Marian Matłoka

MULTIFUNKCJE (Φ_i, Φ_j) – WYPUKŁE

1. Wstęp

Pojęcie zbioru wypukłego odgrywa bardzo dużą rolę zarówno w matematyce, jak i w ekonomii. Wiele interesujących i ważnych wyników zarówno z punktu widzenia teoretycznego, jak i praktycznego uzyskano przy założeniu warunków wypukłości. Zagadnieniom tym poświęcono kilka świetnych monografii oraz mnóstwo artykułów opublikowanych w światowych czasopismach naukowych. W ostatnich latach zauważyć można tendencje do uogólniania pojęcia zbioru wypukłego i funkcji wypukłej. Przykładem mogą być tu prace cytowane w literaturze. Konsekwencją wspomnianych uogólnień są bardzo ciekawe wyniki dotyczące między innymi programowania matematycznego.

Bardzo ściśle z pojęciem zbioru wypukłego związane jest pojęcie ciągłego zbioru wypukłego. Poświęcono temu zagadnieniu szereg prac (patrz literatura). Uzyskane w tym zakresie wyniki pozwalają na rozwijanie teorii multifunkcji a w konsekwencji teorii procesów wypukłych.

Niniejsza praca poświęcona jest problematyce wypukłości w teorii multifunkcji. W oparciu o najbardziej ogólną definicję zbioru wypukłego, tzw. Φ – wypukłość, sformułowano w pracy twierdzenia i własności niezbędne do dalszych rozważań dotyczących np. modeli procesów produkcji czy też problemów równowagi w teorii gier.

2. Pojęcia wstępne

Niech X_L oznacza dowolny podzbiór przestrzeni n_L-wymiarowej oraz niech Φ_L spełnia następujące warunki:

$$\Phi_L : X_L \times X_L \times [0,1] \to R^{n_L}, \tag{1}$$

$$\Phi_L(x_1, x_2, 0) = x_1, \quad \Phi_L(x_1, x_1, \lambda) = x_1 \tag{2}$$

$$\forall\, x_1, x_2 \in X_L, \lambda \in [0, 1],$$

Przyjmijmy ponadto, że dla dowolnych zbiorów $A, B \subset X_L$

$$\Phi_L(A, B, \lambda) = \{\Phi_L(x_1, x_2, \lambda) : x_1 \in A, x_2 \in B\}.$$

Definicja 2.1. [10]. Zbiór X_L nazywamy Φ_L-wypukłym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X_L$, $\lambda \in [0, 1]$ $\Phi_L(x_1, x_2, \lambda) \in X_L$.

Nietrudno jest zauważyć, że iloczyn mnogościowy zbiorów Φ_L-wypukłych jest zbiorem Φ_L-wypukłym.

Definicja 2.2. Iloczyn kartezjański $C_i \times C_j \subset X_i \times X_j$ nazywamy (Φ_i, Φ_j) – wypukłym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in C_i$, $y_1, y_2 \in C_j$ oraz $\lambda \in [0, 1]$

$$(\Phi_i(x_1, x_2, \lambda), \ \Phi_j(y_1, y_2, \lambda)) \in C_i \times C_j.$$

3. Multifunkcje (Φ_i, Φ_j) – wypukłe

Niech X_L oznacza Φ_L – wypukły podzbiór przestrzeni R^{n_L} a $P(X_L)$ rodzinę niepustych podzbiorów zbioru X_L.

Definicja 3.1. Multifunkcję $a : X_i \to P(X_j)$ nazywamy (Φ_i, Φ_j) – wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X_i$ oraz $\lambda \in [0, 1]$

$$a\big(\Phi_i(x_1, x_2, \lambda)\big) \supset \Phi_j\big(a(x_1), a(x_2), \lambda\big).$$

Twierdzenie 3.1. Jeżeli multifunkcja $a : X_i \to P(X_j)$ jest (Φ_i, Φ_j) – wypukła i ξ jest Φ_i-wypukłym podzbiorem zbioru X_i, to $a(\xi)$ jest Φ_j-wypukłym podzbiorem zbioru X_j.

