Wojciech Sikora

MODYFIKACJA METODY POTECJAŁÓW DLA ZAGADNIENIA POŚREDNIKA Z OGRANICZONYMI PRZEPUSTOWOŚCIAMI

1. Wstęp

Metodę potencjałów, będącą szczególnym przypadkiem metody simpleks, opracował Dantzig w 1951 (zob. [2]), jako metodę rozwiązywania klasycznego, zamkniętego (zbilansowanego) zadania transportowego (ZZT). Można ją wykorzystać bezpośrednio, lub odpowiednio modyfikując, do rozwiązania wielu zagadnień pochodnych do ZZT lub zagadnienia pośrednika (zob. np. Buga [1], Sikora [4]).

O ile klasyczne ZZT i zagadnienie pośrednika mają zawsze rozwiązanie dopuszczalne i jest je łatwo wyznaczyć, to sprawa się bardzo komplikuje, jeżeli przechodzimy do zagadnień typu transportowego, w których pewne trasy są niedopuszczalne lub mają ograniczoną przepustowość. W tym przypadku prosta procedura wyznaczania rozwiązania wyjściowego, np. metoda minimalnego elementu macierzy kosztów, nie daje gwarancji uzyskania rozwiązania dopuszczalnego, a metoda potencjałów zakłada, iż startujemy od rozwiązania bazowego, dopuszczalnego.

W niniejszej pracy przedstawimy jak zmodyfikować metodę potencjałów dla zagadnienia pośrednika z ograniczonymi przepustowościami tras. Pokażemy także jak różne realne warianty zagadnienia pośrednika sprowadzić do tej postaci.

2. Problem pośrednika z limitami podażowo-popytowymi

Klasyczne zagadnienia pośrednika i jego modyfikacje zostały przedstawione w pracach W. Sikory (por [3], [4]). Omówimy obecnie zagadnienia pośrednika z limitami podażowo-popytowymi.

Zakładamy, że pośrednik działa na rynku określonego dobra (np.: pośredniczy w obrocie masłem, węglem itp.). Towar nabywa od m dostawców, przewozi i sprzedaje go n odbiorcom. Pośrednik podpisał także umowę, która zmusza go do nabycia co najmniej określonej części podaży każdego dostawcy oraz zaspokajania także co najmniej pewnej części popytu każdego odbiorcy.

Znamy:

a_i – maksymalną ilość towaru, jaką można kupić u i-tego dostawcy (jego podaż),

b_j – maksymalną ilość towaru, jaką można sprzedać j-temu odbiorcy (jego popyt),

K_I – cenę zakupu i-tego odbiorcy,

p_j – cenę sprzedaży j-temu dostawcy,

c_{ij} – jednostkowy koszt transportu od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy,

e_i – minimalną część podaży i-tego dostawcy, jaka musi być zakupiona,

g_j – minimalną część popytu j-tego odbiorcy, jaka musi być zaspokojona.

Musimy ustalić taki plan zakupu, przewozu i sprzedaży, aby dochód pośrednika był maksymalny.

Dochód = przychód ze sprzedaży – koszt transportu – koszt zakupu.

Zakładamy, że pośrednik nie tworzy zapasów, czyli

Ilość towaru zakupiona = ilości sprzedanej.

Oznaczamy ponadto przez:

x_{ij} – wielkość przewozu na trasie $<i, j>$,

x_i – wielkość zakupu u i-tego dostawcy,

y_j – wielkość sprzedaży j-temu odbiorcy.

Model matematyczny zagadnienia pośrednika z limitami podażowo-popytowymi można zapisać następująco: znajdź takie wartości x_{ij}, x_i, y_j, aby

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \sum_{i=1}^{m} k_i x_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = y_j \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

$$e_i a_i \le x_i \le a_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

$$g_j b_j \le y_j \le b_j \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

Model (1) – (6) oznaczamy jako zadanie W. Sformułowanie zagadnienia pośrednika z limitami podażowo-popytowymi w postaci zadania W nie ułatwia wykorzystania metody potencjałów. Aby ją zastosować, zapiszemy ten problem w postaci zagadnienia pośrednika z ograniczonymi przepustowościami.

