Marek ŁAŻEWSKI

ZASTOSOWANIE ULTRASFERYCZNEJ ANALIZY HARMONICZNEJ DO ANALITYCZNEGO WYZNACZANIA FUNKCJI GĘSTOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA WIELOWYMIAROWYCH α-STABILNYCH ROZKŁADÓW PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1. Jednowymiarowe α-stabilne rozkłady prawdopodobieństwa

Rozkłady α-stabilne stanowią klasę rozkładów statystycznych, zawierającą między innymi rozkłady normalne, Cauchy'ego i są rozkładami, opisującymi dość dokładnie dobrze znane z badań empirycznych zjawiska skośności oraz „grubych ogonów". Klasa tych rozkładów została scharakteryzowana przez Levy'ego, który badał znormalizowane sumy niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach [8].

Rozkład R jest α-stabilny, jeżeli ma następującą własność: suma niezależnych zmiennych losowych α-stabilnych o identycznych rozkładach $X_1, \ldots, X_n$ (o takim samym indeksie stabilności α), przy dodatnim parametrze c_n oraz dowolnym d_n, może być wyrażona przez nową zmienną X, spełniającą zależność [14]:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n. \tag{1}$$

Symbol $\stackrel{d}{=}$ oznacza, że zmienne losowe po obydwu stronach równania (1) mają taki sam rozkład prawdopodobieństwa. Można więc powiedzieć, że rozkłady α-stabilne są stabilne względem operacji sumowania. Stała c_n przybiera wartość określoną poprzez wyrażenie:

$$c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{2}$$

dla $\alpha \in (0, 2)$ [6].

Parametryzacja rozkładów α-stabilnych, ze względu na nieznaną jawną postać funkcji rozkładu prawdopodobieństwa, jest możliwa poprzez zastosowanie w tym celu funkcji charakterystycznej (dla zmiennej losowej dyskretnej) lub też transformaty Fouriera (w przypadku zmiennej losowej ciągłej o gęstości f). Funkcją charakterystyczną $\phi(t)$ zmiennej losowej X nazywamy wartość przeciętną funkcji e^{itx}, gdzie t jest zmienną rzeczywistą, a i – jednostką urojoną:

$$\bigwedge_{t \in R} \varphi(t) = E(\exp itX). \tag{3}$$

Zastosowanie definicji (3) do α-stabilnych rozkładów prawdopodobieństwa prowadzi do następującej postaci funkcji charakterystycznej:

$$E\exp(itX) = \exp\left(-|t|^{\alpha}\left[1 - i\beta\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)(\operatorname{sign} t)\right]\right), \quad \alpha \neq 1, \tag{4}$$

$$E\exp(itX) = \exp\left(-|t|\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\operatorname{sign} t)\ln|t|\right]\right), \quad \alpha = 1, \tag{5}$$

gdzie:

$$\operatorname{sign} t = \begin{cases} -1 & \text{dla } t<0, \\ 0 & \text{dla } t=0, \\ 1 & \text{dla } t>0. \end{cases}$$

Rozkłady α-stabilne są opisywane przez cztery parametry: wskaźnik stabilności $\alpha \in (0, 2)$, wskaźnik skośności $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, wskaźnik skali $\sigma > 0$ oraz wskaźnik charakteryzujący pozycję $\delta \in R$. Jeżeli $\alpha = 2$, to zmienna X ma rozkład normalny. W innych przypadkach, gdy $0 < \alpha < 2$, rozkład ma ogony istotnie grubsze od rozkładu normalnego. Gdy $\beta > 0$, rozkład jest skośny w prawo- i odwrotnie, jeżeli $\beta < 0$, to rozkład jest skośny w lewo. Parametr skali σ pełni analogiczną rolę do roli odchylenia standardowego w przypadku rozkładu normalnego. Parametr δ dla $\alpha > 1$ jest równy wartości oczekiwanej zmiennej X.

Poniżej zostaną przedstawione dwa główne sposoby parametryzacji rozkładów α-stabilnych. W pierwszym z nich (oznaczanym w literaturze przez

$S(\alpha, \beta, \sigma, \delta_1; 1)$) zaproponowanym przez Samorodnitsky'ego i Taqqu'a funkcja charakterystyczna rozkładu ma następującą postać [19]:

$$E\exp(itX)=\exp\left(-\sigma^{\alpha}|t|^{\alpha}\left[1-i\beta\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)(\operatorname{sign} t)\right]+i\delta_1 t\right), \quad \alpha\neq 1, \quad (6)$$

$$E\exp(itX)=\exp\left(-\sigma|t|\left[1+i\beta\frac{2}{\pi}(\operatorname{sign} t)\ln|t|\right]+i\delta_1 t\right), \quad \alpha=1. \quad (7)$$

Innym rodzajem parametryzacji jest propozycja Zolotareva [22] (oznaczany przez $S(\alpha, \beta, \sigma, \delta_0; 0)$), w której funkcja charakterystyczna jest określona poprzez:

$$E\exp(itX)=\exp\left(-\sigma^{\alpha}|t|^{\alpha}\left[1+i\beta\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)(\operatorname{sign} t)\left|\gamma\cdot t\right|^{1-\alpha}-1\right]+i\delta_0 t\right), \alpha\neq 1, \quad (8)$$

$$E\exp(itX)=\exp\left(-\delta|t|\left[1+i\beta\frac{2}{\pi}(\operatorname{sign} t)\ln|t|+\ln\gamma\right]+i\delta_0 t\right), \quad \alpha=1. \quad (9)$$

Wartość tej reprezentacji polega na tym, że funkcja charakterystyczna – a co za tym idzie funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa – jest ciągła dla wszystkich wartości parametrów. Parametry α, β i σ mają takie same znaczenie co poprzednio, a związek między δ_1 i δ_0 jest następujący:

$$\delta_1=\delta_0-\beta\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)\sigma, \quad \text{jeżeli} \quad \alpha\neq 1, \quad (10)$$

$$\delta_1=\delta_0-\beta\frac{2}{\pi}\sigma\ln\sigma, \quad \text{jeżeli} \quad \alpha=1. \quad (11)$$

2. Wielowymiarowe α-stabilne rozkłady prawdopodobieństwa

Właściwości jednowymiarowych rozkładów α-stabilnych są dobrze poznane i opisane w literaturze (zob. np. [18]). Proste uogólnienie metod stosowanych w rozkładach jednowymiarowych na rozkłady wielowymiarowe nie jest moż-

liwe ze względu na to, że w przypadku rozkładów α-stabilnych wariancja jest nieskończona (zob. [10]). Nie jest więc możliwe stosowanie analogii opartych na wielowymiarowym rozkładzie normalnym, który jest szczególnym przypadkiem rozkładu α-stabilnego, gdyż nie ma sensu stosowanie macierzy kowariancji jako miary struktury korelacyjnej.