Dowód. Załóżmy, że a jest (Φ_i, Φ_j)-wypukłą multifunkcją. Niech

$$y_1, y_2 \in a(\xi) = \bigcup_{y \in \xi} a(y).$$

Wtedy istnieją elementy $x_1, x_2 \in \xi$ takie, że $y_1 \in a(x_1)$ i $y_2 \in a(x_2)$. Oznacza to, że

$$\Phi_j(y_1, y_2, \lambda) \in \Phi_j\big(a(x_1),\ a\ (x_2),\ \lambda\big).$$

Z (Φ_i, Φ_j)-wypukłości multifunkcji a mamy

$$\Phi_j(a(x_1), a(x_2), \lambda) \subset a(\Phi_i(x_1, x_2, \lambda)) \subset a(\xi).$$

Zatem

$$\Phi_j(y_1, y_2, \lambda) \in a(\xi)$$

co oznacza, że $a(\xi)$ jest zbiorem Φ_j-wypukłym.

Wniosek. Jeżeli multifunkcja $a : X_i \to P(X_j)$ jest (Φ_i, Φ_j)-wypukła, to dla dowolnego $x \in X_i$ $a(x)$ jest zbiorem Φ_j-wypukłym.

Twierdzenie 3.2. Jeżeli multifunkcja $a : X_i \to P(X_j)$ jest (Φ_i, Φ_j)-wypukła, to jej wykres $G_a = \{(x, y) \in X_i \times X_j : y \in a(x)\}$ jest (Φ_i, Φ_j)-wypukłym podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X_i \times X_j$.

Dowód. Niech (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in G_a$. Wtedy, zgodnie z definicją wykresu multifunkcji $y_1 \in a(x_1)$ i $y_2 \in a(x_2)$. Oznacza to, że

$$\Phi_j(y_1, y_2, \lambda) \in \Phi_j(a(x_1), a(x_2), \lambda).$$

Z założenia o (Φ_i, Φ_j)-wypukłości multifunkcji a mamy:

$$\Phi_j(y_1, y_2, \lambda) \in a(\Phi_i(x_1, x_2, \lambda)),$$

co oznacza, że

$$(\Phi_i(x_1, x_2, \lambda),\ \Phi_j(y_1, y_2, \lambda)) \in G_a.$$

Zatem G_a jest zbiorem (Φ_i, Φ_j)-wypukłym.

Twierdzenie 3.3. Jeżeli multifunkcja $a : X_i \to P(X_j)$ jest (Φ_i, Φ_j)-wypukła, $0 \in a(0)$, $\Phi_i(x, 0, \lambda) = \lambda x$, $\Phi_j(y, 0, \lambda) = \lambda y$ i X_i oraz X_j są stożkami, to

$$a(\lambda x) \supset \lambda\ a(x), \qquad (0 \le \lambda \le 1),$$

$$a(\mu x) \supset \mu\ a(x), \qquad (\mu \ge 1).$$

Dowód. Zgodnie z definicją (Φ_i, Φ_j)-wypukłości multifunkcji a dla dowolnego $x \in X_i$ i $0 \le \lambda \le 1$ mamy:

$$a(\lambda x) = a(\Phi_i(x, 0, \lambda)) \supset \Phi_j(a(x), a(0), \lambda) \supset \Phi_j(a(x), 0, \lambda)) = \lambda a(x)\ .$$

Załóżmy teraz, że $x \in X_i$, $\mu \ge 1$ i $x' = \mu x$. Wtedy mamy

$$a\,(x) = a\left(\frac{1}{\mu}\,x'\right) \supset \frac{1}{\mu}\,a\,(x') = \frac{1}{\mu}\,a\,(\,\mu x)\,,$$

czyli

$$\mu a(x) \supset a(\mu x).$$

Definicja 3.2. Multifunkcją odwrotną do multifunkcji $a : X_i \to P(X_j)$ nazywamy multifunkcję $a^{-1} : X_j \to P(X_i)$ taką, że dla dowolnego $y \in X_j$

$$a^{-1}(y) = \{x \in X_i : y \in a(x)\}.$$

Twierdzenie 3.4. Jeżeli multifunkcja a jest (Φ_i, Φ_j)-wypukła, to odwrotna do niej a^{-1} jest (Φ_j, Φ_i)-wypukła .

Dowód. Załóżmy, że a jest multifunkcją (Φ_i, Φ_j)-wypukłą. Wtedy, zgodnie z definicją mamy :