3. Zagadnienie pośrednika z ograniczonymi przepustowościami

Zagadnieniem pośrednika z ograniczonymi przepustowościami nazywamy następujące zadanie: znajdź takie x_{ij}, aby

$$\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n+1} d_{ij}x_{ij} \Rightarrow \max, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, \ldots, m+1), \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, \ldots, n+1), \tag{9}$$

$$0 \le x_{ij} \le h_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, m+1; j = 1, \ldots, n+1), \tag{10}$$

Zadanie (7) – (10) oznaczamy krótko jako zadanie P. Jeżeli przyjmiemy, że w zadaniu P:

$$d_{ij} = p_j - k_i - c_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n),$$

$$d_{i,n+1} = d_{i,m+1,j} = d_{m+1,n+1} = 0$$

$$x_{i,n+1} = a_i - x_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$x_{m+1,j} = b_j - y_j \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j, \; b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

$$x_{m+1,n+1} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j,$$

$$h_{i,n+1} = (1 - e_i)\, a_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$h_{m+1,j} = (1 - g_j)\, b_j \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$h_{ij} = \infty \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n),$$

$$h_{m+1,m+1} = \infty,$$

to zadania P i W są równoważne w tym sensie, iż optymalne rozwiązanie zadania P wyznacza optymalne rozwiązanie zadania W. W sensie formalnym zadanie W możemy traktować jako szczególny przypadek zadania P.

Poszczególne wielkości zdefiniowane wyżej można interpretować w tym przypadku następująco:

d_{ij} – jednostkowy dochód dla trasy $<i, j>$,
$x_{i, n+1}$ – niewykorzystana podaż i-tego dostawcy,
$x_{m+1, j}$ – niewykorzystany popyt j-tego odbiorcy,
$x_{m+1, n+1}$ – wielkość łącznego obrotu towarem,
$h_{i, n+1}$ – maksymalne, dopuszczalne niewykorzystanie podaży i-tego dostawcy,
$h_{m+1, j}$ – maksymalne, dopuszczalne niewykorzystanie popytu j-tego odbiorcy.

Pod schemat zadania P da się sprowadzić wiele innych wariantów zagadnienia pośrednika, np.: zagadnienie pośrednika z zapasami. Pośrednik, w tym przypadku, ma na początku okresu zapas początkowy a, natomiast na końcu okresu zapas końcowy b. Zapas początkowy, ze względu na starzenie się towaru, w całości lub w części musi być wymieniony. Stąd magazyn z podażą a raz jest dostawcą, a raz z popytem b jest odbiorcą towaru. Problem ten można sformułować w podobnej postaci jak zadanie W, a następnie sprowadzić do postaci zadania P.

4. *Modyfikacja algorytmu potencjałów dla zagadnienia pośrednika z ograniczonymi przepustowościami (zadania* P)

Aby rozwiązać zadanie P odpowiednio zmodyfikowaną metodą potencjałów, musimy uwzględnić trzy fakty:
- jest trudno wyznaczyć wyjściowe rozwiązanie dopuszczalne,
- mamy ograniczoną przepustowość części tras,
- jest to zagadnienie pośrednika, czyli zadanie ma maksimum.

Modyfikacji podlegają wszystkie trzy podstawowe procedury metody potencjałów:
(a) procedura wyznaczania rozwiązania wyjściowego,
(b) procedura sprawdzania optymalności rozwiązania,
(c) procedura zmiany (poprawy) rozwiązania, o ile nie jest ono optymalne.

