Część druga

Ekonomia matematyczna

Paweł KLIBER, Piotr MAĆKOWIAK, Krzysztof MALAGA

Katedra Ekonomii Matematycznej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

KONWERGENCJA I NIERÓWNOŚCI REGIONALNE W POLSCE. ANALIZA W KATEGORIACH NEOKLASYCZNYCH MODELI WZROSTU[1]

Wstęp

Celem artykułu jest analiza nierówności regionalnych[2] w Polsce na podstawie neoklasycznych modeli wzrostu Solowa-Swana (1956) i Mankiwa-Romera-Weila (1992).

Pierwszy punkt zawiera opis modeli wzrostu, definicje stacjonarnych stanów równowagi oraz miar tempa zbieżności ścieżek wzrostu PKB na zatrudnionego do stacjonarnych stanów równowagi[3]. W punkcie drugim przedstawiono metody kalibracji parametrów modeli wzrostu, które wynikają ze specyfiki neoklasycznych modeli wzrostu, a w trzecim omówiono wyniki empiryczne, otrzymane na podstawie obu modeli wzrostu, oddzielnie dla regionów i dla całej gospodarki Polski.

---

[1] Artykuł jest syntezą wyników badań własnych, przedstawionych w artykułach [5]-[10].

[2] W artykule przez pojęcie regionów rozumiemy województwa powstałe wskutek reformy administracyjnej Polski przeprowadzonej w 1998 roku.

[3] Przedstawione w artykule metody i techniki analizy nierówności regionalnych mogą być stosowane dla dowolnego kraju. Wyniki empiryczne dla Polski są argumentem w dyskusji nad przydatnością neoklasycznych modeli wzrostu do analizy realnych i długookresowych tendencji w odniesieniu do nierówności regionalnych.

Nierówności regionalne opisywane będą w następującej sekwencji: opis zróżnicowania parametrów modeli wzrostu, analiza porównawcza rzeczywistych i modelowych (w stanach stacjonarnych) wartości PKB na zatrudnionego, ocena procesów zbieżności ścieżek wzrostu PKB na zatrudnionego z punktu widzenia tempa zbieżności oraz okresów połowicznej zbieżności do stacjonarnych stanów równowagi dla poszczególnych regionów i dla gospodarki Polski oraz analiza rozkładu rzeczywistych i modelowych wartości PKB na zatrudnionego w polskich regionach w stosunku do PKB na zatrudnionego w Polsce.

W zakończeniu dokonano oceny uzyskanych wyników oraz przydatności neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego do analizy konwergencji i nierówności regionalnych w Polsce.

1. Neoklasyczne modele wzrostu[4]

1.1. Model wzrostu Solowa-Swana

W artykule rozpatrywana jest gospodarka regionu i, w której równowagę na rynku dóbr i usług w momencie t opisuje równanie bilansowe:

$$Y_i(t) = C_i(t) + I_{K_i}(t), \tag{1}$$

gdzie:

$i = 1, \ldots, 16$ regiony (województwa),
$Y_i(t)$ – produkt krajowy brutto w regionie i w momencie t,
$C_i(t)$ – zagregowana konsumpcja w regionie i w momencie t,
$I_{K_i}(t)$ – inwestycje brutto w kapitał fizyczny w regionie i w momencie t.

Zakładamy, że konsumpcja i oszczędności są proporcjonalne do produkcji:

$$C_i(t) = c_i Y_i(t), \tag{2}$$

[4] W artykule wykorzystano standardowe modele wzrostu Solowa-Swana i Mankiwa-Romera-Weila, które pozostają ciągle układem odniesienia dla prac nad konwergencją gospodarczą w układzie państw i regionów. W modelach tych abstrahuje się między innymi od jakiejkolwiek mobilności czynników produkcji oraz przepływów tychże czynników między regionami. Modyfikacje modeli wzrostu polegające na uwzględnieniu mobilności czynników produkcji, rozpatrywania regionów jako gospodarek otwartych wchodzących we wzajemne relacje gospodarcze między sobą, są z teoretycznego punktu widzenia możliwe (zob. [2]). W niniejszym artykule nie wzięto ich pod uwagę, głównie ze względu na brak danych statystycznych, rejestrujących zjawiska tego rodzaju dla gospodarki Polski.

$$S_i(t) = s_{K_i} Y_i(t), \tag{3}$$

gdzie:

$S_i(t)$ – oszczędności w regionie i w momencie t,
$s_{K_i} \in [0, 1]$ – stopa oszczędności w regionie i,
$c_i \in [0, 1]$ – stopa konsumpcji w regionie i.

Zakładamy, że zachodzi równość $s_{K_i} + c_i = 1$, a oszczędności przeznaczane są na inwestycje w kapitał fizyczny:

$$S_i(t) = I_{K_i}(t). \tag{4}$$

Inwestycje netto w kapitał fizyczny są różnicą między inwestycjami brutto oraz tą częścią kapitału fizycznego, która ulega deprecjacji:

$$\frac{dK_i(t)}{dt} = I_{K_i}(t) - \rho K_i(t), \tag{5}$$

gdzie:

ρ – stopa deprecjacji kapitału fizycznego (jednakowa dla wszystkich regionów),
$K_i(t)$ – zasób kapitału fizycznego w regionie i w momencie t.

Zakładamy, że technologia produkcji w poszczególnych regionach opisywana jest za pomocą neoklasycznych funkcji produkcji Cobba-Douglasa[5]:

$$Y_i(t) = F_i(K_i(t), N_i(t)) = A_i K_i^{\alpha_i}(t) N_i^{1-\alpha_i}(t), \tag{6}$$

gdzie:

A_i – stopa całkowitej produktywności czynników produkcji w regionie i,
$N_i(t)$ – liczba zatrudnionych w regionie i w momencie t,
$\alpha_i \in (0, 1)$ – elastyczność produkcji względem kapitału fizycznego w regionie i.

Zakładamy, że stopa wzrostu liczby zatrudnionych rośnie ze stałym tempem[6]:

[5] W artykule zastosowano neoklasyczną funkcję produkcji z postępem technicznym neutralnym w sensie Hicksa, która jest rosnąca, dwukrotnie różniczkowalna, wklęsła, dodatnio jednorodna stopnia pierwszego i spełnia warunki Inady.

[6] W związku z wysokim bezrobociem w Polsce, w okresie objętym analizą, dalsze wnioskowanie prowadzone jest w przeliczeniu na zatrudnionego. W niektórych wojewódz-

$$\eta_i = \frac{dN_i(t)}{dt} \cdot \frac{1}{N_i(t)}. \tag{7}$$

Z równań (1)-(6) wynika równanie dynamiki kapitału fizycznego:

$$\frac{dK_i(t)}{dt} = s_{K_i} A_i K_i^{\alpha_i}(t) N_i^{1-\alpha_i}(t) - \rho K_i(t). \tag{8}$$

Równanie dynamiki kapitału fizycznego w przeliczeniu na zatrudnionego przyjmuje postać:

$$\frac{dk_i(t)}{dt} = s_{K_i} A_i k_i^{\alpha_i}(t) - (\eta_i + \rho) k_i(t), \tag{9}$$

gdzie:

$y_i(t) = A_i k_i^{\alpha_i}(t)$ – produkcja na zatrudnionego w regionie i w momencie t,

$k_i(t) = \frac{K_i(t)}{N_i(t)}$ – kapitał fizyczny na zatrudnionego w regionie i w momencie t.

