Donata KOPAŃSKA-BRÓDKA

METODY WYZNACZANIA WARTOŚCI INFORMACJI W PROCESIE PODEJMOWANIA DECYZJI W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

Wprowadzenie

Wiele problemów dotyczących planowania i podejmowania decyzji w warunkach niepełnej informacji rozpatrywanych jest w odniesieniu do ewentualnych korzyści wynikających z rozpoznania przyszłych realizacji zmiennych losowych. W praktyce informacje takie uzyskuje się drogą eksperymentu, badań ankietowych, sondaży itp. Wiedza o przyszłych realizacjach zmiennych losowych pozwala podejmować „lepsze" decyzje. Jednak proces zdobywania („kupowania") informacji pociąga za sobą dodatkowe koszty, które nie są obojętne dla osiąganego zysku wynikającego z podjęcia „lepszych" decyzji. Znaczy to, że przed podjęciem decyzji należy odpowiedzieć sobie na pytanie, jaka jest wartość informacji o przyszłych realizacjach zmiennych losowych, aby z punktu widzenia kryterium optymalności było to uzasadnione.

Przyjmuje się, że miarą wartości informacji (por. [1], [4]) jest wartość oczekiwana dokładnej informacji (*the expected value of perfect information*) EVPI, gdzie wartość dokładnej informacji definiowana jest jako różnica efektu wynikającego z podjęcia decyzji przy znajomości przyszłych realizacji zmiennych losowych i efektu podjęcia decyzji bez tej wiedzy [2].

Oznaczmy przez $f(x, \xi)$ funkcję celu zależną od decyzji x oraz zmiennej losowej ξ. Gdy problem polega na wyborze takiej decyzji x (zależnej od ξ), dla której funkcja celu osiąga maksimum, wtedy wartość oczekiwana dokładnej informacji EVPI określona jest następująco:

(1)
$$\mathrm{EVPI} = E\left[\max_x f(x,\xi)\right] - \max_x E\left[f(x,\xi)\right]$$

Avriel i Williams (w [1]) wykazali, że EVPI ≥ 0. W sytuacji gdy dla ustalonego problemu EVPI=0, wnioskujemy, że model opisujący ten problem nie zawiera elementów ryzyka, ponieważ czynniki losowe nie wpływają na proces podejmowania decyzji, bądź też model został źle wyspecyfikowany, ignorując zasadniczy aspekt problemu, którym jest jego stochastyczna natura.

W dalszej części rozpatrywany będzie teoretyczny i praktyczny problem wyznaczania EVPI dla szczególnego modelu optymalizacyjnego sytuacji decyzyjnej w warunkach niepewności.

1. Górne ograniczenie EVPI dla dokładnych rozkładów prawdopodobieństwa czynników losowych

Przyjmijmy, że model matematyczny sytuacji decyzyjnej jest następujący:

$$z = c^T x \rightarrow \max$$

$$Ax \leq \xi, \quad x \geq 0, \tag{2}$$

gdzie macierz $A \in R^{m \times n}$ oraz wektor $c \in R^n$ są zdeterminowane, natomiast składowe m-wymiarowego wektora losowego $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o znanych rozkładach prawdopodobieństwa. Oznaczmy przez $z_{opt}(\xi)$ wartość optymalną problemu (2) dla dowolnej realizacji ξ oraz $D(\xi) = \{x \in R^n, Ax \leq \xi, x \geq 0\}$. Oczekiwana wartość informacji zgodnie z (1) dla problemu (2) wynosi

$$\text{EVPI} = E[z_{opt}(\xi)] - \max E[c^T x \mid x \in D(\xi)]. \tag{3}$$

Odnotujmy, że problem (2) jest zagadnieniem stochastycznego programowania liniowego, natomiast składniki występujące we wzorze (3) są rozwiązaniami problemu przy różnych koncepcjach rozwiązań. W teorii programowania stochastycznego można wyodrębnić dwa podstawowe kierunki badań [6]:

– Podejście *probabilistyczne* (PR) zakładające, że wartość optymalna jest zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa generowanym przez rozkłady zmiennych losowych występujących w modelu. Rozwiązanie problemu polega na wyznaczeniu rozkładu prawdopodobieństwa wartości optymalnej oraz charakterystyk tego rozkładu, a w szczególności wartości oczekiwanej.

– Podejście *deterministycznego ekwiwalentu* (DE), w którym poszukuje się pewnego deterministycznego odpowiednika stochastycznego problemu (2). Rozwiązaniem zagadnienia dla tego podejścia jest optymalne rozwiązanie odpowiedniego problemu deterministycznego.