2.1. Charakterystyka wielowymiarowych α-stabilnych rozkładów prawdopodobieństwa

W celu podania podstawowych charakterystyk wielowymiarowych rozkładów α-stabilnych należy zdefiniować najpierw pojęcie wielowymiarowej α-stabilności. Rozważmy w tym celu niezależne wektory losowe $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ o identycznym rozkładzie w przestrzeni R^D.

Rozkład wektora losowego X będziemy nazywać α-stabilnym w przestrzeni R^D, jeżeli dla dowolnej liczby $n>1$ istnieje d-wymiarowy wektor a_n taki, że:

$$X \stackrel{d}{=} n^{\frac{1}{\alpha}}(X_1 + \ldots + X_n) + a_n. \tag{12}$$

Jeżeli w wyrażeniu (12) $a_n=0$, to wielowymiarowy rozkład α-stabilny nazywany jest rozkładem α-stabilnym w ścisłym sensie [1]. Oznaczmy przez $\Phi(x)$ gęstość wielowymiarowego α-stabilnego rozkładu prawdopodobieństwa. Jego funkcję charakterystyczną $\hat{\Phi}(t)$ możemy określić w postaci formuły kanonicznej formy Levy'ego-Chinczyna (dla przypadku rozkładu jednowymiarowego zob. [6])

$$\ln \hat{\Phi}(t) = i\langle \mu, t\rangle + \int_{S^{D-1}} \int_0^{\infty} \left(e^{ir\langle \xi, t\rangle} - 1 - i \frac{r\langle \xi, s\rangle}{1+r^2} \right) \frac{dr}{r^{1+\alpha}} \Gamma(ds), \tag{13}$$

gdzie parametr $\alpha \in (0, 2)$ jest nazywany wskaźnikiem stabilności, $\mu \in R^D$ jest parametrem pozycyjnym, a Γ reprezentuje skończoną miarę na podzbiorze Borela sfery jednostkowej S^{D-1}, która nosi w literaturze miano miary spektralnej. Nawias $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni R^D, a więc

$$\langle \mu, \xi \rangle = \sum_j \mu_j \xi_j. \tag{14}$$

Ponadto $\xi \in R^D$. Reprezentację (13) można zapisać w przypadku rozkładu wielowymiarowego w formie [21]:

$$\Phi[\xi]=i\langle\mu,\xi\rangle-\int_{S^D}\eta_\xi^{(\alpha)}(s)\Gamma[ds], \tag{15}$$

gdzie

$$\eta_\xi^{(\alpha)}(s)=|\langle\xi,s\rangle|^\alpha+A_\alpha\langle\xi,s\rangle^{\langle\alpha\rangle}i, \tag{16}$$

w którym

$$\xi^{\langle\alpha\rangle}=\begin{cases}\operatorname{sign}(\xi)\cdot|\xi|^\alpha, & \text{gdy } \alpha\neq 1,\\ \xi\cdot\log|\xi|, & \text{gdy } \alpha=1\end{cases} \tag{17}$$

oraz

$$A_\alpha=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \text{gdy } \alpha\neq 1,\\ -\frac{2}{\pi}, & \text{gdy } \alpha=1.\end{cases} \tag{18}$$

Parametr stabilności α charakteryzuje ogony rozkładu wielowymiarowego i można go rozumieć jako parametr kształtu funkcji rozkładu. Gdy $\alpha<2$, prawdopodobieństwo $P(X_j>x)$ związane z każdą składową X_j wektora α-stabilnego X maleje według funkcji potęgowej $x^{-\alpha}$ wraz ze wzrostem x do nieskończoności.

Miara spektralna Γ określa zależność pomiędzy składowymi wektora X (jest w pewnym sensie odpowiednikiem macierzy wariancji – kowariancji w przypadku wielowymiarowego rozkładu normalnego). Składowe X są niezależne, jeśli miara spektralna przyjmuje wartości dyskretne oraz gdy jest skoncentrowana na przecięciu sfery S^D z osiami układu współrzędnych. Podstawową rolę w estymacji miary spektralnej Γ odgrywa definicja obszaru przyciągania rozkładu $S_\alpha(\mu,\Gamma)$, to znaczy wielowymiarowego rozkładu α-stabilnego z parametrem pozycji μ oraz miarą spektralną Γ. Definicja ta wynika wprost z tzw. uogólnionego twierdzenia granicznego (np. [14]).

Wektor losowy X w przestrzeni R^D należy do obszaru przyciągania rozkładu $S_\alpha(\mu,\Gamma)$, $\alpha<2$, wtedy i tylko wtedy, gdy $V(r)=P(\|X\|>r)$ jest regularnie zmienna w nieskończoności z indeksem α oraz:

$$P\left(\frac{X}{\|X\|}\in D \quad \text{dla} \quad \|X\|>r\right)=\frac{P\left(\frac{X}{\|X\|}\in D,\ \|X\|>r\right)}{V(r)}\to\frac{\Gamma(D)}{\Gamma(S_D)}, \tag{19}$$

gdy $r\to\infty$ dla wszystkich podzbiorów borelowskich D sfery S^D z $\Gamma(\partial D)=0$.

2.2. Algebraiczne własności miary spektralnej

Mnożenie α-stabilnego wektora przez liczbę

Niech $\alpha \in [0, 2)$, $\alpha \neq 1$. Niech $X \in R^D$ będzie α-stabilnym wektorem z miarą spektralną Γ. Jeżeli $c \in R$, to $c \cdot X$ jest również α-stabilnym wektorem. Jeżeli $c > 0$, to miarą spektralną wektora X jest $c^\alpha \cdot \Gamma$. Jeżeli $c < 0$, to miarą spektralną wektora X jest $-c^\alpha \cdot \Gamma$, gdzie $\tilde{\Gamma}$ jest sferycznym odwróceniem Γ, to znaczy:

$$\tilde{\Gamma}[U] = \Gamma[U]. \tag{20}$$

Suma niezależnych wektorów α-stabilnych

Niech $\alpha \in [0, 2)$, a $X_1, X_2 \in R^D$ będą α-stabilnymi wektorami z miarami spektralnymi odpowiednio Γ_1, Γ_2. Niech $X_0 = X_1 + X_2$ ma miarę spektralną Γ_0. Wtedy

$$\Gamma_0 = \Gamma_1 + \Gamma_2 \text{ [15]}. \tag{21}$$

2.3. Rozkłady brzegowe wielowymiarowych α-stabilnych rozkładów prawdopodobieństwa

Weźmy pod uwagę kombinację liniową α-stabilnych zmiennych losowych $\langle b, X \rangle = (b_1 X_1 + \ldots + b_d X_d)$, gdzie $b \in R$. Wypadkowa kombinacja $\langle b, X \rangle$, z wielowymiarowym α-stabilnym rozkładem prawdopodobieństwa, z miarą spektralną Γ oraz parametrem pozycyjnym μ, jest jednowymiarową α-stabilną zmienną losową z rozkładem $D^\alpha[\beta_b, \sigma_b, \delta_b]$, w którym

$$\beta_b = \frac{\int_{S^D} |\langle b, s \rangle|^\alpha \operatorname{sign}(\langle b, s \rangle)\, \Gamma(ds)}{\int_{S^D} |\langle b, s \rangle|^\alpha \, \Gamma(ds)}, \tag{22}$$

$$\sigma_b = \left(\int_{S^{D-1}} |\langle b, s \rangle|^\alpha \, \Gamma(ds) \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{23}$$

$$\delta_b = \begin{cases} \langle b, \mu \rangle, & \alpha \neq 1 \\ \langle b, \mu \rangle - \dfrac{21}{\pi} \displaystyle\int_{S^{D-1}_{\pm}} \langle b, s \rangle \log \langle b, s \rangle \, \Gamma(ds), & \alpha = 1. \end{cases} \tag{24}$$