Ze względu na asymptotyczne własności modelu wzrostu Solowa-Swana, przedmiotem szczególnego zainteresowania będą wartości kapitału fizycznego na zatrudnionego i PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi w poszczególnych regionach i w Polsce. Wartość kapitału fizycznego w stacjonarnym stanie równowagi w regionie i wyznaczamy z równania:

$$\left.\frac{dk_i(t)}{dt}\right|_{k_i(t)=\overset{*}{k}_i} = 0 \Leftrightarrow s_{K_i} A_i \overset{*}{k}_i^{\alpha_i}(t) = (\eta_i + \rho) \overset{*}{k}_i(t). \tag{10}$$

Ostatecznie w wyniku prostych przekształceń otrzymujemy analityczne postaci wartości kapitału fizycznego na zatrudnionego i PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi w regionie i:

$$\overset{*}{k}_i = \left(\frac{A_i s_{K_i}}{n_i + \rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_i}}, \qquad \overset{*}{y}_i = \left(\frac{A_i s_{K_i}}{n_i + \rho}\right)^{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}. \tag{11}$$

---

twach stopa wzrostu zatrudnienia jest ujemna. Z równań (8) i (21) wynika, że zbyt wysoka, ujemna stopa wzrostu zatrudnienia powoduje, że w neoklasycznych modelach wzrostu Solowa-Swana i Mankiwa-Romera-Weila nie istnieją stacjonarne stany równowagi.

W celu zdefiniowania miar tempa zbieżności regionalnych ścieżek wzrostu lub gospodarki Polski do stacjonarnych stanów równowagi posłużono się stopą wzrostu produkcji na zatrudnionego:

$$\gamma_{y_i(t)} = \frac{dy_i(t)}{dt} \cdot \frac{1}{y_i(t)} = \alpha_i \frac{dk_i(t)}{dt} \cdot \frac{1}{k_i(t)} = \alpha_i \gamma_{k_i(t)}, \tag{12}$$

gdzie: $\gamma_{k_i(t)} = s_i A_i k_i^{\alpha_i - 1}(t) - (\eta_i + \rho)$ jest stopą wzrostu kapitału na zatrudnionego.

W wyniku liniowo-logarytmicznej aproksymacji stopy wzrostu PKB na zatrudnionego, w otoczeniu stacjonarnego stanu równowagi, otrzymujemy:

$$\gamma_{y_i(t)} \cong -[(1-\alpha_i)(\eta_i + \rho)](\ln y_i(t) - \ln \overset{*}{y}_i). \tag{13}$$

Jako miarę tempa zbieżności ścieżki wzrostu gospodarczego w regionie *i* lub w polskiej gospodarce przyjmujemy[7]:

$$\beta_i^{SOL} = -\frac{\gamma_{k_i(t)}}{\ln \frac{k_i(t)}{\overset{*}{k}_i}} = (1-\alpha_i)(\eta_i + \rho). \tag{14}$$

Współczynnik β_i^{SOL} określa, o jaki procent w jednostce czasu zmniejsza się odległość między wartością produkcji na zatrudnionego w momencie *t*, a wartością produkcji na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi[8].

Z równania (13) wynika, że tempo zbieżności do stacjonarnych stanów równowagi rośnie wraz ze wzrostem realnej stopy deprecjacji kapitału fizycznego $(\eta_i + \rho)$ i maleje, ze wzrostem elastyczności PKB względem kapitału α_i.

Na podstawie rozwiązania równania różniczkowego (12) można wyznaczyć okres połowicznej zbieżności do stacjonarnego stanu równowagi:

$$t_i^{SOL} = \frac{\ln 2}{\beta_i^{SOL}}, \tag{15}$$

określający liczbę lat niezbędnych do zmniejszenia o połowę odległości między wartością produkcji na zatrudnionego w momencie *t* a wartością produkcji na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi.

---

[7] Prędkość zbieżności ścieżki wzrostu PKB na zatrudnionego zależy od odległości od stacjonarnego stanu równowagi.

[8] W standardowym modelu wzrostu Solowa-Swana stacjonarny stan równowagi jest globalnie stabilny.

1.2. Model wzrostu Mankiwa-Romera-Weila

Przyjmujemy założenia opisane równaniami (1) i (2). Zakładamy, że oszczędności w regionie i w momencie t równe są sumie inwestycji w kapitał fizyczny i w kapitał ludzki:

$$S_i(t) = I_{K_i}(t) + I_{H_i}(t). \tag{16}$$

Dynamikę akumulacji kapitału fizycznego i kapitału ludzkiego opisuje układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \frac{dK_i(t)}{dt} &= I_{K_i}(t) - \rho K_i(t) = s_{K_i} Y_i(t) - \rho K_i(t), \\ \frac{dH_i(t)}{dt} &= I_{H_i}(t) - \rho H_i(t) = s_{H_i} Y_i(t) - \rho H_i(t), \end{aligned} \tag{17}$$

gdzie:

ρ – stopa deprecjacji kapitału (ludzkiego i fizycznego),
$I_{K_i}(t)$ – inwestycje w kapitał fizyczny w regionie i w momencie t,
$I_{H_i}(t)$ – inwestycje w kapitał ludzki w regionie i w momencie t,
s_{K_i} – stopa inwestycji w kapitał fizyczny w regionie i,
s_{H_i} – stopa inwestycji w kapitał ludzki w regionie i.

Technologia produkcji w poszczególnych regionach opisywana jest neoklasyczną funkcją produkcji o postępie technicznym neutralnym w sensie Hicksa:

$$Y_i(t) = F_i(K_i(t), N_i(t)) = A_i K_i^{\alpha_i}(t) H_i^{\beta_i}(t) N_i^{1-\alpha_i+\beta_i}(t), \tag{18}$$

gdzie:

A_i – stopa całkowitej produktywności czynników produkcji w regionie i,
$N_i(t)$ – liczba zatrudnionych w regionie i w momencie t,
$K_i(t)$ – zasób kapitału fizycznego w regionie i w momencie t,
$H_i(t)$ – zasób kapitału ludzkiego w regionie i w momencie t.

Zakładamy, że liczba zatrudnionych rośnie ze stałym tempem:

$$\frac{dN_i(t)}{dt} \cdot \frac{1}{N_i(t)} = \eta_i. \tag{19}$$

Z układu równań (16)-(18) wynika układ równań różniczkowych, opisujący dynamikę kapitału fizycznego i ludzkiego:

$$\frac{dK_i(t)}{dt} = s_{K_i} A_i K_i^{\alpha_i}(t) H_i^{\beta_i}(t) N_i^{1-\alpha_i-\beta_i}(t) - \rho K_i(t),$$
$$\frac{dH_i(t)}{dt} = s_{H_i} A_i K_i^{\alpha_i}(t) H_i^{\beta_i}(t) N_i^{1-\alpha_i-\beta_i}(t) - \rho H_i(t). \tag{20}$$

Akumulację kapitału fizycznego i ludzkiego w przeliczeniu na zatrudnionego opisuje układ równań różniczkowych:

$$\frac{dk_i(t)}{dt} = s_{K_i} A_i k_i^{\alpha_i}(t) h_i^{\beta_i}(t) - (\eta_i + \rho) k_i(t),$$
$$\frac{dh_i(t)}{dt} = s_{H_i} A_i k_i^{\alpha_i}(t) h_i^{\beta_i}(t) - (\eta_i + \rho) h_i(t). \tag{21}$$

gdzie:

$y_i(t) = f_i(k_i(t)) = A_i k_i^{\alpha_i}(t) h_i^{\beta_i}(t)$ – produkcja na zatrudnionego w regionie i w momencie t,

$k_i(t) = \frac{K_i(t)}{N_i(t)}$ – kapitał fizyczny na zatrudnionego w regionie i w momencie t,

$h_i(t) = \frac{H_i(t)}{N_i(t)}$ – kapitał ludzki na zatrudnionego w regionie i w momencie t.

