ledent[35] wykazali, że macierz prawdopodobieństw przejść $P(x)$ można wyrazić formułą:

[35] Por. A. Rogers, J. Ledent, *Increment – Decrement Life Tables...*, op. cit. (por. przyp. 17).

$$P(x)=\left[I+\frac{h}{2}M(x)\right]^{-1}\left[I\int-\frac{h}{2}M(x)\right], \tag{16}$$

gdzie $M(x)$ jest macierzą obserwowanych współczynników demograficznych w grupach wieku od x do $x+h$ lat, mającą taki sam wymiar co macierz $\mu(x)$.

Przejście z relacji (15) do (16) wymaga kilku założeń. Po pierwsze, należy założyć, że przejścia pomiędzy stanami i zgon mają jednakowy rozkład na całym przedziale wieku od x do $x+h$ lat (wtedy możemy mówić o liniowej segmentowej funkcji przeżycia). Ponieważ zakładamy możliwość wielokrotnych przejść między różnymi stanami stąd średni czas przed przejściem do innego stanu wynosi $\frac{h}{2}$. Równomierny rozkład implikuje, że całka postaci $\int_0^h {}_y l(x+t)dt$ lub macierz ${}_yL(x)$ może być aproksymowana liniowo przez równanie postaci:

$${}_yL(x)=\frac{h}{2}\left[{}_yl(x)+{}_yl(x+h)\right]. \tag{17}$$

Schoen i Land[36] wykazali, że założenie o liniowości jest równoważne założeniu, że współczynniki przejść modelu hipotetycznego są segmentowo hiperboliczne. Przy tym założeniu z formuł (15) i (17) otrzymujemy następującą macierz prawdopodobieństw przejść:

$$P(x)=\left[I+\frac{h}{2}m(x)\right]^{-1}\left[I-\frac{h}{2}m(x)\right]. \tag{18}$$

Obliczając macierz prawdopodobieństw przejść na podstawie obserwowanych współczynników demograficznych, należy założyć, że roczne współczynniki tablicowe dla określonych grup wieku są równe odpowiednim rocznym współczynnikom w obserwowanej populacji, tzn. $m(x)=M(x)$.

Powyższe założenia implikują, że obserwowane współczynniki zapewniają odpowiednią estymację funkcji tablicowych użytych w długookresowej analizie. Ponadto równość współczynników tablicowych i obserwowanych współczynników demograficznych implikuje założenie, że w każdym przedziale wieku w każdym stanie cywilnym modelu, obserwowana populacja jest stacjonarna, tzn. ma rozkład taki jak populacja tablicowa.

Zaprezentowana estymacja macierzy prawdopodobieństw przejść wymaga przyjęcia następujących założeń:

[36] Por. R. Schoen, K. Land, *A General Algorithm...*, op. cit. (por. przyp. 12).

- zdarzenia demograficzne są niezależne,
- przejścia między stanami są procesami Markowa (zobacz równanie (1)),
- macierz ${}_yL(x)$ wyznaczamy poprzez liniową aproksymację,
- dla okresów rocznych współczynniki tablicowe są równe obserwowanym współczynnikom demograficznym.

4. Estymacja pozostałych charakterystyk tablic zmian stanu cywilnego

Do pozostałych parametrów wielostrumieniowych tablic zmian stanu cywilnego można zaliczyć:

- przeciętną liczbę lat przeżytych między wiekiem x a $x + h$ lat w każdym stanie cywilnym,
- przeciętną liczbę lat przeżytych w każdym stanie cywilnym,
- oczekiwane dalsze trwanie życia w każdym stanie cywilnym.

Powyższe charakterystyki można wyznaczyć z macierzy prawdopodobieństw przejść.