W celu obliczenia wartości $E[z_{opt}(\xi)]$ stosuje się podejście PR do problemu (2). Istotne znaczenie ma klasa rozkładów prawdopodobieństwa występujących

zmiennych losowych oraz ich stochastyczna zależność. Numeryczne rozwiązanie nie jest jednak proste, jeśli w modelu występują więcej niż dwie zmienne losowe. Chociaż nie istnieje numerycznie efektywna metoda obliczania $E[z_{opt}(\xi)]$, to stosunkowo łatwo można oszacować tę wartość z góry.

Dla problemu liniowego (2) zmienna $z_{opt}(\xi)$ jest wklęsłą funkcją składowych wektora losowego ξ i dla dowolnej realizacji ξ^0

$$z_{opt}(\xi) \leq z(\xi^0) + \Delta z(\xi^0)(\xi - \xi^0), \tag{4}$$

gdzie $z(\xi^0)$ jest wartością optymalną problemu (2) dla realizacji ξ^0. Zakładając istnienie odpowiednich wartości oczekiwanych, otrzymujemy:

$$E[z_{opt}(\xi)] \leq z(\xi^0) + \Delta z(\xi^0)\,(E(\xi) - \xi^0). \tag{5}$$

W celu wyznaczenia wielkości $\max E[c^T x \mid x \in D(\xi)]$ ze wzoru (3) stosuje się podejście DE do problemu (2) przy zastosowaniu E-modelu (optymalizacji wartości oczekiwanej funkcji celu). Jeśli zmienne losowe występują tylko w funkcji kryterium, to zastosowanie E-modelu w pełni determinuje zagadnienie. Natomiast gdy zmienne losowe występują w warunkach ograniczających, wtedy powstaje problem określenia deterministycznego ekwiwalentu. W podejściu DE rozpatruje się dwa zasadnicze ujęcia modelowe [5]:

– *modele o postaci elastycznej* (RP) (*recourse problems*) nazywane również podejściem dwuetapowym lub modelem z korektą rozwiązań,

– *modele z ograniczonym ryzykiem* (CCP) (*chance constrained programming*) nazywane często podejściem Charnesa Coopera.

Wartość optymalna każdego z wymienionych E-modeli typu RP lub CCP daje poszukiwaną wartość $\max E[c^T x \mid x \in D(\xi)]$. Zauważmy, że nie ma żadnej teoretycznej zasady wyboru deterministycznego ekwiwalentu i w ogólnym przypadku wielkość $\max E[c^T x \mid x \in D(\xi)]$ nie jest określona w sposób jednoznaczny. Z matematycznego punktu widzenia dla pewnych problemów modele typu RP i CCP są ekwiwalentne (por. [3]), lecz taka ekwiwalentność nie daje żadnych korzyści praktycznych. Zastosowanie ujęcia modelowego RP wymaga określenia w sposób arbitralny wielkości „kar", jakie należy ponieść w sytuacji naruszenia warunków ograniczających. Stąd też dla różnych „kar" otrzymuje się różne wielkości $\max E[c^T x \mid x \in D(\xi)]$. W przypadku podejścia typu CCP wymagane jest określenie prawdopodobieństwa (ryzyka), z jakim poszczególne warunki ograniczające powinny być spełnione. Wielkość $\max E[c^T x \mid x \in D(\xi)]$ zależy od tych prawdopodobieństw. Oznaczmy przez q wektor kar w podejściu RP oraz

$$Q(x, \xi) = q(Ax - \xi) \quad \text{i} \quad z(x, \xi) = c^T x - Q(x, \xi).$$

Niech x^0 będzie rozwiązaniem optymalnym zadania

$$z = c^T x \to \max$$
$$Ax \leq \xi^0, \quad x \geq 0.$$

Wówczas dla podejścia RP

$$\max E[c^T x \mid x \in D(\xi)] = \max E[z(x, \xi)] \geq c^T x^0 - E[Q(x^0, \xi)]. \tag{6}$$

Korzystając z wcześniejszego określenia $z(\xi^0)$, otrzymujemy $c^T x^0 = z(\xi^0)$. Z nierówności (5) oraz (6) górne oszacowanie wartości informacji dane jest następującą zależnością:

$$\text{EVPI} \leq \Delta z(\xi^0)(E(\xi) - \xi^0) + E[Q(x^0, \xi)]. \tag{7}$$

Powyższe rozważania miały charakter teoretyczny i dotyczyły obliczania bądź oszacowania z góry wielkości EVPI przy założeniu dokładnej znajomości rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego ξ.