W wyniku prostych przekształceń można wyznaczyć analitycznie wartości kapitału fizycznego na zatrudnionego, kapitału ludzkiego na zatrudnionego i PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi w regionie i lub w gospodarce Polski:

$$\overset{*}{k}_i = \left(\frac{A_i s_{K_i}^{\beta_i} s_{H_i}^{1-\beta_i}}{n_i + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_i-\beta_i}}, \qquad \overset{*}{h}_i = \left(\frac{A_i s_{K_i}^{1-\alpha_i} s_{H_i}^{\alpha_i}}{n_i + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_i-\beta_i}}, \tag{22}$$
$$\overset{*}{y}_i = \left(\frac{A_i s_{K_i}^{\alpha_i} s_{H_i}^{\beta_i}}{n_i + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_i-\beta_i}},$$

W celu zdefiniowania miar tempa zbieżności ścieżek wzrostu gospodarczego w regionach i w polskiej gospodarce skorzystano z definicji stopy wzrostu produkcji na zatrudnionego w modelu Mankiwa-Romera-Weila z neoklasyczną funkcją produkcji w postaci intensywnej: $f_i(k_i(t), h_i(t)) = A_i k_i^{\alpha_i}(t) h_i^{\beta_i}(t)$:

$$\gamma_{y_i(t)} = \frac{dy_i(t)}{dt} \cdot \frac{1}{y_i(t)} = \alpha_i \frac{dk_i(t)}{dt} \cdot \frac{1}{k_i(t)} + \beta_i \frac{dh_i(t)}{dt} \cdot \frac{1}{h_i(t)}. \tag{23}$$

W wyniku liniowo-logarytmicznej aproksymacji stopy wzrostu produkcji na zatrudnionego w otoczeniu stanu równowagi otrzymujemy równanie:

$$\gamma_{y_i(t)} \cong -[(1-\alpha_i-\beta_i)(\eta_i+\rho)](\ln y_i(t) - \ln y_i^*), \tag{24}$$

na podstawie którego definiujemy miarę tempa zbieżności ścieżki wzrostu produkcji na zatrudnionego do stacjonarnego stanu równowagi w regionie *i*:

$$\beta_i^{\mathrm{MRW}} = (1-\alpha_i-\beta_i)(\eta_i+\rho). \tag{25}$$

Tempo zbieżności ścieżki wzrostu PKB na zatrudnionego w regionie *i* do stacjonarnego stanu równowagi, rośnie ze wzrostem stopy deprecjacji kapitału ludzkiego i fizycznego, a maleje ze wzrostem elastyczności PKB na zatrudnionego względem kapitału ludzkiego i fizycznego. Zdefiniowana miara określa, o ile w przybliżeniu procent zmniejsza się w jednostce czasu odległość między wartością PKB na zatrudnionego w regionie *i* w momencie *t* a wartością PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi w regionie *i*.

Na podstawie rozwiązania równania różniczkowego (23) można wyprowadzić miarę okresu połowicznej zbieżności w regionie *i*:

$$t_i^{\mathrm{MRW}} = \frac{\ln 2}{\beta_i^{\mathrm{MRW}}}, \tag{26}$$

która określa liczbę lat niezbędnych do zmniejszenia o połowę różnicy między wartością PKB na zatrudnionego w regionie *i* w momencie *t*, a wartością PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi.

2. Metody kalibracji parametrów modeli wzrostu

Elastyczności produkcji względem kapitału fizycznego w modelu wzrostu Solowa wyznaczono z warunków koniecznych maksymalizacji zysku:

$$\Pi_i(K_i(t), L_i(t)) = \{A_i K_i^{\alpha_i}(t) L_i^{1-\alpha_i}(t) - r_i K_i(t) - w_i L_i(t)\} \to \max,$$
$$K_i(t), L_i(t) \geqslant 0 \tag{27}$$

zatem:

$$(1-\alpha_i)=\frac{w_i}{A_i K_i^{\alpha_i}(t) L_i^{-\alpha_i}(t)}=\frac{w_i L_i(t)}{A_i K_i^{\alpha_i}(t) L_i^{1-\alpha_i}(t)}=\frac{w_i L_i(t)}{Y_i(t)}, \tag{28}$$

$$\alpha_i=1-\frac{w_i L_i(t)}{Y_i(t)}, \tag{29}$$

gdzie w_i oznacza przeciętną płacę w regionie i.

W przypadku modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila założono, że elastyczności PKB względem kapitału ludzkiego i zatrudnienia są sobie równe. Elastyczności PKB względem kapitału fizycznego wyznaczono tak jak w modelu Solowa-Swana, natomiast elastyczności PKB względem kapitału ludzkiego wyznaczono ze wzoru:

$$\beta_i=\frac{1}{2}\cdot\frac{w_i L_i(t)}{Y_i(t)}. \tag{30}$$

Wartości stopy całkowitej produktywności czynników produkcji w regionie i wyznaczono jako funkcję początkowego stanu gospodarki tak, aby zachodziły równości:

w modelu Solowa-Swana

$$A_i=\frac{y_i(0)}{k_i^{\alpha_i}(0)}, \tag{31}$$

w modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila

$$A_i=\frac{y_i(0)}{k_i^{\alpha_i}(0)\, h_i^{\beta_i}(0)}. \tag{32}$$

W celu porównania rzeczywistego tempa zbieżności ścieżki wzrostu PKB na zatrudnionego do stacjonarnego stanu równowagi, z tempem zbieżności wynikającym z okresu połowicznej zbieżności (wyznaczonego na podstawie *zlinearyzowanych* równań akumulacji kapitału fizycznego i/lub ludzkiego) rozwiązano numerycznie równanie (8) w modelu Solowa-Swana i (20) w modelu Mankiwa-Romera-Weila.

Jako wyjściowy przyjęto 1999 rok. W wyniku zastosowania metody Rungego-Kutty otrzymano trajektorie kapitału fizycznego na zatrudnionego i/lub kapitału ludzkiego na zatrudnionego, co na podstawie funkcji produkcji

pozwoliło ostatecznie otrzymać trajektorie PKB na zatrudnionego. Następnie wyznaczano okresy, w których następowało zmniejszenie odległości PKB na zatrudnionego od wartości produkcji w stacjonarnych stanach równowagi o połowę.

3. Analiza wyników empirycznych otrzymanych dla poszczególnych regionów i gospodarki Polski[9]

3.1. Wyniki otrzymane na podstawie modelu wzrostu Solowa-Swana[10]

3.1.1. Nierówności regionalne

W tabeli 1 podano wartości parametrów, które są konieczne do wyznaczenia wartości produkcji na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi w modelu wzrostu Solowa-Swana[11].

Największy wpływ na wartość PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi mają parametry elastyczności produkcji względem kapitału fizycznego α_i. Wartości tego parametru różnią się znacznie między regionami. Najniższe jego wartości otrzymano dla regionów relatywnie biednych LUL (0,3167), PKR (0,3504) i SWI (0,3551) natomiast najwyższe dla regionów relatywnie bogatych ZAC (0,6039), LUS (0,5966) i DOL (0,5956). W innych regionach wartości parametru α_i w 1999 roku mieściły się w przedziale [0,4, 0,55]. Przypomnijmy, że parametr ten interpretujemy jako udział wynagrodzenia z tytułu kapitału fizycznego w PKB danego regionu lub w PKB

[9] W wyniku reformy administracyjnej przeprowadzonej w Polsce w 1998 roku, powstało 16 województw zamiast istniejących 49 województw. Według nomenklatury stosowanej w Unii Europejskiej nowe województwa odpowiadają regionom według nomenklatury NUTS2. Wybór 1999 roku jako wyjściowego roku prezentowanych w artykule wyników znajduje uzasadnienie w dostępności danych statystycznych, które opisują pierwsze wyniki przeprowadzonej reformy administracyjnej. Uzyskane wyniki, głównie dla 1999 roku, należy traktować jako swoisty bilans otwarcia przed przystąpieniem Polski do Unii Europejskiej i zarazem układ odniesienia dla dalszych prac prowadzonych przez nas nad oceną wpływu wejścia Polski do Unii Europejskiej na konwergencję i nierówności regionalne w Polsce.

[10] W dalszej części artykułu ograniczono się do analizy wyników otrzymanych dla PKB na zatrudnionego w polskich regionach i w gospodarce Polski i pominięto wyniki otrzymane dla kapitału fizycznego na zatrudnionego i kapitału ludzkiego na zatrudnionego.

[11] We wszystkich tabelach podanych w artykule, dla poszczególnych regionów, pogrubiono te wartości liczbowe, które przewyższają przeciętny poziom dla gospodarki Polski.