$$\begin{aligned}
& a^{-1}(\Phi_j(y_1, y_2, \lambda)) = \{x \in X_i : \Phi_j(y_1, y_2, \lambda) \in a(x)\} = \\
& = \{x = \Phi_i(x_1, x_2, \lambda) \in X_i : \Phi_j(y_1, y_2, \lambda) \in a(\Phi_i(x_1, x_2, \lambda))\} \supset \\
& \supset \{\Phi_i(x_1, x_2, \lambda) \in X_i : \Phi_j(y_1, y_2, \lambda) \in \Phi_j(a(x_1), a(x_2), \lambda)\} = \\
= & \{\Phi_i(x_1, x_2, \lambda) \in X_i : \Phi_j(y_1, y_2, \lambda) \in \{\Phi_j(y'_1, y'_2, \lambda) : y'_1 \in a(x_1), y'_2 \in a(x_2)\}\} \supset \\
& \supset \{\Phi_i(x_1, x_2, \lambda) \in X_i : y_1 \in a(x_1), y_2 \in a(x_2)\} = \\
& = \{\Phi_i(x_1, x_2, \lambda) \in X_i : x_1 \in a^{-1}(y_1), x_2 \in a^{-1}(y_2)\} = \\
& = \Phi_i(a^{-1}(y_1), a^{-1}(y_2), \lambda).
\end{aligned}$$

Definicja 3.3. Złożeniem multifunkcji $a : X_i \to P(X_j)$ i $b : X_j \to P(X_k)$ nazywamy multifunkcję $b \circ a : X_i \to P(X_k)$ taką, że dla dowolnego $x \in X_i$

$$(b \circ a)(x) = b(a(x)) = \bigcup_{y \in a(x)} b(y).$$

Twierdzenie 3.5. Jeżeli multifunkcje a i b są odpowiednio (Φ_i, Φ_j) oraz (Φ_j, Φ_k)-wypukłe, to multifunkcja $b \circ a$ jest (Φ_j, Φ_k)-wypukła.

Dowód. Niech $x_1, x_2 \in X_i$, $\lambda \in [0, 1]$. Wtedy, zgodnie z przyjętymi definicjami mamy:

$$\begin{aligned}
& (b \circ a)(\Phi_i(x_1, x_2, \lambda)) = \{b(y) : y \in a(\Phi_i(x_1, x_2, \lambda))\} \supset \\
& \supset \{b(y) : y \in \Phi_j(a(x_1), a(x_2), \lambda)\} = \\
& = \{b(y) : y \in \Phi_j(y_1, y_2, \lambda) : y_1 \in a(x_1), y_2 \in a(x_2)\} = \\
& = \{b(\Phi_j(y_1, y_2, \lambda)) : y_1 \in a(x_1), y_2 \in a(x_2)\} \supset \\
& \supset \{\Phi_k(b(y_1), b(y_2), \lambda)) : y_1 \in a(x_1), y_2 \in a(x_2)\} = \\
& = \Phi_k(ba(x_1), ba(x_2), \lambda) = \Phi_k((b \circ a)(x_1), (b \circ a)(x_2), \lambda).
\end{aligned}$$

Definicja 3.4. Funkcję $f : X_i \to R$ nazywamy Φ_i-pseudowklęsłą wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X_i$ oraz $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\Phi_i(x_1, x_2, \lambda)) \geq \max(f(x_1), f(x_2)).$$

Twierdzenie 3.6. Jeżeli funkcja $f: X_i \to R$ jest Φ_i-pseudowklęsła i multifunkcja $a: X_i \to P(X_j)$ jest (Φ_i, Φ_j)-wypukła, to funkcjonał

$$q_f(x) = \max_{y \in a(x)} f(y)$$

jest Φ_i-pseudowklęsły.

Dowód. Niech $x_1, x_2 \in X_i$ oraz $\lambda \in [0, 1]$. Wtedy mamy:

$$\begin{aligned}
q_f(\Phi_i(x_1, x_2, \lambda)) &= \max_{y \in a(\Phi_i(x_1, x_2, \lambda))} f(y) \geq \\
&\geq \max_{y \in \Phi_j(a(x_1), a(x_2), \lambda))} f(y) = \max_{\substack{y_1 \in a(x_1) \\ y_2 \in a(x_2)}} f(\Phi_j(y_1, y_2, \lambda)) \geq \\
&\geq \max_{\substack{y_1 \in a(x_1) \\ y_2 \in a(x_2)}} \max(f(y_1), f(y_2)) = \\
&= \max\left(\max_{y_1 \in a(x_1)} f(y_1), \max_{y_2 \in a(x_2)} f(y_2)\right) = \\
&= \max(q_f(x_1), q_f(x_2)).
\end{aligned}$$

Wprowadzimy teraz następujące oznaczenia:

$-X = \prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$,

$-x = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in X$,

$-x^{(i)} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$,

$-(x^{(i)}, y) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$,

$-\Phi: X \times X \times [0, 1] \to R^m$ i spełnia warunki (1), (2) oraz warunek $\Phi((x^{(i)}, y), (x^{(i)}, z), \lambda) = (x^{(i)}, \Phi_i(y, z, \lambda))$, gdzie $y, z \in X_i$ oraz $m = \sum_{k=1}^{n} n_k$.