2.4. Metody estymacji miary spektralnej Γ

Problem estymacji miary spektralnej Γ nie jest do dnia dzisiejszego jednoznacznie rozwiązany, to znaczy nie istnieje spójny matematycznie analityczny sposób, który pozwoliłby na efektywne jego stosowanie w akceptowanym czasie. Jest to szczególnie ważne w przypadku wielowymiarowych rozkładów α-stabilnych, na przykład w ich zastosowaniach w analizie portfelowej, gdzie parametr bezpośrednio zależny od Γ pełni rolę miary ryzyka (jest odpowiednikiem wariancji w przypadku jednowymiarowego rozkładu normalnego) [2]. W tej części artykułu zostaną przedstawione główne sposoby estymacji miary spektralnej.

2.4.1. Estymator RXC

Metodę estymacji miary spektralnej α-stabilnego wektora losowego Y opartą na próbie losowej $X_1, \ldots, X_n$ przedstawili Rachev i Xin [17] oraz Cheng i Rachev [3] (w skrócie metoda RXC). Jej podstawą jest wyrażenie graniczne, określone przez wyrażenie (19). Miara Γ jest znormalizowaną miarą spektralną wektora Y, określoną poniżej. Jeżeli przedstawimy parametr skali σ w postaci:

$$\sigma = \{\Gamma(S_d)\}^{\frac{1}{\alpha}} \tag{25}$$

oraz znormalizowaną miarę

$$\tilde{\Gamma}(ds) = \sigma^{-\alpha}\Gamma(ds) \tag{26}$$

w takiej postaci, że

$$\tilde{\Gamma}(ds) = 1 \quad \text{(zob. [4])}, \tag{27}$$

to funkcja charakterystyczna

$$\Phi(t) = Ee^{i\langle t, X\rangle} = e^{I_\alpha(t) + i\langle t, m\rangle} \tag{28}$$

przybierze postać:

$$\Phi(t) = e^{-\sigma^\alpha I_\alpha(t) + i\langle t, m\rangle} \tag{29}$$

w której

$$I_\alpha(t) = \int_{S_d} \omega_{\alpha,1}(\langle t, s\rangle)\,\tilde{\Gamma}(ds), \tag{30}$$

gdzie:

$$\omega_{\alpha,\beta}(u)=\begin{cases}|u|^{\alpha}\left[1-i\beta\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)\operatorname{sgn}u\right] & \text{dla} \quad \alpha\neq 1,\\ |u|\left[1-i\beta\frac{2}{\pi}\operatorname{sgn}u\,\log u\right] & \text{dla} \quad \alpha=1.\end{cases} \tag{31}$$

W takim wypadku w celu estymacji miary $\tilde{\Gamma}(D)$ wybieramy dużą wartość r oraz obliczamy liczbę składowych X_i, których norma przekracza r należących do zbioru D, to jest:

$$\hat{\Gamma}(D)=\frac{\#\left\{\frac{X_i}{\|X_i\|}\in D \quad \text{oraz} \quad \|X_i\|>r\right\}}{\#\{\|X_i\|>r\}}. \tag{32}$$

Na tej podstawie estymator $\tilde{\Gamma}$ RXC miary spektralnej Γ jest miarą dyskretną na sferze S_d, przyporządkowującą masę rzędu k^{-1} dla każdego wektora jednostkowego

$$\frac{X_{i_1}}{\|X_{i_1}\|},\ \ldots,\ \frac{X_{i_k}}{\|X_{i_k}\|}. \tag{33}$$

Całą opisaną procedurę można najprościej przeprowadzić w układzie współrzędnych biegunowych w następujący sposób: $\rho=(|R_{1t}|,\ldots,|R_{nt}|)$ oraz $\Theta=\theta(R)=(\theta_1(R),\ldots,\theta_n(R))$, przy czym $\theta_i(R)$ jest wektorem o $(d-1)$ elementach. W takim przypadku Γ może być estymowana poprzez:

$$\Gamma=\int_{\Omega_d}\xi(x,\vartheta)\,d\Phi_n(\vartheta), \tag{34}$$

gdzie:

$$x=\left(r\prod_{i=1}^{d-1}\sin\varphi_i, r\prod_{i=1}^{d-2}\sin\varphi_i\cos\varphi_{d-1},\ldots,r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, r\cos\varphi_1\right), \tag{35}$$

$$\xi(x,\vartheta)=|x|^{\alpha_n}\left|\cos\varphi_1\cos\vartheta_1+\sum_{i=2}^{d-1}\cos\varphi_i\cos\vartheta_i\prod_{k=1}^{i-1}\sin\varphi_k\sin\vartheta_k+\prod_{i=1}^{d-1}\sin\varphi_i\sin\vartheta_i\right|^{\alpha_n},$$

$$\Omega_d=[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi]; \tag{36}$$

α_n jest estymatorem parametru α, który może być określony w sposób przedstawiony w [18], s. 359; $\Phi_n(\vartheta)$ jest estymatorem funkcji rozkładu Γ na zbiorze Ω_d zdefiniowanym następująco:

$$\Phi_n(\vartheta) = \varphi_n(\vartheta)\Phi_n(\Pi), \tag{37}$$

gdzie:

$$\Pi = (\pi, \ldots, \pi, 2\pi) \in \Omega_d, \quad \vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{d-1}), \quad \varphi_n(\vartheta) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} I_{(\Theta_i \leq \vartheta, \rho_i \geq \rho_{(\mathrm{nik})})}, \tag{38}$$

$$\Phi_n(\Pi) = \frac{k}{n}\rho_{(n-k)}^{\alpha_n}. \tag{39}$$

Główna idea tej metody oparta jest na twierdzeniu Araujo i Gine (zob. [18]), w którym twierdzi się, że rozkład biegunowy zanika wolniej w kierunku tych współrzędnych, w których koncentruje się istotna większość częstotliwości spektralnych.