Tabela 1. Wartości parametrów w modelu wzrostu Solowa-Swana

Parametry	POL	DOL	KUJ	LUL	LUS	LOD	MAL	MAZ	OPL	PKR	PDL	POM	SLA	SWI	WRM	WIE	ZAC
A_i	90,5	51,9	79,2	789,7	48,6	133,6	194,0	144,0	72,2	585,6	340,7	67,4	78,8	559,3	86,6	80,8	44,2
α_i	0,5382	0,5956	0,5545	0,3167	0,5966	0,4992	0,4655	0,5079	0,5454	0,3504	0,3999	0,5651	0,5600	0,3551	0,5340	0,5541	0,6039
$\eta_i+\rho$	0,0498	0,0484	0,0502	0,0483	0,0507	0,0453	0,0535	0,0507	0,0473	0,0520	0,0489	0,0537	0,0457	0,0484	0,0521	0,0519	0,0508
s_{K_i}	0,2048	**0,2215**	0,1586	0,1602	0,2016	0,1731	0,1859	**0,2874**	0,1985	0,1710	0,1645	0,1959	0,1892	0,1773	0,1413	0,2002	0,1629

Oznaczenia:
POL – Polska, DOL – Dolnośląskie, KUJ – Kujawsko-Pomorskie, LUL – Lubelskie, LUS – Lubuskie, LOD – Łódzkie, MAL – Małopolskie, MAZ – Mazowieckie, OPL – Opolskie, PKR – Podkarpackie, PDL – Podlaskie, POM – Pomorskie, SLA – Śląskie, SWI – Świętokrzyskie, WRM – Warmińsko-Mazurskie, WIE – Wielkopolskie, ZAC – Zachodniopomorskie,

A_i – stopa całkowitej produktywności czynników produkcji, α_i – elastyczność PKB względem kapitału fizycznego, $\eta_i+\rho$ – realna stopa deprecjacji kapitału fizycznego, s_{K_i} – stopa inwestycji w kapitał fizyczny w regionie i lub w Polsce.

Tabela 2. Wartości PKB na zatrudnionego w 1999 roku i w stacjonarnych stanach równowagi w modelu wzrostu Solowa-Swana

Zmienne	POL	DOL	KUJ	LUL	LUS	LOD	MAL	MAZ	OPL	PKR	PDL	POM	SLA	SWI	WRM	WIE	ZAC
y_i^f	43 159	**49 772**	42 084	27 326	**45 608**	38 340	35 984	**55 938**	40 646	27 908	30 606	**49 638**	**51 376**	29 760	40 180	**43 973**	**50 680**
y_i^{*SOL}	89 675	**163 296**	76 489	30 329	**116 849**	66 943	56 478	**145 786**	68 428	34 617	37 263	86 050	**124 476**	37 219	45 117	**101 344**	84 425

y_i^f – wartość PKB na zatrudnionego w 1999 roku, y_i^{*SOL} – wartość PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi w regionie i lub w Polsce.

w Polsce. Niskie (wysokie) wartości tego parametru oznaczają wysokie (niskie) udziały dochodu z tytułu pracy w PKB danego regionu lub w gospodarce Polski.

Drugim z parametrów, mającym duży wpływ na wartości PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi, jest całkowita produktywność czynników produkcji, oznaczana symbolem A_i.

Ze względu na sposób szacowania tego parametru regiony o wysokich (niskich) wartościach parametru α_i były regionami o niskich (wysokich) wartościach parametru A_i: LUL (789,7) i SWI (559,3) oraz ZAC (44,2) i LUS (48,6).

Dwa pozostałe parametry opisują wielkości statystyczne. Parametr $\eta_i + \rho$ – opisujący realną stopę deprecjacji kapitału fizycznego, ze względu na założenie o stałej 5% stopie deprecjacji kapitału fizycznego, informuje o stopie wzrostu zatrudnienia, która w gospodarce Polski w 1999 roku była, w połowie regionów ujemna, a w drugiej połowie regionów, dodatnia. Parametr s_{K_i}, określa udział inwestycji w kapitał fizyczny w PKB w poszczególnych regionach i w Polsce. Największe jego wartości stwierdzono w województwie MAZ (0,2874), a najniższe w województwach WRM (0,1413), KUJ (0,1586) i PDL (0,1645). W tabeli pogrubiono wartości parametrów przewyższających średni poziom dla gospodarki Polski w 1999 roku.

W tabeli 2 zawarto rzeczywiste wartości PKB na zatrudnionego oraz wartości PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi w modelu wzrostu Solowa-Swana.

Najwyższe wartości PKB na zatrudnionego w stanach stacjonarnych otrzymano dla regionów relatywnie bogatych: DOL (163 296) oraz MAZ (145 786). Najniższe wartości PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi odnotowano w regionach relatywnie biednych LUL (30 329), PKR (34 617) i PDL (37 263).

Na otrzymane wyniki największy wpływ miały stopy inwestycji w kapitał fizyczny – niskie (wysokie) w regionach biednych (bogatych), a także wartości pozostałych parametrów.

W tabeli 2 wyróżniono województwa, w których wartości PKB na zatrudnionego były wyższe niż wartość PKB na zatrudnionego dla gospodarki Polski. Z wyznaczonych wartości PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi wynika, że województwa względnie ubogie pozostaną w długim okresie ubogie, natomiast województwa relatywnie bogate w 1999 roku zachowają swoją pozycję wśród polskich regionów. W siedmiu województwach poziom PKB na zatrudnionego w 1999 roku był wyższy niż poziom przeciętny w Polsce (DOL, LUS, MAZ, POM, SLA, WIE, ZAC). W stacjonarnym stanach równowagi ponadprzeciętny poziom PKB na zatrudnionego utrzyma się w pięciu regionach: DOL, LUS, MAZ, SLA i WIE.

Tabela 3. Elastyczności PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi względem parametrów modelu

Elastyczności	POL	DOL	KUJ	LUL	LUS	LOD	MAL	MAZ	OPL	PKR	PDL	POM	SLA	SWI	WRM	WIE	ZAC
$e^{*y_i}_{A_i}$	2,165	**2,473**	**2,245**	1,464	**2,479**	1,997	1,871	2,032	**2,200**	1,539	1,666	**2,299**	**2,273**	1,551	2,146	**2,243**	**2,525**
$e^{*y_i}_{\alpha_i}$	14,939	**19,917**	**15,427**	5,340	**19,297**	12,414	10,615	14,061	**15,076**	6,280	7,824	**16,443**	**16,738**	6,509	13,425	**16,001**	**19,072**
$e^{*y_i}_{\eta_i+\rho}$	−1,165	**−1,473**	**−1,245**	−0,464	−1,479	−0,997	−0,871	−1,032	**−1,200**	−0,539	−0,666	**−1,299**	**−1,273**	−0,551	−1,146	**−1,243**	**−1,525**
$e^{*y_i}_{s_i}$	1,165	**1,473**	**1,245**	0,464	1,479	0,997	0,871	1,032	**1,200**	0,539	0,666	**1,299**	**1,273**	0,551	1,146	**1,243**	**1,525**

$e^{*y_i}_{z_i}$ – elastyczność PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi względem parametru z_i, gdzie $z_i = \{A_i, \alpha_i, \eta_i + \rho, s_i\}$ oznacza odpowiednio: stopę całkowitej produktywność czynników produkcji, elastyczność PKB względem kapitału fizycznego, stopę realnej deprecjacji kapitału fizycznego na zatrudnionego, stopę inwestycji w kapitał fizyczny w regionie i lub w Polsce.

Tabela 4. Rozkłady PKB na zatrudnionego w regionach względem PKB na zatrudnionego w Polsce według wartości rzeczywistych i modelowych

Ilorazy	DOL	KUJ	LUL	LUS	LOD	MAL	MAZ	OPL	PKR	PDL	POM	SLA	SWI	WRM	WIE	ZAC
y_i^f / y^f	**1,153**	0,975	0,633	**1,057**	0,888	0,834	**1,296**	0,942	0,647	0,709	**1,150**	**1,190**	0,690	0,931	**1,019**	**1,174**
y_i^{*SOL} / y^{*SOL}	**1,821**	0,853	0,338	**1,303**	0,747	0,630	**1,626**	0,763	0,386	0,416	0,960	**1,388**	0,415	0,503	**1,130**	0,941

y_i^f / y^f – iloraz PKB na zatrudnionego w regionie i i w Polsce w 1999 roku.

y_i^{*SOL} / y^{*SOL} – iloraz PKB na zatrudnionego w regionie i i w Polsce w stacjonarnym stanie równowagi.