2. Statystyczna ocena wartości informacji

W praktyce podejmowania decyzji optymalnych w warunkach niepełnej informacji najczęściej mamy do czynienia z sytuacją, gdy wiedza o zmiennych losowych ograniczona jest tylko do zbioru zaobserwowanych realizacji tych zmiennych. Na podstawie próby można oszacować rozkłady prawdopodobieństwa i postępować zgodnie z rozważaniami przedstawionymi w poprzednim paragrafie lub znaleźć statystyczną ocenę EVPI. W dalszej części zostanie omówiona koncepcja statystycznej oceny EVPI.

Przyjmijmy, że dysponujemy N-elementową próbą wektora losowego $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ z problemu (2) i oznaczmy j-tą obserwację przez b_j, $j = 1, 2, \ldots, N$. Dla każdej obserwacji b_j rozwiązujemy zadanie

$$z = c^T x \to \max$$
$$Ax \leq b_j, \quad x \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{8}$$

Przez z_j oznaczamy wartość optymalną, natomiast przez $x(b_j)$ rozwiązanie optymalne zadania (8). Wielkości $z_1, z_2, \ldots, z_N$ interpretowane są jako zaobserwowane realizacje zmiennej losowej $z_{\text{opt}}(\xi)$, wobec czego oceną wartości oczekiwanej $E[z_{\text{opt}}(\xi)]$ będzie średnia z próby oznaczana przez z_{SR}.

W celu wyznaczenia statystycznej oceny rozwiązania E-modelu w podejściu DE oznaczmy przez x_{Bk} k-tą bazę układu warunków ograniczających problemu (2) i $k = 1, 2, \ldots, K$, gdzie K jest liczbą możliwych baz. Zbiór wektorów x_{Bk} bywa nazywany również selekcjami (por. [7]). Mówimy, że rozwiązanie optymalne jest zgodne z k-tą selekcją (bazą), jeśli jego struktura jest taka sama jak struktura k-tej bazy.

Zbiór rozwiązań optymalnych $x(b_1), x(b_2), \ldots, x(b_N)$ zadań (8) można pogrupować ze względu na zgodność struktury. Jeśli wielkość p_k oznacza częstość występowania rozwiązania optymalnego o strukturze x_{Bk}, a składowe wektora

$b = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_m)$ są statystycznymi ocenami wartości oczekiwanych zmiennych ξ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), to statystyczną oceną E-modelu w podejściu DE jest rozwiązanie optymalne następującego zadania:

$$z = c^T[x_{B1}p_1 + x_{B2}p_2 + \ldots + x_{BK}p_K] \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b, \; x \geq 0. \tag{9}$$

Oznaczając przez α_l częstość występowania zmiennej x_l ($l = 1, 2, \ldots, n$) jako zmiennej bazowej w zbiorze rozwiązań optymalnych, można zadanie (9) przedstawić w postaci następującego zadania programowania liniowego:

$$z = c_1\alpha_1x_1 + c_2\alpha_2x_2 + \ldots + c_n\alpha_nx_n \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b, \; x \geq 0. \tag{10}$$

Rozwiązaniem powyższego zadania jest wartość optymalna z_{DE}, a statystyczna ocena EVSI wartości informacji EVPI przyjmuje postać

$$\text{EVSI} = z_{SR} - z_{DE}.$$

Powyższy sposób wyznaczania statystycznej oceny EVSI nie wyczerpuje zagadnienia, gdyż zależy od jednej z możliwych koncepcji statystycznego rozwiązania modelu DE stochastycznego programowania liniowego.

Literatura

[1] **Avriel M., Williams A. C.**, The Value of Information and Stochastic Programming, Operations Res. 1970, vol. 18.

[2] **Davies K. R., McKeown P. G.**, Quantitative Models for Management, Kent Publishing Company, Boston, Massachusetts 1984.

[3] **Garstka S. J.**, The Economic Equivalence of Several Stochastic Programming Models, w: Stochastic Programming **M. A. Dempster** (ed.), Academic Press, New York 1980.

[4] **Huang C. C., Vertinsky I., Ziemba W. T.**, Sharp Bounds on the Value of Perfect Information, Operations Res. 1977, vol. 25.

[5] **Kopańska-Bródka D.**, Metody stochastycznego programowania liniowego i ich praktyczne zastosowanie w badaniach ekonomicznych, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 1991.

[6] **Kopańska-Bródka D.**, Probabilistyczne podejście do problemu stochastycznego programowania liniowego, Badania Operacyjne i Decyzje 1992, nr 3.

[7] **Tintner G., Sengupta J. K.**, Stochastic Economics. Stochastic Processes, Control and Programming, Academic Press, New York, London 1972.