2.4.2. Estymator DPR

Metoda estymacji miary spektralnej zaproponowana przez Davydova, Paulauskasa i Rackauskasa (w skrócie DPR) jest w swojej istocie podobna do metody RXC [5]. Załóżmy, że losowa próba $X_1, \ldots, X_n$ pochodzi z wielowymiarowego rozkładu α-stabilnego z wektorem przesunięcia m równym zero oraz znormalizowaną symetryczną miarą spektralną Γ oraz że wielkość próby n spełnia warunek

$$n = k^2, \tag{40}$$

dla pewnego całkowitego k. Wtedy dzielimy próbę na k niepokrywających się grup, z których każda zawiera k elementów próby, aby następnie wybrać wektor z największą normą spośród każdej grupy, co prowadzi do uzyskania zbioru k wektorów

$$X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}, \tag{41}$$

estymując następnie Γ poprzez empiryczną miarę opartą na wektorach jednostkowych (33). Estymator

$$\hat{\Gamma}(D) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} I_D\left(\frac{X_{i_j}}{\|X_{i_j}\|}\right) \tag{42}$$

jest estymatorem zgodnym i asymptotycznie normalnym.

2.4.3. Metoda empirycznej funkcji charakterystycznej

Trzecia metoda została opracowana przez Nolana, Panorską oraz McCullocha, którzy zaproponowali dyskretną aproksymację miary spektralnej przy założeniu, że próba pochodzi z rozkładu α-stabilnego z wektorem przesunięcia m równym zero [13]. W metodzie tej, po pierwsze, zakłada się, że wartość parametru stabilności estymuje się za pomocą średniej:

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\hat{\alpha}_j, \tag{43}$$

gdzie $\hat{\alpha}_j$ jest estymatorem tego indeksu, uzyskanym z jednowymiarowej próby $X_{1j},\ldots,X_{nj}$. Po drugie w celu estymacji wykładnika I_α funkcji charakterystycznej (28) znajdujemy

$$\hat{I}_\alpha(t)=-\log\hat{\Phi}_n(t), \tag{44}$$

w którym:

$$\hat{\Phi}_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e^{i\langle t,X\rangle}. \tag{45}$$

Dla punktów $t_1,\ldots,t_k\in S^D$, wielkość

$$\hat{I}_{ECF}=(\hat{I}_n(t_1),\ldots,\hat{I}_n(t_k))' \tag{46}$$

jest empirycznym estymatorem I_α. Jeżeli Γ jest miarą dyskretną, mającą formę:

$$\Gamma(A)=\sum_{j=1}^{k}\delta_{s_j}(A)\chi_j, \tag{47}$$

w której

$$\delta_s(A)=\begin{cases}1, & \text{gdy } s\in A,\\ 0 & \text{w innym przypadku,}\end{cases} \tag{48}$$

($\chi_j>0$, $j=1,2,\ldots,k$), to wyrażenie (30) ma formę $I_\alpha(t)=\omega_{\alpha,1}(\langle t,s_j\rangle)\chi_j$, oraz można estymować $\chi=(\chi_1,\ldots,\chi_k)'$ poprzez rozwiązanie następującego układu równań:

$$I=A\chi, \tag{49}$$

gdzie $I=\hat{I}_{ECF}$ jest estymatorem I_α danym przez (46), A jest macierzą liczb zespolonych $\lfloor a_{ij}\rfloor_{i,j=1,\ldots,k}$, rozmiaru $k\times k$, przy czym

$$a_{ij}=\omega_{\alpha,1}(\langle t_i, s_j\rangle). \tag{50}$$

Jeżeli punkty na sferze S^D wybrane są w sposób zapewniający istnienie macierzy odwrotnej A, wtedy rozwiązanie układu równań (49) ma postać

$$\chi=A^{-1}I. \tag{51}$$

2.4.4. Metoda projekcji

Metoda projekcji została zaproponowana przez McCullocha [9] oraz analizowana w pracy [13]. Idea tej metody jest bardzo podobna do metody empirycznej funkcji charakterystycznej. Główna różnica polega na odmiennym sposobie estymacji wartości I jako estymatora I_α, który uzyskujemy z estymatorów jednowymiarowych rozkładów α-stabilnych, zastosowanych do jednowymiarowej próby

$$\langle X_1, t_j\rangle, \ldots, \langle X_n, t_j\rangle, \qquad j=1, \ldots, k, \tag{52}$$

gdzie $t_1, \ldots, t_j \in S^D$ są odpowiednio wybranymi punktami na sferze jednostkowej. Tak więc dla każdego $t \in R^d$ zmienna losowa $\langle X_1, t\rangle$ jest zmienną jednowymiarową z parametrami danymi przez wyrażenia (22)-(24).

Powyżej określona zmienna losowa ma funkcję charakterystyczną w postaci

$$\Psi(u)=Ee^{iu\langle t,x\rangle}=Ee^{i\langle ut,x\rangle}=\Phi(u,t)=e^{-I_\alpha(ut)}, \tag{53}$$

gdzie I_α jest wykładnikiem charakterystycznym X_j. W następnym kroku estymujemy parametry skali $\hat{\sigma}(t_j)$, parametry skośności $\hat{\beta}(t_j)$ oraz przesunięcia $\hat{\mu}(t_j)$ (jeżeli $\alpha=1$) rozkładów jednowymiarowych odpowiednio do próby (52), przy czym tak uzyskane estymatory wykorzystujemy do estymacji wartości jednowymiarowej funkcji charakterystycznej, postaci

$$\Phi(t)=Ee^{itx}=e^{i\mu t-\sigma^\alpha \omega_{(\alpha,\beta)}(t)}. \tag{54}$$

Następnie obliczamy wartości I_α w punktach $t_1, \ldots, t_k$:

$$\hat{I}_n(t_j)=\begin{cases}\hat{\sigma}^\alpha(t_j)\left(1-i\hat{\beta}(t_j)\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha\neq 1,\\ \hat{\sigma}(t_j)\left(1-i\hat{\mu}(t_j)\right), & \alpha=1.\end{cases} \tag{55}$$

Stąd dokonując projekcji estymowanych wartości I_α na siatce punktów $t_1, \ldots, t_k$, leżących na sferze S^D, uzyskujemy

$$\hat{I}=(\hat{I}_n(t_1),\ldots,\hat{I}_n(t_k))'. \tag{56}$$

Wagi χ_j przyporządkowane dyskretnym wartościom miary spektralnej obliczamy rozwiązując układ równań (49).