Aby ocenić wpływ zmian wartości parametrów modelu na poziom PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi, obliczono elastyczności PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi względem parametrów modelu. Wyniki obliczeń podano w tabeli 3.

Zgodnie z oczekiwaniami największy wpływ na zmiany PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi wywiera parametr α_i. Elastyczności PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi względem parametrów α_i są kilkakrotnie wyższe niż względem pozostałych parametrów.

Na przykład dla gospodarki Polski, 1% wzrost elastyczności PKB względem kapitału fizycznego spowodowałby 14,94% wzrost PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi, 1% wzrost całkowitej produktywności czynników produkcji prowadziłby do 2,17% wzrostu PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi, z kolei 1% wzrost stopy realnej deprecjacji kapitału fizycznego na zatrudnionego albo stopy inwestycji skutkowałby 1,17% spadkiem albo wzrostem PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi. Wartości elastyczności PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi względem parametrów modelu wzrostu Solowa-Swana można też rozpatrywać jako miary błędów, jakie można popełnić wskutek błędnej kalibracji parametrów modelu.

W tabeli 4 podano ilorazy PKB na zatrudnionego w poszczególnych regionach i PKB na zatrudnionego w Polsce oddzielnie dla 1999 roku i w stacjonarnych stanach równowagi.

Regionami, które w stacjonarnych stanach równowagi pogorszą swoją pozycję wyjściową z 1999 roku będą: KUJ, LUL, LOD, MAL, OPL, PKR, PDL, POM, SWI, WRM oraz ZAC. Pozostałe regiony poprawią swoją względną pozycję. Regionami, które w świetle otrzymanych wyników znacznie poprawią udział PKB na zatrudnionego w PKB na zatrudnionego w Polsce w stacjonarnych stanach równowagi będą DOL, MAZ, LUS, SLA i WIE.

3.1.2. Zbieżność ścieżek wzrostu do stacjonarnych stanów równowagi

W tabeli 5 podano wartości miar tempa zbieżności ścieżek wzrostu polskich regionów i gospodarki Polski do stacjonarnych stanów równowagi. Wartości współczynników prędkości zbieżności do stanów stacjonarnych zawierają się w przedziale od 2% do około 3,4%. Najwyższe wartości tych współczynników otrzymano dla PKR (3,38%), LUL (3,30%), SWI (3,12%) i PDL (2,93%), natomiast najniższe wartości otrzymano dla DOL (1,96%), SLA (2,01%) i ZAC (2,01%).

Tabela 5. Tempo zbieżności ścieżek wzrostu do stacjonarnych stanów równowagi i okresy połowicznej zbieżności

	POL	DOL	KUJ	LUL	LUS	LOD	MAL	MAZ	OPL	PKR	PDL	POM	SLA	SWI	WRM	WIE	ZAC
β_i^{SOL}	0,0230	0,0196	0,0224	0,0330	0,0205	0,0227	0,0286	0,0249	0,0215	0,0338	0,0293	0,0234	0,0201	0,0312	0,0243	0,0231	0,0201
t_i^{SOL}	30,2	35,4	31,0	21,0	33,9	30,6	24,3	27,8	32,2	20,5	23,6	29,7	34,5	22,2	28,5	29,9	34,5

β_i^{SOL} – tempo zbieżności ścieżki wzrostu gospodarki regionu i lub Polski do stacjonarnego stanu równowagi w modelu wzrostu Solowa-Swana; t_i^{SOL} – okres połowicznej zbieżności dla regionu i lub dla Polski.

Tabela 6. Liczba lat niezbędnych do zmniejszenia o połowę odległości między wartością PKB na zatrudnionego w 1999 roku i wartością PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi

Liczba lat	POL	DOL	KUJ	LUL	LUS	LOD	MAL	MAZ	OPL	PKR	PDL	POM	SLA	SWI	WRM	WIE	ZAC
$T(d/2)$	32	41	33	21	38	31	24	29	34	20	23	32	37	21	29	32	37
t_i^{SOL}	30	35	31	21	34	31	24	28	32	21	24	30	34	22	29	30	34

$T(d/2)$ oznacza liczbę lat koniecznych do zmniejszenia o połowę odległości od wartości PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi, liczoną na podstawie rzeczywistych trajektorii PKB na zatrudnionego, uzyskanych na podstawie rozwiązania układu równań różniczkowych (10).

W odniesieniu do polskich regionów można sformułować hipotezę, że w regionach bogatszych – o wyższym poziomie PKB na zatrudnionego – tempo zbieżności ścieżek wzrostu do stacjonarnych stanów równowagi było niższe niż w regionach biedniejszych – o niższym poziomie PKB na zatrudnionego zarówno w 1999 roku, jak i w stacjonarnych stanach równowagi. Rozsądniejsze jest jednak analizowanie sytuacji każdego regionu oddzielnie.

W tabeli 5 podano także wartości współczynników połowicznej zbieżności ścieżek wzrostu w regionach i w gospodarce Polski do stacjonarnych stanów równowagi. Ze względu na definicję tej miary, wartości tych wskaźników pozostają w ścisłym związku z wartościami miar tempa zbieżności. Okresy, w jakich zmniejszy się o połowę różnica między wartością PKB na zatrudnionego w roku 1999 i wartością PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi zarówno dla całej gospodarki Polski, jak i dla tworzących ją 16 regionów, mieszczą się w przedziale od 21 do 35 lat.

W literaturze traktującej o zbieżności ścieżek wzrostu do stacjonarnych stanów równowagi stawiane jest pytanie o tempo zbieżności w modelu wzrostu Solowa-Swana, mierzone współczynnikami β_i^{SOL}, t_i^{SOL}. Częściową odpowiedzią na to pytanie są wartości współczynnika β_i^{SOL}. Jednak jego wartości dobrze aproksymują faktyczną prędkość zbieżności do stanu stacjonarnego, jedynie w otoczeniu stanu stacjonarnego, gdyż wartości tego współczynnika są wyznaczane na podstawie liniowo-logarytmicznej aproksymacji równania (10), opisującego dynamikę gospodarek w regionach. Dlatego też w tabeli 6 porównano okresy połowicznej zbieżności ścieżek wzrostu do stacjonarnych stanów równowagi wynikające z numerycznego rozwiązania równań (10), z tempem zbieżności mierzonym współczynnikiem β_i^{SOL}.

W przypadku modelu wzrostu Solowa-Swana rzeczywiste i modelowe wartości okresów połowicznej zbieżności do stacjonarnych stanów równowagi są prawie takie same. Wynika stąd, że zastosowanie liniowo-logarytmicznej aproksymacji stóp wzrostu PKB na zatrudnionego w polskich regionach i w polskiej gospodarce, dla wyznaczenia tempa zbieżności ścieżek wzrostu do stacjonarnych stanów równowagi, jest w pełni uzasadnione, a popełniane z tego powodu błędy są niewielkie.

3.2. Wyniki otrzymane na podstawie modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila

3.2.1. Nierówności regionalne

W tabeli 7 zawarto wartości parametrów modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila. Wartości takich parametrów jak elastyczność PKB względem kapitału fizycznego α_i, stopy realnej deprecjacji kapitału fizycznego i ludzkiego $\eta_i + \rho$

oraz stopy inwestycji w kapitał fizyczny s_{K_i} są takie same jak w modelu wzrostu Solowa-Swana[12]. Wartości stóp całkowitej produktywności czynników produkcji A_i dla modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila są wyższe niż w modelu Solowa-Swana. Na przykład w modelu wzrostu Solowa-Swana wartość tego współczynnika dla Polski wynosi 90,5 podczas, gdy w modelu Mankiwa-Romera-Weila 132. Przyczyną takiej różnicy jest sposób estymacji parametru A_i opisany w drugim punkcie. Wyższym wartościom tego parametru w modelu Mankiwa-Romera-Weila niż w modelu Solowa-Swana nie towarzyszą zmiany zróżnicowania wartości tego parametru między regionami. Podobnie jak w modelu Solowa-Swana najwyższe stopy całkowitej produktywności czynników produkcji wystąpiły w regionach LUL (1421,8), PKR (1065,7) i SWI (910,5), natomiast najniższe w regionach ZAC (58,2), LUS (72,2) i DOL (74,8).