Rozważmy multifunkcję $A_i: X \to P(X_i)$ oraz multifunkcję $a_i: X \to P(X)$ taką, że dla każdego $x \in X$ $a_i(x) = \{x^{(i)}\} \times A_i(x)$.

Twierdzenie 3.7. Jeżeli multifunkcja $A_i: X \to P(X_i)$ jest (Φ, Φ_i)-wypukła, to dla każdego $x \in X$ zbiór $a_i(x)$ jest Φ-wypukły.

Dowód. Niech $z, y \in a_i(x)$ i $\lambda \in [0, 1]$. Pokażemy, że $\Phi(y, z, \lambda) \in a_i(x)$. Na podstawie twierdzenia 3.1, ponieważ multifunkcja A_i jest (Φ, Φ_i)-wypukła, dla każdego $x \in X$ zbiór A_i(x) jest Φ_i-wypukły. Jeżeli $y, z \in a_i(x)$, to $y = (x^{(i)}, w)$, $z = (x^{(i)}, v)$, gdzie w, $v \in A_i(x)$. To oznacza, że

$$\begin{aligned}
\Phi(y, z, \lambda) &= \Phi(x^{(i)}, w), (x^{(i)}, v), \lambda) = \\
&= (x^{(i)}, \Phi_i(w, v, \lambda)) \in a_i(x),
\end{aligned}$$

ponieważ $A_i(x)$ jest zbiorem Φ_i-wypukłym.

Rozważmy teraz multifunkcję $b_i: X \to P(X)$ taką, że dla każdego $x \in X$

$$b_i: X = \{y \in a_i(x) : u_i(y) = \max_{z \in a_i(x)} u_i(z)\},$$

gdzie u_i oznacza Φ-pseudowklęsłą funkcję z X do R.

Twierdzenie 3.8. Dla każdego $x \in X$ zbiór $b_i(x)$ jest Φ-wypukły.

Dowód. Niech $y_1, y_2 \in b_i(x)$. Wtedy

$$-y_1 \in a_i(x), y_2 \in a_i(x), \qquad (^*)$$

$$-u_i(y_1) = \max_{z \in a_i(x)} u_i(z), u_i(y_2) = \max_{z \in a_i(x)} u_i(z). \qquad (^{**})$$

Z warunku (*) oraz Φ-wypukłości zbioru $a_i(x)$ wynika, że dla każdego $\lambda \in [0, 1]$ $\Phi(y_1, y_2, \lambda) \in a_i(x)$. Ponadto, z warunku (* *) i Φ-pseudowklęsłości funkcji u_i mamy:

$$u(\Phi(y_1, y_2, \lambda)) = \max_{z \in a_i(x)} u_i(z)$$

co oznacza, że $b_i(x)$ jest zbiorem Φ-wypukłym.

Literatura

[1] J.P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Birkhauser, Berlin 1990.

[2] J.P. Aubin, H. Frankowska, C. Olech, *Controllability of convex processes*, „SIAM Journal on Control and Optimization", 24, No 6

[3] C.R. Bector, C.S. Lolitha, S.K. Suncja, *Generalized B – vex functions and generalized B – vex programming*, „J.O.T.A." , 76 (1993), ss. 561-576

[4] C.R. Bector, C. Singh, *B – vex functions*, „J.O.T.A." , 71 (1991), ss. 237-253

[5] A.V. Fiacco, I. Kyparisis, *Generalized convexity and concavity of the optimal value function in nonlinear programming*, „Math. Progr.", 39 (1987), ss. 285-304

[6] D. Gale, V. Klee, *Continuous convex sets*, „Math. Scand.", 7 (1959), ss. 379-391

[7] H. Hartwig, *A bote on roughly convex functions*, „Optomization" 38 (1996), ss. 319-327

[8] S.R. Mohan, S.K. Neogy, *Note: On invex sets and preinvex functions*, „J. Math. Anal. Appl.", 189 (1995), ss. 901-908

[9] R. Pini, *Convexity along curves and invexity*, „Optimization" 29 (1994), ss. 301-309

[10] R. Pini, C. Singh, *(Φ_1, Φ_2)-convexity*, „Optimization" 40 (1997), ss. 103-120

[11] T. Rapcsak, *Geodesic convexity in nonlinear optimization*, „J.O.T.A.", 69(1987), ss. 69-183

[12] R.T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press 1970