3. Harmoniki sferyczne i wielomiany harmoniczne

Harmoniki sferyczne są naturalnym uogólnieniem koncepcji rozwinięcia funkcji $f(x)$ w szereg Fouriera na okręgu – który oznaczymy przez S^1 – na wyższe wymiary. Gdy rozważać będziemy punkty leżące w przestrzeni $R^2\{(x, y): x, y \in R\}$, wtedy operator Laplace'a (laplasjan) przybiera postać [21]:

$$\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{57}$$

Rozważmy dalej współrzędne biegunowe $(r, \theta): r \in R_+$, $\theta \in [0, 2\pi]$, wtedy laplasjan przybiera formę:

$$\Delta_2=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}. \tag{58}$$

Dana funkcja nazywana jest harmoniczną, jeżeli $\Delta_2 f(r, \theta)=0$. Przypuśćmy, że mamy funkcję harmoniczną, o której wiemy, że jest homogeniczna stopnia n. Wtedy zachodzi

$$f(r, \theta)=r^n f(\theta) \tag{59}$$

oraz mamy

$$\Delta_2 f(r, \theta)=n(n-1)r^{n-2}f(\theta)+\frac{1}{r}nr^{n-1}f(\theta)+\frac{1}{r^2}r^n f''(\theta)=0, \tag{60}$$

co implikuje, że $f''(\theta)=-n^2 f(\theta)$. Równanie

$$-n^2=\frac{f''}{f(\theta)},$$

ma rozwiązanie w postaci

$$f(\theta)=Ae^{in\theta}+Be^{-in\theta}. \tag{61}$$

Zdefiniujmy teraz laplasjan na okręgu poprzez

$$\Delta_{2S}=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}. \tag{62}$$

Jest on rotacyjnie niezmienniczy, co oznacza, że jego przestrzenie własne Λ_n są ortogonalne oraz rotacyjnie niezmiennicze. Λ_n jest przestrzenią homogenicznych wielomianów harmonicznych stopnia n, ograniczonych do okręgu. Przestrzeń ta ma dwa wymiary i możemy w związku z tym określić jej okres poprzez:

$$\{(x+iy)^n, (x-iy)^n\}, \tag{63}$$

który, ograniczony do okręgu, jest postaci:

$$\{e^{in\theta}, e^{-in\theta}\}. \tag{64}$$

Stąd można stwierdzić, że szereg Fouriera może być w naturalny sposób otrzymany z laplasjanu. W przypadku gdy rozważać będziemy punkty leżące w przestrzeni $R^3\{(x, y, z): x, y, z\in R\}$, wtedy laplasjan przybiera postać (zob. [21]):

$$\Delta_3=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{65}$$

Przechodząc do współrzędnych sferycznych

$$\{(r, \theta, \phi): r\in R_+,\ \theta\in[0, 2\pi),\ \phi\in[0, \pi]\}, \tag{66}$$

gdzie $x=r\cos\theta\sin\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\phi$, otrzymujemy następującą postać operatora:

$$\Delta_3=\operatorname{cosec}^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\operatorname{ctg}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}+2r\frac{\partial}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}, \tag{67}$$

wielomian n-tego stopnia $p_n(x, y, z)$ wyrażony we współrzędnych sferycznych ma postać $r^n q_n(\theta, \phi)$. Poszukując funkcji własnych operatora możemy napisać:

$$\Delta_3 p_n=$$

$$=\left[\operatorname{cosec}^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\operatorname{ctg}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]r^n q_n(\theta,\phi)+2rnr^{n-1}q_n(\theta,\phi)+$$

$$+r^2n(n-1)r^{n-2}q_n(\theta,\phi)=0,$$

definiując dalej nowy operator, nazwijmy go laplasjanem sferycznym, Δ_{3S}, jako wyrażenie

$$\operatorname{cosec}^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\operatorname{ctg}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}, \tag{68}$$

otrzymujemy:

$$\Delta_{3S}q_n(\theta,\phi)=-n(n-1)q_n(\theta,\phi), \tag{69}$$

gdzie q_n jest funkcją własną tego operatora. Każda funkcja tej postaci, spełniająca powyższe równanie, nazywana jest harmoniką sferyczną. Fakt że operator ten jest grupą abelową, implikuje, że możemy zdefiniować ortogonalną przestrzeń Λ_n o wymiarze $2n+1$, składającą się ze wszystkich homogenicznych wielomianów stopnia n możliwych do uzyskania na sferze $(n-1)$-wymiarowej. Dla ustalonego n jedną z możliwych postaci Λ_n jest

$$\{P_n^m(\cos\phi)e^{in\theta}/\sqrt{2\pi}\}_{-n\leqslant m\leqslant n} \tag{70}$$

podstawiając $q_n=P_n^m(\cos\phi)e^{in\theta}/\sqrt{2\pi}$ do $\Delta_{3S}q_n(\theta,\phi)=-n(n-1)q_n(\theta,\phi)$, oraz nakładając warunek: $P_n^m(1)\neq\pm\infty$, otrzymujemy równanie różniczkowe, identyfikujące tzw. skojarzone funkcje Legendre'a (pierwszego rodzaju) stopnia n i rzędu m. Skojarzone funkcje Legendre'a stanowią uogólnioną postać wielomianów Legendre'a, dla n i m niecałkowitych.

Jedną z postaci wielomianów Legendre'a jest:

$$P_n(\zeta)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{d\zeta^n}(1-\zeta^2)^n. \tag{71}$$

W odróżnieniu od powszechnie znanych szeregów Taylora należą one do klasy wielomianów ortogonalnych, co zapewnia spełnienie następujących tożsamości:

$$\int_{-1}^{1}P_i(\zeta)P_j(\zeta)d\zeta=\begin{cases}0, & \text{dla } i\neq j,\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{dla } i=j\neq 0,\\ \pi, & \text{dla } i=j=0.\end{cases} \tag{72}$$

Pierwsze trzy wielomiany Legendre'a rzędu pierwszego mają postać

$$P_0(\zeta)=1, \quad P_1(\zeta)=\zeta, \quad P_2(\zeta)=\frac{1}{2}(3\zeta^2-1).$$

Do wyznaczenia kolejnych wielomianów można użyć następującego wzoru rekurencyjnego:

$$P_n(x)=xP_{n-1}(x)+\frac{n}{n+1}\left(xP_{n-1}(x)-P_{n-2}(x)\right). \tag{73}$$

Skojarzone funkcje Legendre'a definiuje się w następującej postaci wielomianowej:

$$P_n^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x), \tag{74}$$

gdzie $P_n(x)$ zdefiniowane jest jak wyżej.

Jak wynika z twierdzenia Steina-Weissa, każdy wielomian stopnia n, określony na sferze, może być wyrażony jako suma homogenicznych wielomianów sferycznych (harmonik sferycznych) co najwyżej stopnia n [14]. Konstrukcja ta stosowana powszechnie jako analiza fourierowska (dla $n=2$) może być rozszerzona na sferę o dowolnym rozmiarze. Mamy wówczas zdefiniowaną następującą postać harmonicznych sferycznych:

$$Y_n^m(\theta,\phi)=X_n^m(\theta)e^{im\phi}, \tag{75}$$

gdzie:

$$X_n^m(\theta)=(-1)^m\left[\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{1/2}P_n^m(\cos\theta), \tag{76}$$

w którym $P_n^m(\cos\theta)$ to oczywiście skojarzona funkcja Legendre'a, a kąty θ, ϕ, stanowią odpowiedniki szerokości i długości na sferze S^2.