Procedura wyznaczania rozwiązania wyjściowego (LIN-MIN)

Procedura LIN-MIN sprowadza się do realizacji następujących kroków:
(a) szukamy w macierzy dochodów $D = [d_{ij}]$ linii (wiersza lub kolumny) z minimalną podażą lub popytem;

(b) w wybranej linii znajdujemy maksymalny element, czyli trasę o maksymalnym dochodzie;
(c) na tej trasie umieszczamy maksymalny przewóz, na jaki pozwala aktualna podaż i popyt oraz przepustowość trasy (dla ostatniej, dopuszczalnej trasy w linii, warunek dotyczący przepustowości może być naruszony);
(d) aktualizujemy podaż i popyt o wielkość przewozu;
(e) wykreślamy w macierzy D wiersz, jeżeli zeruję się podaż bądź kolumnę, jeżeli zeruje się popyt bądź wybraną trasę, jeżeli wykorzystana jest w pełni jej przepustowość,
(f) w zredukowanej macierzy D szukamy linii o minimalnej aktualnej podaży lub popycie, a w niej - dopuszczalnej trasy o maksymalnym dochodzie i wracamy do kroku (c).

Kroki (c) – (f) powtarzamy tak długo, aż wykreślimy w macierzy D wszystkie jej elementy. Jeżeli zeruje się równocześnie podaż i popyt (wystąpi wówczas degeneracja rozwiązania wyjściowego), to wykreślamy tylko wiersz, o ile nie jest on ostatni w zredukowanej macierzy D, wówczas wykreślamy kolumnę. Jeżeli jest to ostatni element, to wykreślamy równocześnie wiersz i kolumnę.

Niech

$$H = \{<i,j> | 0 < h_{ij} < \infty\}$$

będzie zbiorem tras o ograniczonej przepustowości.

Trasę $<i,j>$, dla której $h_{ij} = 0$, nazywamy trasą niedopuszczalną (zablokowaną). Ze względów numerycznych, wygodnie jest dla niej przyjąć, że

$$h'_{ij} = \infty, \text{ a } d'_{ij} = -M,$$

czyli jest trasą dopuszczalną, ale obciążoną karą M, gdzie M – dostatecznie duża liczba.

Podobnie, jeżeli na trasie musimy umieścić przewóz większy od jego przepustowości

$$x_{ij} > h_{ij}, \tag{11}$$

to zmieniamy dochód dla tej trasy

$$d'_{ij} = -M,$$

a więc nadmierny przewóz obciążamy karą M do momentu, aż nie zostanie on zlikwidowany.

Rozwiązanie bazowe zadania P ma $m + n + 1$ tras bazowych, pozostałe są trasami niebazowymi. Jeżeli rozwiązanie bazowe X zadanie P jest niezdegerowane, to wszystkie trasy dzielimy na:

(a) bazowe I rodzaju (B^1), dla których $0 < x_{ij} < h_{ij}$,
(b) bazowe II rodzaju (B^2), dla których $x_{ij} < h_{ij}$,
(c) niebazowe I rodzaju (N^1), dla których $x_{ij} = 0$,
(d) niebazowe II rodzaju (N^2), dla których $x_{ij} = h_{ij}$.

W przypadku degeneracji rozwiązania bazowego, mogą wystąpić trasy bazowe, dla których

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ h_{ij} \end{cases}.$$

Nieujemne rozwiązanie bazowe zadania P nazywamy rozwiązaniem bilansowo-dopuszczalnym. Nie musi ono spełniać warunku ograniczonej przepustowości. Procedura LIN-MIN zapewnia, iż rozwiązanie wyjściowe będzie bilansowo-dopuszczalnym.

Procedura sprawdzania optymalności rozwiązania

Dla każdego wiersza i kolumny macierzy D ustalamy rekurencyjnie zmienne dualne (potencjały) α_i oraz β_i spełniające warunek:

$$\alpha_i + \beta_j = d_{ij}, \qquad <i,j> \in B^1 \cup B^2. \tag{12}$$

Ponieważ zmiennych tych jest $(m + 1 + n + 1)$, czyli więcej niż tras bazowych $(m + n + 1)$, więc przyjmujemy, że $\alpha_1 = 0$

Wskaźniki optymalności Δ_{ij} liczymy zgodnie z wzorem:

$$\Delta_{ij} = d_{ij} - \alpha_i - \beta_j, \quad <i,j> \in N^1 \cup N^2. \tag{13}$$

Jeżeli rozwiązanie bazowe, bilansowo-dopuszczalne X zadania P spełnia warunki:

$$B^2 = \varnothing, \tag{14}$$

$$\Delta_{ij} \le 0, \quad <i,j> \in N^1, \tag{15}$$

$$\Delta_{ij} \le 0, \quad <i,j> \in N^2, \tag{16}$$

to rozwiązanie X jest jego rozwiązaniem optymalnym.