Parametr β_i interpretujemy jako elastyczność PKB względem kapitału ludzkiego. Wartości tego parametru mają duży wpływ na wartości PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi. Im większa wartość β_i, tym wyższa wartość PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi. Wartości parametrów β_i są większe w tych regionach, w których wartości parametrów α_i są niższe. Najwyższe wartości wystąpiły w: LUL (0,3613), PKR (0,3448), PDL (0,3225) i SWI (0,3361), a najniższe w ZAC (0,2063), POM (0,2135), DOL (0,2158) oraz LUS (0,2158).

Parametr s_{H_i} jest stopą inwestycji w kapitał ludzki. Statystycznie, stopa inwestycji w kapitał ludzki odpowiadała udziałowi wydatków na edukację we wszystkich wydatkach ponoszonych w danym regionie lub w Polsce. W większości regionów udział wydatków na edukację w wydatkach publicznych ogółem jest wyższy niż przeciętnie w Polsce. Najwyższe wartości s_{H_i} zaobserwowano w regionach LUL (0,481) oraz PKR (0,4638), a najniższą dla MAZ (0,2965).

Tabela 8 zawiera wartości PKB na zatrudnionego w 1999 roku i w stacjonarnych stanach równowagi w modelu wzrostu MRW. Nietrudno zauważyć bardzo dużą różnicę rzędu wielkości PKB na zatrudnionego w roku 1999 i w stacjonarnych stanach równowagi w regionach i w Polsce. Przyczyna tego stanu leży w tym, że w obliczeniach jako zasób kapitału ludzkiego przyjęto liczbę absolwentów szkół średnich. Jednak jest to jedna z wielu możliwych miar zasobu kapitału ludzkiego. Rzeczywisty zasób kapitału ludzkiego mógłby być proporcjonalny do liczby wykształconych pracowników. Zakładając, że każdy pracownik posiada pewien zasób kapitału ludzkiego C, faktyczny zasób kapitału ludzkiego wynosiłby:

[12] Zob. tabela 1.

Tabela 7. Wartości parametrów w modelu Mankiwa-Romera-Weila

Parametry	POL	DOL	KUJ	LUL	LUS	LOD	MAL	MAZ	OPL	PKR	PDL	POM	SLA	SWI	WRM	WIE	ZAC
A_i	132,0	74,8	119,8	**1421,8**	72,2	**181,7**	**337,3**	**217,7**	**141,5**	**1065,7**	**631,3**	70,8	108,3	**901,5**	117,3	122,4	58,2
α_i	0,5132	**0,5684**	**0,5250**	0,2773	**0,5683**	0,4836	0,4267	0,4800	0,4960	0,3104	0,3550	**0,5730**	**0,5372**	0,3278	**0,5151**	**0,5249**	**0,5874**
β_i	0,2434	0,2158	0,2375	**0,3613**	0,2158	**0,2582**	**0,2866**	**0,2600**	**0,2520**	**0,3448**	**0,3225**	0,2135	0,2314	**0,3361**	0,2424	0,2375	0,2063
$\eta_i+\rho$	0,0498	0,0484	**0,0502**	0,0483	**0,0507**	0,0453	**0,0535**	**0,0507**	0,0473	**0,0520**	0,0489	**0,0537**	0,0457	0,0484	**0,0521**	**0,0519**	**0,0508**
s_{K_i}	0,2048	**0,2215**	0,1586	0,1602	0,2016	0,1731	0,1859	**0,2874**	0,1985	0,1710	0,1645	0,1959	0,1892	0,1773	0,1413	0,2002	0,1629
s_{H_i}	0,3956	0,3618	**0,4399**	**0,4816**	0,3833	**0,4145**	**0,4519**	0,2965	**0,4230**	**0,4638**	**0,4530**	**0,4260**	**0,4132**	**0,4393**	**0,4366**	**0,4362**	0,3768

A_i – współczynnik całkowitej produktywności czynników produkcji, α_i – elastyczność PKB względem kapitału fizycznego, β_i – elastyczność PKB względem kapitału ludzkiego, $\eta_i+\rho$ – realna stopa deprecjacji kapitału, s_{K_i} – stopa inwestycji w kapitał fizyczny, s_{H_i} – stopa inwestycji w kapitał ludzki w regionie *i* lub w Polsce.

Tabela 8. Wartości PKB na zatrudnionego w 1999 roku oraz w stacjonarnych stanach równowagi w modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila

Zmienne	POL	DOL	KUJ	LUL	LUS	LOD	MAL	MAZ	OPL	PKR	PDL	POM	SLA	SWI	WRM	WIE	ZAC
y_i^f	35 604	41 059	34 717	22 542	37 624	31 628	29 685	46 146	33 531	23 023	25 248	40 949	42 382	24 551	33 147	36 276	41 808
y_i^{*MRW}	80 904 117 434	197 217 897 247	62 972 093 644	13 278 276 642	116 664 195 297	63 639 859 303	35 676 657 826	141 187 187 658	51 781 780 599	15 742 845 609	16 975 693 740	118 099 951 129	152 275 196 068	19 966 546 988	23 878 466 404	102 085 188 352	74 116 605 551

y_i^f – PKB na zatrudnionego w 1999 r., y_i^{*MRW} – PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi w modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila w regionie *i* lub w Polsce.

Tabela 9. Rozkłady PKB na zatrudnionego w regionach względem PKB na zatrudnionego w Polsce według wartości rzeczywistych i modelowych

Ilorazy	DOL	KUJ	LUL	LUS	LOD	MAL	MAZ	OPL	PKR	PDL	POM	SLA	SWI	WRM	WIE	ZAC
y_i^f / y^f	**1,153**	0,975	0,633	**1,057**	0,888	0,834	**1,296**	0,942	0,647	0,709	**1,150**	**1,190**	0,690	0,931	**1,019**	**1,174**
$\hat{y}_i^{MRW} / \hat{y}^{MRW}$	**2,438**	0,778	0,164	**1,442**	0,787	0,441	**1,745**	0,640	0,195	0,210	**1,460**	**1,882**	0,247	0,295	**1,262**	0,916

y_i^f / y^f – iloraz PKB na zatrudnionego w regionie *i* oraz PKB na zatrudnionego w Polsce w 1999 roku, $\hat{y}_i^{MRW} / \hat{y}_i^{MRW}$ – iloraz PKB na zatrudnionego w regionie *i* oraz PKB na zatrudnionego w Polsce, w stacjonarnych stanach równowagi w modelu Mankiwa-Romera-Weila.

Tabela 10. Elastyczności PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi względem parametrów modelu Mankiwa-Romera-Weila

Elastyczności	POL	DOL	KUJ	LUL	LUS	LOD	MAL	MAZ	OPL	PKR	PDL	POM	SLA	SWI	WRM	WIE	ZAC
$e^{\hat{y}_i}_{A_i}$	4,109	4,634	4,211	2,767	4,633	3,873	3,489	3,846	3,969	2,900	3,101	4,684	4,322	2,975	4,125	4,210	4,848
$e^{\hat{y}_i}_{\alpha_i}$	55,943	72,502	57,519	18,809	70,726	49,113	38,031	50,594	51,390	22,211	27,266	71,888	63,083	24,400	52,888	58,997	74,594
$e^{\hat{y}_i}_{\beta_i}$	27,710	28,019	27,037	25,608	27,505	27,090	26,432	27,440	26,861	25,668	25,781	27,566	27,952	25,923	26,022	27,478	27,034
$e^{\hat{y}_i}_{\eta_i+\rho}$	−3,109	−3,634	−3,211	−1,767	−3,633	−2,873	−2,489	−2,846	−2,969	−1,900	−2,101	−3,684	−3,322	−1,975	−3,125	−3,210	−3,848
$e^{\hat{y}_i}_{s_{k_i}}$	2,109	2,634	2,211	0,767	2,633	1,873	1,489	1,846	1,969	0,900	1,101	2,684	2,322	0,975	2,125	2,210	2,848
$e^{\hat{y}_i}_{s_{h_i}}$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