4. Estymacja miary spektralnej za pomocą sferycznej analizy harmonicznej

4.1. Funkcje zonalne

TWIERDZENIE 1[1] (laplasjan na S^D). *Rozważmy okrąg S^1 z układem współrzędnych $\varphi\in(0, 2\pi)$, wtedy jakikolwiek punkt na $S^1_*=S^1-\{(1, 0)\}$ ma współrzędne* $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

[1] Zob. M. Takeuchi, *Modern Spherical Harmonics*, vol. 135 of Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

Jeżeli $f: S^1_* \to C$, to w tym układzie współrzędnych

$$\Delta_{S^1} f = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \tag{77}$$

Dla $D \geqslant 2$ niech $S^D_* = S^D \setminus (R^{D-1} \times [0, \infty) \times \{0\})$. Zdefiniujmy dyffeomorfizm $S^{D-1}_* \times (0, \pi) \to S^D_*$

$$(s, \phi) \to [\cos(\phi), \sin(\phi) \cdot s].$$

Mamy wtedy następującą formułę, definiującą laplasjan na sferze S^D:

$$\Delta_{S^D} f = \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + (D-1) \operatorname{ctg}(\phi) \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{1}{\sin(\phi)^2} \Delta_{S^{D-1}} f. \tag{78}$$

Laplasjan Δ kumutuje z izometrycznym G-działaniem dla wszystkich $g \in G$,

$$\Delta(g \cdot \phi) = g \cdot (\Delta \phi). \tag{79}$$

Niech $\Lambda = (\lambda \in C, \ -\lambda$ jest wartością własną $\Delta)$ dla każdego $\lambda \in \Lambda$, niech

$$V_\lambda = \phi \in \{C^\infty(S^{D-1}); \ \Delta \phi = -\lambda \phi\} \tag{80}$$

będzie odpowiednią przestrzenią własną. Stąd V_λ jest G-podprzestrzenią inwariantą. Niech $e = (1, 0, \ldots, 0) \in S^{D-1}$. Zdefiniujmy zbiór ortogonalnych transformacji R^D względem osi e poprzez:

$$G_e = \{g \in G; \ g \cdot e = e\}. \tag{81}$$

Funkcja

$$\xi \in C^\infty(S^{D-1}) \tag{82}$$

nazywana jest funkcją zonalną względem G oraz punktów $e \in S^{D-1}$. Jest to funkcja inwariantna względem działania G_e. Możemy formalnie określić to następująco: dla jakiejkolwiek G_e-podprzestrzeni inwariantnej $V \subset C^\infty(S^{D-1})$ jest

$$Z_e(V) = \{\xi \in \mathrm{V}; \ \forall g \in G_e, \ g \cdot \xi = \xi\}. \tag{83}$$

Stąd można stwierdzić, że element należący do $C^\infty(S^{D-1})$ jest funkcją ciągłą, która jest rotacyjnie inwariantna wokół osi e. Funkcja zonalna musi mieć postać

$$\xi(x_1, x_2, \ldots, x_D) = \xi_1(x_1), \tag{84}$$

gdzie $\xi_1 : [-1, 1] \to C$.

Dla dowolnego $r>0$, niech $B(e, r)$ będzie kulą o promieniu r wokół e w przestrzeni S^{D-1}.

TWIERDZENIE 2 (lemat Schura[2]). *Niech V będzie zespoloną przestrzenią Banacha z niezredukowanym G-modułem. Jeśli $\phi: V \to V$ jest C-liniowym ciągłym odwzorowaniem kumutującym z G-działaniem, to ϕ jest multiplikatywny przez liczbę.*

Rozważmy D-torus T^D z określoną inwariantną metryką standardową. Funkcje własne laplasjanu Δ są periodycznymi funkcjami, mającymi formę

$$\zeta_n(x) = \exp 2\pi i \cdot \langle n, x \rangle, \tag{85}$$

z $n \in \hat{T}^D \cong Z^D$, gdzie $x \in [0, 1)^D$, a $[0, 1)^D$ jest identyfikowane z T^D. Te funkcje własne tworzą ortonormalną bazę dla $L^2(T^D)$.

TWIERDZENIE 3. *Jeśli $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to V_{λ_1} oraz V_{λ_2} są ortgonalne. Możemy więc napisać*[3]: $L^2(S^{D-1}) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$.

Definicja. Jeśli $\eta: S^{D-1} \times S^{D-1} \to C$, to mówimy, że η jest G-ekwiwariantny, jeśli dla $\sigma, s \in S^{D-1}$ oraz $g \in G$:

$$\eta(g \cdot \sigma, g \cdot s) = \eta(\sigma, s). \tag{86}$$

Stąd G działa izometrycznie i przechodnio na S^{D-1}. Można więc powiedzieć, że jest to równoważne stwierdzeniu, iż $\eta(s, \sigma)$ jest funkcją tylko iloczynu wewnętrznego $\eta\langle s, \sigma \rangle$.

Jeśli η jest G-ekwiwariantny, $\phi: S^{D-1} \to C$, oraz obydwie funkcje są H-całkowalne, to możemy zdefiniować splot $\eta * \phi: S^{D-1} \to C$ poprzez

$$(\eta * \phi)(s) = \int_{S^{D-1}} \eta(s, \sigma)\phi(\sigma) dH[\sigma]. \tag{87}$$

Funkcje własne laplasjanu $\{\zeta_n; n \in Z^D\}$, na podstawie klasycznej analizy harmonicznej, spełniają zależność

$$\left(\sum_{n \in Z^D} a_n \zeta_n(x)\right) * \left(\sum_{n \in Z^D} b_n \zeta_n(x)\right) = \sum_{n \in Z^D} (a_n \cdot b_n)\zeta_n(x). \tag{88}$$

Podobna formuła istnieje w przypadku sferycznych harmonicznych funkcji zonalnych.

---

[2] Zob. T. Brocker, E. Dieck, *Reprezentation of Compact Lie Groups*, Springer, New York 1985.

[3] Dowód można znaleźć na przykład w: F.M. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, New York 1983.

4.2. Splot na sferze[4]

TWIERDZENIE 4. *Niech* $\eta: S^{D-1} \times S^{D-1} \to C$ *będzie G-ekwiwariantny. Ustalmy* $\lambda \in \Lambda$ *oraz* $\zeta \in Z_e(V_\lambda)$ *oraz zdefiniujmy stałą wartość zespoloną:*

$$A_\lambda = \frac{(\eta * \zeta)(e)}{\zeta(e)}. \tag{89}$$

Wtedy dla jakiegokolwiek $\phi \in V_\lambda$,

$$\eta * \phi = A_\lambda \cdot \phi. \tag{90}$$

Niech $T_\eta: L^\infty(S^{D-1}) \to L^\infty(S^{D-1})$ będzie zdefiniowany poprzez $T_\eta(\phi) = \eta * \phi$.