Jeżeli natomiast rozwiązanie bazowe X zadania P spełnia warunki (15) – (16), ale nie spełnia warunku (14), czyli $B^2 \neq \varnothing$, to zadanie P jest sprzeczne. Brak rozwiązania dopuszczalnego, a tym samym optymalnego.

Procedura poprawy rozwiązania

Niech

$$\overline{N}^1 = \left\{ < i, j > \middle| < i, j > \in N^1 \wedge \Delta_{ij} > 0 \right\}$$

oraz

$$\overline{N}^2 = \left\{ < i, j > \middle| < i, j > \in N^2 \wedge \Delta_{ij} < 0 \right\}$$

będą zbiorami tras niebazowych, które nie spełniają kryterium optymalności. Jeżeli $\overline{N}^1 \cup \overline{N}^2 \neq \varnothing$, to ustalamy trasę centralną $<k, l>$ zgodnie z wzorem:

$$\Delta_{k,l} = \max\left\{ \left| \Delta_{i,j} \right| \middle| < i, j > \in \overline{N}^1 \cup \overline{N}^2 \right\}. \tag{17}$$

Trasa centralna $<k, l>$ wraz z elementami zbiorów B^1 i B^2 tworzy cykl $C_{k,l}$, czyli drogą zamkniętą, która ma:
(a) parzystą liczbę elementów,
(b) dokładnie dwa elementy w wierszu lub kolumnie, przez które cykl przechodzi.

Trasy cyklu cechujemy na przemian znakiem „+" (oznaczmy ten zbiór przez L^+) bądź znakiem „–" (oznaczmy go przez L^-). Jeżeli trasa centralna $<k, l> \in N^1$, to cechujemy ją znakiem „+", czyli zwiększamy na niej przewóz, natomiast jeżeli $<k, l> \in N^2$, to cechujemy ją znakiem „–", czyli zmniejszamy na niej przewozy.

Maksymalne zmiany przewozów na trasach należących do cyklu $C_{k,l}$ ustalamy według wzoru:

$$\Delta x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & ,< i, j > \in B^1 \cap L^-, \\ h_{ij} - x_{ij} & ,< i, j > \in B^1 \cap L^+, \\ x_{ij} - h_{ij} & ,< i, j > \in B^2 \cap L^-, \\ x_{ij} & ,< i, j > \in N^2 \cap L^-, \\ h_{ij} & ,< i, j > \in N^1 \cap L^+. \end{cases} \tag{18}$$

Wielkość zmian, jakie dokonamy na trasach cyklu $C_{k,l}$ obliczamy następująco:

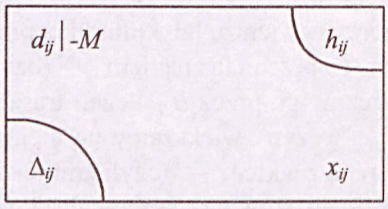
$$\Delta x = \min\left\{ \Delta x_{ij} \middle| < i, j > \in C_{k,l} \right\}. \tag{19}$$

Nowe rozwiązanie bazowe X', bilansowo-dopuszczalne wyznaczamy wzorem:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \Delta x & \text{dla } <i,j> \in L^-, \\ x_{ij} + \Delta x & \text{dla } <i,j> \in L^+, \\ x_{ij} & \text{dla pozostałych tras.} \end{cases} \tag{20}$$

Zmodyfikowana metoda potencjałów (ZMP) generuje ciąg rozwiązań bazowych, bilansowo – dopuszczalnych zadania P. Jeżeli zadania P nie jest sprzeczne, to ostatnie rozwiązanie w tym ciągu będzie dopuszczalne i optymalne. W istocie są to często rozwiązania dopuszczalne zadań pomocniczych P', uzyskanych przez pominięcie ograniczeń przepustowościowych na niektórych trasach, które równocześnie obciążamy karą ($d'_{ij} = -M$). Funkcja celu dla kolejnych rozwiązań przy aktualnych wartościach wag, jest funkcją niemalejącą, chociaż rzeczywiste dochody pośrednika dla kolejnych rozwiązań mogą rosnąć bądź maleć.