$e^{\hat{y}_i}_{z_i}$ – elastyczność PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi względem parametru $z_i = \{A_i, \alpha_i, \beta_i, \eta_i + \rho, s_{k_i}, s_{h_i}\}$, który oznacza odpowiednio: całkowitą produktywność czynników produkcji, elastyczność PKB względem kapitału fizycznego, elastyczność PKB względem kapitału ludzkiego, stopę realnej deprecjacji kapitału fizycznego na zatrudnionego, stopę inwestycji w kapitał fizyczny, stopę inwestycji w kapitał ludzki w regionie *i* lub w Polsce.

$$\tilde{H} = CH, \tag{32}$$

gdzie H oznacza liczbę absolwentów szkół średnich, albo w przeliczeniu na zatrudnionego:

$$\tilde{h} = Ch \tag{33}$$

Można wykazać, że wartości PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi – podane w tabeli 8 – opisują wzory:

$$\tilde{y}_i^{*\text{MRW}} = \frac{y_i^{*\text{MRW}}}{\frac{1}{C^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}}}. \tag{34}$$

Realne wartości PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi w modelu MRW otrzymano by, gdyby znane były wartości parametru C. Jakkolwiek wartość ta nie jest znana, to ze względu na założenie (33) można skoncentrować uwagę nie tyle na bezwzględnym poziomie PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi, ile na relacji PKB na zatrudnionego w danym województwie w stosunku do PKB na zatrudnionego w Polsce.

Podobnie jak w modelu wzrostu Solowa-Swana próbowano określić wpływ zmian wartości parametrów modelu Mankiwa-Romera-Weila na wartości PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi. Jako miary wrażliwości przyjęto elastyczności PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi względem parametrów modelu Mankiwa-Romera-Weila, a ich wartości podano w tabeli 10. Największy wpływ na PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi w poszczególnych województwach i w gospodarce Polski wywierają parametry α_i, β_i, które oznaczają odpowiednio elastyczności PKB względem kapitału fizycznego i ludzkiego. Elastyczności PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi względem stóp inwestycji w kapitał ludzki, dla regionów i dla Polski $e^{*\tilde{y}_i}_{s_{h_i}}$ są zawsze równe jedności.

3.2.2. Zbieżność ścieżek wzrostu do stacjonarnych stanów równowagi

W tabeli 11 podano wartości miar tempa i okresy połowicznej zbieżności ścieżek wzrostu polskich regionów i gospodarki Polski do stacjonarnych stanów równowagi. W porównaniu ze standardowym modelem Solowa-Swana w modelu Mankiwa-Romera-Weila tempo zbieżności jest prawie dwukrotnie niższe,

Tabela 11. Współczynniki tempa zbieżności i okresy połowicznej zbieżności

	POL	DOL	KUJ	LUL	LUS	LOD	MAL	MAZ	OPL	PKR	PDL	POM	SLA	SWI	WRM	WIE	ZAC
β_i^{MRW}	0,0121	0,0104	0,0119	0,0175	0,0110	0,0117	**0,0153**	**0,0132**	0,0119	**0,0179**	**0,0158**	0,0115	0,0106	**0,0163**	**0,0126**	**0,0123**	0,0105
t_i^{MRW}	57,2	**66,3**	**58,2**	39,7	**63,3**	**59,3**	45,2	52,6	**58,2**	38,7	44,0	**60,4**	**65,6**	42,6	54,9	56,2	**66,2**

β_i^{MRW} – tempo zbieżności ścieżki wzrostu gospodarki regionu *i* lub Polski do stacjonarnego stanu równowagi w modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila, t_i^{MRW} – okres połowicznej zbieżności dla regionu *i* lub dla Polski w modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila.

Tabela 12. Liczba lat niezbędnych do zmniejszenia o połowę odległości między wartością PKB na zatrudnionego w 1999 roku i wartością PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi

Liczba lat	POL	DOL	KUJ	LUL	LUS	LOD	MAL	MAZ	OPL	PKR	PDL	POM	SLA	SWI	WRM	WIE	ZAC
$T(d/2)$	132	165	136	65	157	131	92	116	130	66	80	151	156	75	126	132	168
t_i^{MRW}	57	66	58	40	63	59	45	53	58	39	44	60	66	43	55	56	66

$T(d/2)$ oznacza liczbę lat koniecznych do zmniejszenia o połowę odległości od wartości PKB na zatrudnionego w stacjonarnym stanie równowagi, liczoną na podstawie rzeczywistych trajektorii PKB na zatrudnionego uzyskanych na podstawie rozwiązania układu równań różniczkowych (21).

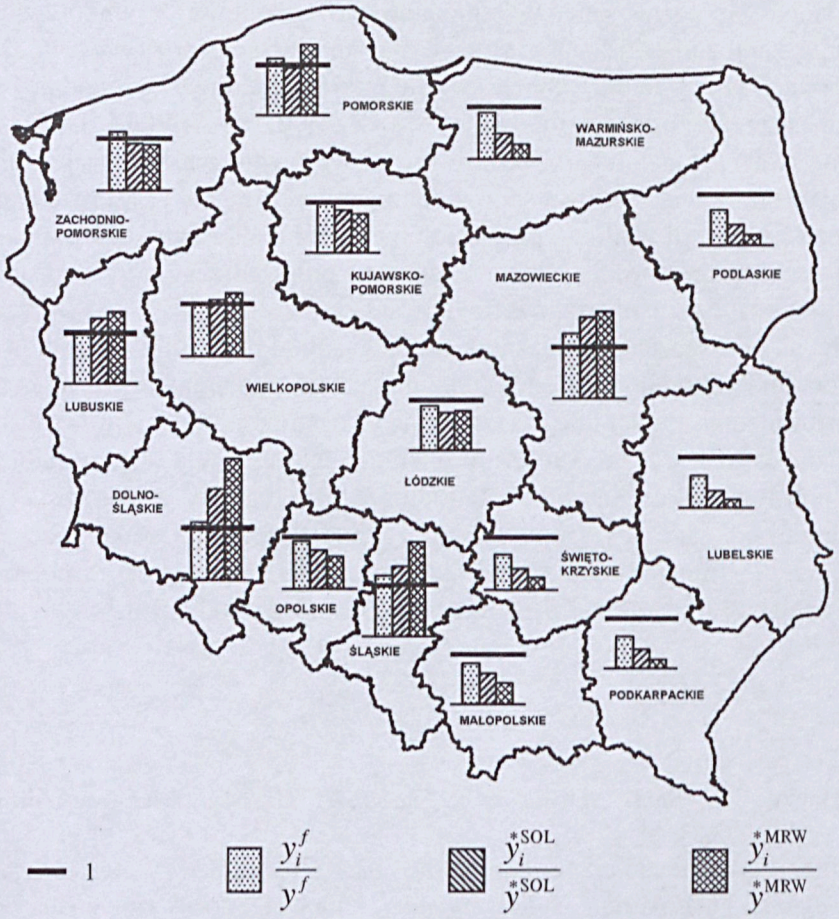
a w konsekwencji okresy połowicznej zbieżności są odpowiednio dwukrotnie dłuższe. Na ogół tempo zbieżności w regionach bogatszych było niższe niż w regionach uboższych. Z kolei okresy połowicznej zbieżności do stacjonarnych stanów równowagi w regionach bogatszych były dłuższe niż w regionach biedniejszych.

Podobnie jak w modelu wzrostu Solowa-Swana podjęto próbę odpowiedzi na pytanie o wiarygodność miar tempa zbieżności w modelu Mankiwa-Romera-Weila. Dlatego też w tabeli 12 zestawiono współczynniki okresów połowicznej zbieżności do stacjonarnych stanów równowagi otrzymane w wyniku liniowo-logarytmicznej aproksymacji stopy wzrostu PKB na zatrudnionego, ze współczynnikami opisującymi okresy połowicznej konwergencji, które określano na podstawie trajektorii PKB na zatrudnionego wyznaczonych z układu równań różniczkowych (21).