TWIERDZENIE 5 (pomocnicze). T_η *kumutuje z G-działaniem, dla wszystkich* $g \in G$, *wtedy*

$$T_\eta(g \cdot \phi) = g \cdot T_\eta(\phi). \tag{91}$$

Dla dowolnego $\sigma \in S^{D-1}$,

$$T_\eta(g \cdot \phi)(\sigma) = (\eta * (g \cdot \phi))(\sigma) = \int_{S^{D-1}} \eta(\sigma, s) \phi(g \cdot s) dH(s) =$$

$$= \int_{S^{D-1}} \eta(\sigma, g^{-1} \cdot s') \phi(s') dH(s') = \qquad (s' := g \cdot s)$$

$$= \int_{S^{D-1}} \eta(g \cdot \sigma, s') \phi(s') dH(s') = \qquad (\eta \text{ jest } G\text{-ekwiwariantny})$$

$$= (\eta * \phi)(g \cdot \sigma) = g \cdot (\eta * \phi)(\sigma).$$

TWIERDZENIE 6. T_η *kumutuje z* Δ.

Dla każdego $s \in S^{D-1}$ zdefiniujmy $\eta_s: S^{D-1} \to C$ poprzez $\eta_s(\sigma) = \eta_s(s, \sigma) = \eta_s(\sigma, s)$. Wtedy

$$(\eta * \phi)(\sigma) = \int_{S^{D-1}} \eta(\sigma, s) \cdot \phi(s) dH(s) = \int_{S^{D-1}} \phi(s) \eta_s(\sigma) dH(s).$$

[4] Ta część rozdziału została opracowana na podstawie [15].

Stąd

$$\Delta(\eta * \phi)(\sigma) = \Delta \int_{S^{D-1}} \phi(s) \cdot \eta_s(\sigma) dH(s) = \int_{S^{D-1}} \phi(s) \cdot \Delta\eta_s(\sigma) dH(s), \tag{92}$$

ponieważ Δ jest operatorem liniowym.

TWIERDZENIE 7. $\Delta(\eta_s)(\sigma) = \Delta\eta_s(s)$.

Znajdujemy $g \in G$, taki że $g \cdot \sigma = s$ i $g \cdot s = \sigma$. Stąd dla jakiegkolwiek $\sigma \in S^{D-1}$,

$$\eta_\sigma(\sigma) = \eta(\sigma, \sigma) = \eta(g \cdot \sigma, g \cdot \sigma) = \eta(s, g \cdot \sigma) = \eta_s(g \cdot \sigma) = (g \cdot \eta_s)(\sigma).$$

Innymi słowy, $\eta_\sigma = (g \cdot \eta_s)$. Stąd $\Delta\eta_\sigma = \Delta(g \cdot \eta_s) = g \cdot (\Delta\eta_s)$. W szczególności

$$\Delta\eta_\sigma(s) = g \cdot (\Delta\eta_s)(s) = \Delta\eta_s(g \cdot s) = \Delta\eta_s(\sigma).$$

Na tej podstawie wyrażenie (91) można zapisać poprzez:

$$\int_{S^{D-1}} \phi(s) \cdot \Delta\eta_\sigma(s) dH(s).$$

Dalej mamy

$$\int_{S^{D-1}} \phi(s) \cdot \Delta\eta_\sigma(s) dH(s) = \int_{S^{D-1}} \Delta\phi(s) \cdot \eta_\sigma(s) dH(s) = \int_{S^{D-1}} \eta(\sigma, s) \cdot \Delta\phi(s) dH(s) =$$

$$= \eta * (\Delta\phi)(\sigma).$$

Wynika to z twierdzenia 6, gdyż T_η musi być inwariantny dla wszystkich przestrzeni własnych Δ. Innymi słowy, dla wszystkich $\lambda \in \Lambda$, V_λ jest inwariantna względem T_η.

Z twierdzenia 6 wynika, że odwzorowanie ograniczone $(T_\eta)|_{V_\lambda} : V_\lambda \to V_\lambda$ jest izomorfizmem liniowych G-modułów. Stąd działa nieredukowalnie na V_λ (wynika to z lematu Schura), gdyż T_η musi działać na V_λ poprzez mnożenie skalarne. Stąd istnieje pewien $A_\lambda \in C$, taki że $\phi \in V_\lambda$, dla którego

$$T_\eta(\phi) = A_\lambda \cdot \phi.$$

Inaczej można powyższe zapisać w posatci $\eta * \phi = A_\lambda \cdot \phi$. W szczególności jeśli $\zeta \in Z_e(V_\lambda)$, to $\eta * \zeta = A_\lambda \cdot \zeta$; Stąd musi zachodzić

$$A_\lambda = \frac{\eta * \zeta(e)}{\zeta(e)}. \tag{93}$$

TWIERDZENIE 8. *Niech $\zeta \in Z_e(V_\lambda)$ będzie zonalną funkcją własną, znormalizowaną w taki sposób, by $\|\zeta\|_2 = 1$. Zdefiniujmy $Z: S^{D-1} \times S^{D-1} \to C$ poprzez wyrażenie*

$$Z(\sigma, s) = \zeta(g_\sigma^{-1} \cdot s), \tag{94}$$

gdzie $g_\sigma \in G$ jest jakimkolwiek elementem, takim że $g_\sigma \cdot e = \sigma$. Wtedy Z jest funkcją dobrze zdefiniowaną, niezależną od wyboru g_σ, oraz jest także G-ekwiwariantna. Zdefiniujmy dalej $P_\lambda: L^2(S^{D-1}) \to L^2(S^{D-1})$ poprzez

$$P_\lambda(\phi) = \zeta(e) \cdot (Z * \phi). \tag{95}$$

Wtedy P_λ jest ortogonalnym rzutem z $L^2(S^{D-1})$ na przestrzeni własnej V_λ.

Jeśli $g_1, g_2 \in G$ są takie, że spełniają zależności $g_1 e = g_2 e = \sigma$, to $g_1^{-1} g_2 \cdot e = e$. Stąd $g_1^{-1} g_2 \in G_e \cdot \zeta$ jest funkcją zonalną wokół e, zatem

$$\zeta(g_1^{-1} \cdot s) = \zeta(g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot g_2^{-1} \cdot s) = \zeta(g_1^{-1} \cdot s)$$

(dowód ekwiwariantności).