W zależności od wieku y określono poniższe macierze:

- jeśli $y = 0$, to macierz ${}_0L(x)$ – oznacza przeciętną liczbę lat przeżytych między wiekiem x a $x + h$ w każdym stanie cywilnym, która przypada na liczbę osób w kohorcie urodzonych (tzw. *birth cohort*),
- jeśli $y = x$, to macierz ${}_xL(x)$ – oznacza liczbę lat przeżytych w każdym stanie, która przypada na liczbę osób w wieku x lat. Jest to miara niezależna od rozkładu x-letnich osób pomiędzy różne kategorie stanu cywilnego. Można ją ustalić z relacji:

$$\frac{h}{2}[I + P(x)].$$

Macierz ${}_0L(x)$ jest bezwarunkową miarą, a macierz ${}_xL(x)$ jest zależna od osiągniętego wieku x. Obydwie macierze mają swoje odpowiedniki w demografii wieloregionalnej, gdzie ${}_0L(x)$ i ${}_xL(x)$ są odpowiednio macierzami czasu przebywania w regionie urodzenia, i w regionie zamieszkania. Można je stosować do ustalenia liczby przeżytych lat i oczekiwanego dalszego trwania życia w tablicach zmian stanu cywilnego zarówno do kohorty osób urodzonych (tzw. *population based measures*)[37] jak i dla kohorty cywilnej (tzw. *marital status – based measures*).

[37] Por. J. Bongaarts, T. K. Burch, K.W. Watcher, *Family Demography...*, op. cit. (por. przyp. 30).

Natomiast do ustalenia macierzy ${}_0L(x)$ i ${}_xL(x)$ dla ostatniej otwartej grupy wiekowej, tzn. dla osób będących w wieku $x = z$, wykorzystuje się propozycję Willekensa i Rogersa[38], którzy zaproponowali, że w przypadku aproksymacji liniowej liczba lat przeżytych w ostatniej grupie wiekowej może zostać obliczona według formuł:

$$
\begin{aligned}
{}_yL(z) &= [M(z)]^{-1}\ {}_yl(z), \\
{}_zL(z) &= [M(z)]^{-1},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

gdzie macierz $M(z)$ jest macierzą zaobserwowanych demograficznych współczynników zdarzeń dla ostatniej grupy wiekowej.

Z kolei, sumując wiersze macierzy ${}_yL(x)$ po wszystkich przedziałach wieku większego od x otrzymuje się ogólną liczbę „osobolat" do przeżycia powyżej wieku x przez członków kohorty w wieku y lat, tzn.

$$
{}_yT(x) = \sum_{t=x}^{z} {}_yL(t). \tag{20}
$$

Przy czym dla $y < \overline{\alpha}$ wszyscy członkowie kohorty znajdują się w stanie wolnym i macierze ${}_yL(x)$ i ${}_yT(x)$ składają się z samych zer za wyjątkiem pierwszej kolumny.

Szczególne znaczenie wśród funkcji tablic życia ma oczekiwane dalsze trwanie życia. W wielostrumieniowych tablicach zmian stanu cywilnego rozróżniamy dwa rodzaje miar oczekiwanego trwania życia. Jedna z nich opiera się na *population irrespective of marital status* (*population based*), druga zaś na *marital status*.

Oczekiwane trwanie życia dla *population based* przedstawia liczbę lat przeżytych w każdym stanie w wieku powyżej x lat i oczekiwane dalsze trwanie życia bez nawiązywania do zajmowanego stanu w wieku x lat lub wcześniejszego wieku. Oczekiwane dalsze trwania życia dla *population based* najdogodniej obliczyć można wykorzystując kohortę w wieku $y < \overline{\alpha}$; np. kohorta urodzonych, ponieważ w wieku zero lat, wszyscy członkowie kohorty znajdują się w stanie wolnym i oczekiwane dalsze trwanie życia w stanie zajmowanym w momencie urodzenia automatycznie daje miarę *population based*. Natomiast liczba „osobolat" przeżytych w różnych stanach powyżej wieku x lat przez osoby będące w kohortcie urodzonych (*birth cohort*) składa się z niezerowych elementów w pierwszej kolumnie macierzy ${}_0T(x)$. Oczekiwane dalsze trwanie życia dla *population based* możemy zapisać w postaci formuły macierzowej:

[38] Por. F. J. Willkens, I. Shah, J. M. Shah, P. Ramachandran, *Multi-state Analysis...*, op. cit. (por. przyp. 17).

$$ {}_0e(x) = \frac{1}{{}_{10}l(x)}\,{}_0T(x) = \frac{1}{\sum_k {}_{10}l_k}\,{}_0T(x), \tag{21} $$

gdzie ${}_{10}l(x)$ oznacza prawdopodobieństwo, że członkowie kohorty urodzonych osiągną (dożyją) x lat bez względu na stan cywilny w tym wieku. Na podstawie elementów danych w pierwszej kolumnie macierzy ${}_0e(x)$ można ustalić, ile lat osoba w wieku x lat, bez względu na obecny stan cywilny, może przeżyć w każdym stanie. Ogólne oczekiwane dalsze trwanie życia ustalmy poprzez kumulowanie danych.

Natomiast dla kohorty cywilnej (*marital status-based measure*) oczekiwane dalsze trwanie życia jest określane dla poszczególnych stanów. Przedstawia ono czas przeżyty w różnych stanach powyżej wieku x lat w zależności od stanu zajmowanego w wieku y lat ($y \leq x$). I tak dla $x = y$ oczekiwane dalsze trwanie życia określa liczbę lat pozostałych do przeżycia w bieżącym stanie cywilnym, które wyraża relacja:

$$ {}_ye(y) = \sum_{t=0}^{z-y} {}_yL(y+t) = {}_yT(y). \tag{22} $$

Jest to relacja umożliwiająca oszacowanie oczekiwanego dalszego trwania życia powyżej wieku y lat osób mających y lat (rzeczywisty wiek).
Z kolei dla jednostek w stanie cywilnym zajmowanym w wieku y lat ($y > x$) i w przyszłych stanach oczekiwane dalsze trwanie życia powyżej wieku x lat ustala się z relacji:

$$ {}_ye(x) = {}_yT(x)\left[{}_y\hat{l}(x)\right]^{-1}, \tag{23} $$

gdzie ${}_y\hat{l}(x)$ jest macierzą diagonalną z elementami ${}_{iy}l(x) = \sum_k {}_{iy}l_k(x)$. Element ${}_{iy}l(x)$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba w wieku y lat w stanie i dożyje do wieku x lat.

Macierz oczekiwanego dalszego trwania życia ma formę podobną do macierzy ${}_yl(x)$. Jej elementy postaci ${}_{iy}e_j(x)$ określają liczbę lat jaką osoba w stanie i oraz w wieku y lat może oczekiwać, że przeżyje w stanie j po ukończeniu x lat. Ogólne oczekiwane trwanie życia powyżej wieku x lat dla osoby w stanie i w wieku y lat można ustalić poprzez zsumowanie odpowiedniej kolumny. Informuje ona o liczbie lat przeżytych w każdym stanie cywilnym. Charakterystyczne jest, ze niektóre elementy kolumny mogą być oczywiście równe zero, gdyż osoba, która zawarła związek małżeński nie może powrócić do stanu wolnego.

Należy zauważyć, że równanie (22) jest szczególnym przypadkiem[39] równania (23) dla $x = y$, gdzie macierz ${}_yl(x)$ jest macierzą jednostkową. Ponieważ uwzględniono założenie, że najniższy wiek w równaniu (23) wynosi $\overline{\alpha}$, macierz ${}_yl(x)$ musi być nieosobliwa. Z kolei macierz oczekiwanego dalszego trwania życia dla każdego w zależności od znajomości ${}_yT(x)$ i ${}_yl(x)$ przyjmie postać:

$$ {}_xe(x) = {}_yT(x)\left[{}_yl(x)\right]^{-1}. \tag{24}$$

5. *Uwagi końcowe*

Analiza zmian kategorii stanu cywilnego na podstawie metod wielostanowej analizy demograficznej umożliwia obserwacje rzeczywistości bez założenia o braku przepływu między poszczególnymi stanami. Tym samym możliwe staje się prześledzenie historii życia badanej populacji w zależności od zajmowanego przez nią stanu cywilnego. Mankamentem klasycznych tablic eliminacji jest to, że uzyskujemy tylko charakterystyki trwania życia dotyczące „jednostki przeciętnej", tzn. abstrahuje się od jej aktualnego stanu cywilnego. Zaletą demografii wieloregionalnej jest wprowadzenie rozróżnienia między parametrami trwania życia „warunkowymi" i „bezwarunkowymi" w zależności od kohorty osób, której one dotyczą. Zaletą postępowania badawczego zaprezentowanego przez A. Rogersa[40] jest wyróżnienie kohorty urodzeniowej, tzn. osób urodzonych w analizowanym regionie oraz kohorty osób według ich aktualnego miejsca zamieszkania. W wielostanowej analizie zmian stanu cywilnego odpowiada to rozróżnieniu dwóch typów miar: pierwszy – *population – based*, która opisuje historię życia osób wyróżnionych ze względu na wiek i niezależnie od stanu cywilnego; oraz drugi typ miary – *marital status – based*, która opisuje historie życia kohorty w zależności od stanu cywilnego. Możliwe jest więc wyróżnienie warunkowych charakterystyk w zależności od wieku, w którym analizujemy stan cywilny badanych osób. Ponieważ wiek ten może być ustalony $\overline{\alpha}$ – wówczas otrzymujemy kohortę bazową osób znajdujących się w danym stanie, lub aktualny – wtedy mówimy o kohorcie cywilnej. Dzięki takiemu rozróżnieniu w wielostrumieniowych tablicach zmian stanu cywilnego jest możliwe wyróżnienie przeciętnego dalszego trwania życia właściwego dla osób znajdujących się w danym stanie

[39] Por. F. J. Willkens, I. Shah, J. M. Shah, P. Ramachandran, *Multi-state Analysis...*, op. cit. (por. przyp. 17).

[40] Por. A. Rogers, *Introduction...*, op. cit. (por. przyp. 16).

cywilnym niezależnie od zajmowanego stanu (*population – based*), jak również przeciętnego dalszego trwania życia w zależności od stanu cywilnego badanych osób (*marital status – based*). Tablice zmian stanu cywilnego umożliwiają analizę już od dolnej granicy wieku matrymonialnego. Umożliwia to zdekomponowanie parametrów pomiędzy poszczególne kategorie stanu cywilnego. Oznacza to, że metoda ta pozwala na podjęcie próby analizy formowania się i rozpadu rodziny, zmian jej wielkości i struktury przez cały cykl życia rodziny.

Wielostanowa analiza demograficzna jest metodą umożliwiającą postępowanie badawcze zmierzające do identyfikacji procesu formowania się i rozpadu związków małżeńskich tak pierwszych, jak i ponownych. Tym samym może stać się źródłem modelowania procesu zawierania i rozpadu zawieranych małżeństw z uwzględnieniem zależności pomiędzy tymi procesami, a także ich wpływu na zmianę struktury ludności według wieku. Pozwala to prognozować proces zmian stanu cywilnego przy realizacji wszystkich założeń przyjętych przy konstrukcji modelu.

Zaprezentowane metody analizy wieloregionalnej są modelami analizy przekrojowej, w której przyjmuje się założenie co do niezmienności kalendarza zjawisk demograficznych. W analizie wzdłużnej takie założenia są niepotrzebne[41]. Cykl zmian kategorii stanu cywilnego badanej populacji osób można odtworzyć w zależności od rodzaju materiałów źródłowych. Oznacza to, że, podobnie jak w analizie jednostanowej, mamy możliwość obserwowania rzeczywistych losów realnej kohorty.

Zaletą analizy wielostanowej jest możliwość badania populacji zróżnicowanej ze względu na cechy demograficzno-społeczne jednostek.