W odróżnieniu od modelu wzrostu Solowa-Swana, w modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila, liniowo-logarytmiczna aproksymacja stóp wzrostu PKB na zatrudnionego w poszczególnych regionach i w Polsce prowadzi do wartości współczynników, opisujących okresy połowicznej zbieżności ścieżek wzrostu do stacjonarnych stanów równowagi, które znacznie odbiegają od analogicznych współczynników liczonych na podstawie trajektorii PKB na zatrudnionego, będących rozwiązaniem układu równań różniczkowych (21). Wiarygodniejszymi miarami okresów połowicznej zbieżności ścieżek wzrostu PKB na zatrudnionego są te, które zostały otrzymane na podstawie realnych trajektorii PKB na zatrudnionego.

3.3. Wnioski końcowe

Ilustracją najistotniejszych wyników opisującą nierówności regionalne w Polsce w 1999 roku i w stacjonarnych stanach równowagi jest poniższa mapa. Pokazuje ona rzeczywiste i otrzymane na podstawie modeli Solowa-Swana i Mankiwa-Romera-Weila rozkłady PKB na zatrudnionego. Z przeprowadzonych badań wynikają dosyć sugestywne wnioski. Najbogatsze polskie regiony w 1999 roku – takie jak DOL, MAZ, SLA – znacznie zwiększą swój poziom zamożności, podczas gdy regiony najbiedniejsze – takie, jak LUL, PDK, SWI – znacznie pogorszą poziom zamożności w stosunku do przeciętnego poziomu zamożności w Polsce. Grupa regionów o stopniu zamożności zbliżonym do poziomu przeciętnego dla gospodarki Polski, WIE, LUS, POM nieco poprawi swoją pozycję, zachowując równocześnie status regionów o przeciętnym poziomie zamożności. Zarysowana tendencja jest bardziej wyraźna w przypadku wyników otrzymanych na podstawie modelu Mankiwa-Romera-Weila niż na podstawie modelu Solowa-Swana.



Rozkłady PKB na zatrudnionego w regionach względem PKB na zatrudnionego w Polsce według wartości rzeczywistych i modelowych

Zakończenie

Zastosowanie neoklasycznych modeli wzrostu Solowa-Swana i Mankiwa-Romera-Weila do analizy nierówności regionalnych w Polsce jest punktem wyjścia do dyskusji nad użytecznością tych i innych zagregowanych modeli wzrostu do badania nierówności regionalnych w długim horyzoncie czasu.

Wyniki otrzymane na podstawie modeli wzrostu Solowa-Swana i Mankiwa-Romera-Weila, dotyczące rozkładu PKB na zatrudnionego w stacjonarnych stanach równowagi – traktowanych jako docelowe stany gospodarek poszczególnych regionów i gospodarki Polski – świadczą o możliwości dalszego

pogłębienia się różnic między regionami naszego kraju, z punktu widzenia poziomu zamożności. Zmiany te sugerują zmniejszenie poziomu zamożności w regionach wschodniej, północno-wschodniej i południowo-wschodniej części Polski, na rzecz takich regionów, jak: MAZ, DOL, SLA, POM, LUS i WIE. Równie ważne, jak wyniki końcowe, są zarówno wnioski, jakie można wyciągnąć na temat nierówności regionalnych w Polsce na podstawie wartości parametrów modeli wzrostu, przyjętych metod ich kalibracji, jak i charakterystyk procesów zbieżności trajektorii wzrostu polskich regionów i gospodarki Polski do stacjonarnych stanów równowagi.

Liczne uproszczenia związane z zastosowanymi modelami wzrostu, a także z metodami kalibracji parametrów tych modeli, uświadamiają wyraźną potrzebę przeprowadzenia pogłębionej refleksji nad konstrukcją modeli wzrostu nowej generacji, które w szczególności uwzględniałyby interakcje między regionami, mobilność czynników produkcji, zasadnicze paradygmaty współczesnej teorii przestrzeni, a nade wszystko byłyby zgodne z formami dokonujących się współcześnie transformacji ekonomicznych, technologicznych i społecznych w europejskiej i światowej przestrzeni społeczno-gospodarczej.

Literatura

[1] Barro, R., Sala-i-Martin, X., *Economic Growth*, McGraw-Hill, New York 2003.

[2] Beine, M., Docquier, F. (eds), *Croissance et convergence économiques des regions. Théorie, faits et determinants*, Editions DeBoeck Université, Bruxelles 2000.

[3] Caselli, F.G., Esquivel, G., Lefort, F., *Reopening the Convergence Debate: A New Look at Cross-Country Growth Empirics*, Journal of Economic Growth 1996, 363-389.

[4] De la Fuente, A. (1998), *What Kind of Regional Convergence*? CEPR DP 1924.

[5] Kliber, P., Maćkowiak, P., Malaga, K., *Application of Neoclassical Growth Models to Analysis of Regional Inequalities in Poland*, The Poznań University of Economics Review, vol. 4, 2004, no. 2, 46-66.

[6] Kliber, P., Maćkowiak, P., Malaga, K., *Convergence et disparités régionales en Pologne. Analyse en termes des modeles néoclassiques de croissance*, XLème Colloque de l'ASRDLF, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles 1-3.09.2004. http://www.ulb.ac.be/soco/asrdlf/documents.

[7] Kliber, P., Maćkowiak, P., Malaga, K., *Les disparités régionales en Pologne. Analyse en termes des modeles néoclassiques de croissance*, Ateliers franco-polonais, Université de Bourgogne, Dijon, 5-6.02.2004.

[8] Kliber, P., Malaga, K., *Convergence of Regional Growth Paths Towards Stable Steady-States in Poland in Years 1998-2000*, The Poznań University of Economics Review, vol. 3, 2003, no. 2, 12-30.
[9] Kliber, P., Malaga, K., *Zbieżność ścieżek wzrostu gospodarki Polski i polskich województw w latach 1998-2000 do stabilnych stanów równowagi*, Studia Regionalne i Lokalne 2003, nr 4 (14).
[10] Kliber, P., Malaga, K., *Convergence des sentiers de croissance économique des régions polonaises vers les états d'équilibre stable*, XXXIX Colloque de l'ASRDLF, Institut de l'Homme, Lyon 1-3.09.2003, http://asrdlf2003.ent-pe.fr/pdfpapiers.
[11] Kliber, P., Malaga, K., *On the Convergence of Growth Path Towards Steady-States in OECD Countries in Solow-Swan Type Model* w: W., Charemza, K. Strzała (eds), *East European Transition and EU Enlargement, A Quantitative Approach*, Physica Verlag, Heidelberg, New York 2002.
[12] Malaga K., Konwergencja gospodarcza w krajach OCDE w świetle zagregowanych modeli wzrostu, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2004.
[13] Malaga K., *Convergence économique et inégalités régionales en Pologne*, 54ème Congrès de l'Association des Économistes de Langue Française, Université Paul Cézanne – Aix – Marseille III, Aix – en – Provence, 23-25.05.2005.
[14] Mankiw, N.G., Romer, D., Weil, D., *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, American Economic Review 1992, no. 107, 407-37.
[15] *Statistical Yearbook of the Republic of Poland, Statistical Yearbook of the Regions – Poland, 1998-2001.*
[16] Temple, J., *The New Growth Evidence*, Journal of Economic Literature 1999, 112-156.

CONVERGENCE AND REGIONAL INEQUALITIES IN POLAND. ANALYSE IN TERMES OF NEOCLASSICAL GROWTH MODELS

Summary

In this paper we apply the neoclassical growth models of Solow-Swan (1956) and Mankiw-Romer-Weil (1992) to analysis of regional inequalities. The regional inequalities in Poland are described by the values of the parameters in the both growth models, the speed of convergence of the growth paths of GDP per worker towards their steady-states and the distributions of GDP p.w. among the sixteen polish regions in 1999 year – compared with their counterparts in the steady-states. We also try to judge the usefulness of the neoclassical growth models for analysis of regional inequalities in Poland.