Każdemu wyznaczonemu rozwiązaniu bazowemu odpowiada tablica transportowa. W niej, w polu odpowiadającym trasie $<i,j>$, zapisywać będziemy: dochód jednostkowy d_{ij}, przewóz x_{ij}, wskaźnik optymalności Δ_{ij}, przepustowość trasy d_{ij} oraz karę przypisaną danej trasie zgodnie ze schematem:



Trasy bazowe zaznaczamy biorąc przewozy w kwadrat $\boxed{x_{ij}}$
Przewozy dla tras niebazowych wpisujemy tylko, jeżeli są one dodatnie.

5. *Przykład liczbowy*

Pośrednik nabywa towar od dwóch dostawców (D_1 i D_2) oraz sprzedaje dwom odbiorcom (O_1 i O_2). Podaż dostawców, popyt odbiorców jednostkowe koszty transportu (w tys. zł), ceny zakupu (w tys. zł) i ceny sprzedaż (w tys. zł) podano w tabeli 1. Pośrednik podpisał umowę z dostawcami, że zakupi co najmniej 80% ich podaży, natomiast odbiorcy O_1 gwarantuje, że zaspokoi co najmniej 50% jego opytu, a odbiorcy O_2 – 100% popytu. Należy ustalić plan zakupu, przewozu i sprzedaży, maksymalizujący dochód pośrednika.

Aby problem ten rozwiązać stosując ZMP, musimy zapisać dane w postaci jakiej wymaga zadanie P. Obliczamy najpierw:

$$a_3 = \sum_{j=1}^{n} b_j = 24+36 = 60, \qquad b_3 = \sum_{i=1}^{m} a_i = 20+30 = 50,$$

$$d_{11} = 9-7-4 = -2, \qquad d_{12} = 10-7-4 = -1,$$

$$d_{21} = 9-3-5 = 1, \qquad d_{22} = 10-2-5 = 3,$$

$$h_{1,3} = (1-0{,}8)\cdot 20 = 4, \qquad h_{2,3} = (1-0{,}8)\cdot 30 = 6,$$

$$h_{3,1} = (1-0{,}5)\cdot 24 = 12, \qquad h_{3,2} = (1-0{,}8)\cdot 30 = 6,$$

Ponieważ $h_{3,2} = 0$, więc przyjmujemy zgodnie z umową, że

$$h_{3,2} = \infty, \text{ ale} \qquad d_{3,2} = -M = -10.$$

Wszystkie dane niezbędne dla wyznaczania kolejnych rozwiązań bazowych zawiera tabela 2.

Tabela 1

b_j / a_i	O_1 24	O_2 36	k_i
D_1 20	7	7	4
D_2 30	3	2	5
p_j	9	10	

Tabela 2

b_j / a_i	O_1 24	O_2 36	F.O 50
D_1 20	-2	-1	0 (4)
D_2 30	1	3	0 (6)
F.D 60	0 (12)	0 | −10	0

Rozwiązanie bazowe X^1, podane w tabeli 3, wyznaczono wybierając kolejno trasy: <1, 3>, <1, 2>, <2, 2>, <2, 1>, <3, 1> i <3, 3>. Tworzą one następujące zbiory

$$B^1 = \{<1, 2>, <2, 1>, <2, 2>, <3, 3>\},$$

$$B^2 = \{<3, 1>\}, N^2 = \{<1, 3>\}.$$

Pozostałe trasy należą do zbioru N^1. W ostatniej kolumnie tabeli 3 podano wartości zmiennych dualnych a_i, a w ostatnim wierszu – zmiennych b_j. Wyliczone wskaźniki optymalności dla tras niebazowych podano w lewym, dolnym rogu pola. Kryte-

rium optymalności nie spełnia trasa <1, 1> i <1, 3>. Trasą centralną będzie trasa <1, 3>, gdyż

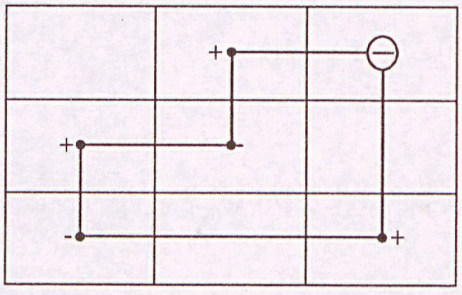
max {|1|, |–7|} = 7.