Wielostrumieniowe tablice zmian stanu cywilnego stanowią bogate źródło informacji o procesie zawierania związków małżeńskich przez osoby stanu wolnego (panna, kawaler), rozwiedzione i wdowy, rozpadania się małżeństw w wyniku rozwodu bądź śmierci jednego ze współmałżonków oraz wymierania członków kohort w różnych stanach cywilnych. Tablice zawierają nie tylko wielkości syntetyczne dla poszczególnych stanów cywilnych (np. przeciętne dalsze trwanie życia w każdym ze stanów), ale także uwzględniają stan cywilny w grupie wieku poprzedzającej wiek analizowany.

W polskiej demografii inicjatywy badawcze realizowane zarówno w ośrodkach naukowych, jak i w Głównym Urzędzie Statystycznym polegają nie tylko na śledzeniu i szybkiej aplikacji i wdrożeniu metod do badań empirycznych, ale równocześnie mają one znamiona pionierskich rozwiązań.

W poznańskim ośrodku naukowym po raz pierwszy w Polsce skonstruowane zostały prospektywne tablice zmian stanu cywilnego. Tablice te uwzględniają kształtowanie się w przyszłości warunków i czynników determinujących intensywność powstawania pierwszych związków małżeńskich[42]. W ośrodku tym

[41] Por. E. Englert, J. Paradysz, *Dwuregionalne tablice...*, op. cit. (por. przyp. 20).

[42] Por. W. Ignatczyk, *Postawy małżeńskie...*, op. cit. (por. przyp. 9).

skonstruowano również po raz pierwszy retrospektywne dwuregionalne tablice zawierania małżeństw z uwzględnieniem takich czynników perturbacyjnych jak zgon i emigracja[43]. Była to pierwsza w Polsce próba empirycznej weryfikacji wieloregionalnych tablic zdarzeń demograficznych, która jednocześnie pozwoliła na postawienie pewnych hipotez roboczych dotyczących badanych zjawisk[44]. Na początku lat osiemdziesiątych zostały skonstruowane pierwsze wielostrumieniowe tablice zmian stanu cywilnego dla Polski oddzielnie dla kobiet i mężczyzn[45]. Wyodrębnienie przez autorów populacji mężczyzn i kobiet stanowiło nowość, gdyż dotychczasowe wielostrumieniowe tablice zmian stanu cywilnego konstruowane dla innych krajów dotyczyły wyłącznie kobiet. Przy konstrukcji tych tablic autorzy posłużyli się najnowszymi danymi statystycznymi z lat 1982–1984.

Koniec XX wieku to okres głębokich przemian w sytuacji społeczno-gospodarczej kraju, które miały wpływ na erozję systemu wartości społecznych i rodzinnych naszego społeczeństwa. Tym samym ujawniły się nowe zachowania w modelach tworzenia, trwania i rozpadu rodziny. Dlatego celowe wydaje się podjęcie próby odtworzenia procesu z tego okresu i porównanie z procesami, które zachodziły we wcześniejszym okresie. Pewne prace w tym kierunku prowadzone są w poznańskim ośrodku naukowym.

Małgorzata Kowalska

MULTISTATE TABLES OF CHANGES OF THE MARITAL STATUS IN THE LIGHT OF POLISH DEMOGRAPHIC PRACTICE

SUMMARY

The author presents a detailed review of tables of marriages contraction adjusted to the Polish conditions. Those tables are presented in chronological sequence, starting from the classic tables of elimination to multistate tables of changes of the marital status. The article compares the methods of construction of various types of tables with regard to their advantages and disadvantages. The article pays special attention to the multistate tables of changes of the marital status, emphasising their usefulness in the current demographic studies. Moreover, the article presents the theoretical bases of the construction of contemporary models of multistate tables of changes of the marital status.

[43] Por. E. Englert, J. Paradysz, *Dwuregionalne tablice...*, op. cit. (por. przyp. 20).

[44] Ibidem.

[45] Por. M. Kędelski, E. Gołata, *Wielostrumieniowe tablice zmian....*, op. cit. (por. przyp. 21); E. Gołata, *Zintegrowane tablicetrwania życia...*, op. cit. (por. przyp. 22).