Trasa centralna <1, 3> generuje cykl zmiany rozwiązania, przedstawiony w tabeli 4.

Tabela 3

a_i \ b_j	24	36	50	α_i
20	-2 1	-1 16	0 4 -7 4	0
30	1 10	3 20	0 6 -11	4
60	0 -10 12 14	-10 -2	0 46	-7
β_j	-3	-1	7	

Tabela 4



Ponieważ

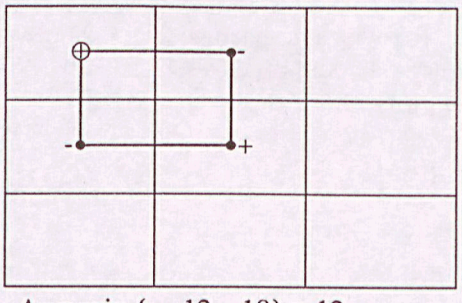
Δx = min {4, , 2, , 20, } = 2,

więc zmieniając przewozy zgodnie ze cyklem otrzymujemy nowe rozwiązanie bazowe X^2 (zawiera je tabela 5). Nowe rozwiązanie X^2 nie spełnia kryterium optymalności, gdyż $\Delta_{11} = 1$. Trasą centralną jest trasa <1, 1>, która generuje cykl zmiany rozwiązania podany w tabeli 6.

Tabela 5

a_i \ b_j	24	36	50	α_i
20	-2 1	-1 18	0 4 2	0
30	1 12	3 18	0 6 -4	4
60	0 12 3 12	-10 -2	0 48	7
β_j	-3	-1	0	

Tabela 6



Δx = min {∞, 12, , 18} = 12

Nowe rozwiązanie bazowe X^3 zawiera tabela 7. Rozwiązanie to spełnia kryterium optymalności, a ponadto zbiór $B^2 = \varnothing$, więc rozwiązanie X^3 jest rozwiązaniem optymalnym naszego zadania. Dochód pośrednika wynosi 60 tys. zł, a plan zakupu, przewozu i sprzedaży oraz łączny obrót towarem podano w tabeli 8.

Tabela 7

a_i \ b_j	24	36	50	α_i
20	-2 12	-1 6	0 4 2	0
30	1 -1	3 30	0 6 -4	4
60	0 12 2 12	0 -10 -9	0 48	0
β_j	-2	-1	0	

Tabela 8

x_{ij}	O_1	O_2	x_i
D_1	12	6	18
D_2	-	30	30
y_j	12	36	48

6. Podsumowanie

Metoda ZMP, ze względu na strukturę i rozmiary zadania P, jest bardziej efektywną procedurą jego rozwiązywania niż np. metoda simpleks. Pod schemat zadania P można sprowadzić także wiele wariantów zagadnienie pośrednika. Elementy procedur zastosowanych w metodzie ZMP możemy wykorzystać, gdy pewne składniki są nieliniowe np.: jeżeli koszt zakupu lub przychód jest funkcją nieliniową aproksymowaną przez funkcję odcinkowo-liniową.

Literatura

[1] Buga J., Nykowski I., *Zagadnienia transportowe w programie liniowym*, PWN, Warszawa 1974.

[2] Dantzig G.B., *Application of the Simplex Method to a Transportation Problem*, w: *Activity Analysis of Production and Allocation*, red. T. C. Koopmans, Wiley, New York 1951.

[3] *Ekonometria i badania operacyjne*, red. B. Guzik, MD nr 50, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 1999.

[4] Sikora W., *Modele i metody optymalizacji i dystrybucji dóbr*, Zeszyt Naukowy nr 123, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 1993.