Niech $\sigma, s \in S^{D-1}$ oraz niech $h \in G$, ponieważ $g_{(h \cdot \sigma)} = h \cdot g_\sigma$, więc

$$Z(h \cdot \sigma, h \cdot s) = \zeta(g_{(h \cdot \sigma)}^{-1} \cdot h \cdot s) = \zeta((h \cdot g_\sigma)^{-1} \cdot h \cdot s) =$$

$$= \zeta(g_\sigma^{-1} \cdot h^{-1} \cdot h \cdot s) = \zeta(g_\sigma^{-1} \cdot s) = Z(\sigma, s)$$

(dowód rzutu ortogonalnego).

Ponieważ P_λ jest zdefiniowany poprzez splot, więc jest operatorem liniowym. Wystarczy wykazać, że P_λ określa V_λ oraz $V_\lambda^\perp$. Jeśli $\phi \in V_\lambda$, to na podstawie twierdzenia 4 mamy:

$$Z * \phi = \frac{(Z * \zeta)(e)}{\zeta(e)} \cdot \phi.$$

Zatem $P_\lambda(\phi) = (Z * \zeta)(e) \cdot \phi$, wystarczy więc wykazać, że $(Z * \zeta)(e) = 1$. Ale

$$(Z * \zeta)(e) = \int_{S^{D-1}} Z(e, s) \zeta(s) dH(s) =$$

$$= \int_{S^{D-1}} \zeta(g_e^{-1} \cdot s) \cdot \zeta(s) dH(s) =$$

$$= \int_{S^{D-1}} \zeta(s) \cdot \zeta(s) dH(s) =$$

$$= \|\zeta\|_2^2 = 1.$$

Innymi słowy, jeśli $\phi \in V_\lambda^\perp$, to dla wszystkich $s \in S^{D-1}$,

$$\int_{S^{D-1}} \zeta(g_e^{-1} \cdot s) \cdot \zeta(s) dH(s)$$

$$(Z * \phi)(s) = \int_{S^{D-1}} \zeta(g_e^{-1} \cdot s) \cdot \phi(s) dH(s) =$$

$$= \int_{S^{D-1}} (g_e^{-1} \cdot \zeta) \cdot \phi(s) dH(s) =$$

$$= \langle g_e^{-1} \cdot \zeta, \phi \rangle = 0,$$

ponieważ $g_e^{-1} \cdot \zeta \in V_\lambda \perp \phi$.

TWIERDZENIE 9. *Wszystkie wartości własne* Δ na S^{D-1} *mają formę*

$$\lambda_N = N \cdot (N + D - 2), \tag{96}$$

dla dowolnego $N \in \mathrm{N}$. *Niech* λ_N *będą odpowiednią funkcją własną. Załóżmy, że* ζ_N *jest funkcją zonalną (odpowiednio do* $SO^D(R)$ *oraz e).*

W przypadku gdy $D = 2$, użyjemy pewną stałą normalizacyjną w postaci

$$\zeta_N(\theta) = \cos(N \cdot \theta).$$

Używamy tu układu współrzędnych $\theta \in (0, 2\pi) \to (\cos\theta, \sin\theta) \in S^1$. Jeżeli zapiszemy ζ_N w kartezjańskim układzie współrzędnych (x_1, x_2) na R^D, otrzymujemy wielomiany Czebyszewa w postaci

$$\zeta_N(x_1, x_2) = 2^{N-1} x_1^N + \sum_{n=1}^{N/2} (-1)^n 2^{N-1-2n} \frac{N}{n} \binom{N-n-1}{n-1} x_1^{N-2n}. \tag{97}$$

Dla przypadku $D = 3$wielomianami Legendre'a są ζ_N

$$\zeta_N(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=0}^{N/2} (-1)^n 2^{N-2n} \frac{N}{n} \cdot \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2} + N - n\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}\right] \cdot n! \cdot (N-2n)!} \cdot x_1^{N-2n}. \tag{98}$$

Dla $D \geqslant 4$ niech $\nu = \frac{D-2}{2}$. Dla jakiegokolwiek $N \in \mathrm{N}$ oraz $n \in \left[0, \frac{N}{2}\right]$ zdefiniujmy współczynniki

$$c_{N;n}^{(v)}=\frac{\Gamma(v+(N-n))}{\Gamma(v)\cdot n!\cdot(N-2n)!},$$

oraz podajmy definicję (N, v) wielomianu Gegenbauera w postaci

$$C_N^{(v)}(x)=\sum_{n=0}^{N/2}(-1)^n 2^{N-2n}\cdot c_{N;n}^{(v)}\cdot x^{N-2n}.$$

Niech

$$K_N^{(v)}=\|C_N^{(v)}\|_2=\sqrt{\int\limits_{S^{D-1}}|C_N^{(v)}(x_1)|^2\,dx}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\pi^{(D-1)/4}}{\Gamma(v)}\cdot\sqrt{\sum_{k=0}^{2\cdot[N/2]}(-1)^k\cdot 2^{2N-2k}\cdot\frac{\Gamma\left(N-k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(N-k+\frac{D}{2}\right)}\cdot\left(\sum_{n=0}^{k}c_{N;n}^{(v)}c_{N;(k-n)}^{(v)}\right)}.$$

Załóżmy, że ζ_N mają jednostkową normę. Wtedy ζ_N jest znormalizowanym wielomianem Gegenbauera

$$\zeta_N(x_1, x_2, \ldots, x_D)=\frac{1}{K_N^{(v)}}C_N^{(v)}(x_1).$$

4.3. Sferyczne szeregi Fouriera

TWIERDZENIE 10. *Dla wszystkich $n\in N$ niech $\zeta_n: S^{D-1}\to C$ będzie zonalnym harmonicznym wielomianem zdefiniowanym przez* (95). *Zdefiniujmy $Z_n: S^{D-1}\times S^{D-1}\to C$ poprzez*

$$Z_n(s,\sigma)=\zeta_n(e)\cdot\zeta_n\langle s,\sigma\rangle. \tag{99}$$

Wtedy Z_n jest rotacyjnie ekwiwariantny.

Przypuśćmy teraz, że $\gamma\in L^2(S^{D-1}; C)$. Jeśli $\gamma_n=Z_n*\gamma$, to $\gamma_n\in V_{(\lambda_n)}$ oraz γ ma dekompozycję ortogonalną

$$\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n. \tag{100}$$

Dowód można przeprowadzić, opierając się na twierdzeniach 3 i 8, wykorzystując funkcje zonalne zdefiniowane przez wyrażenie (81a).

TWIERDZENIE 11 (splot na sferze). *Przypuśćmy, że* $\eta : S^{D-1} \times S^{D-1} \to C$ *jest rotacyjnie ekwiwariantny oraz załóżmy, że* $g := \eta * \gamma$. *Jeśli dla wszystkich* $n \in N$ *oraz dla* ζ_n *i* Z_n *zdefiniujemy*

$$g_n := Z_n * g, \qquad A_n := \frac{(\eta * \zeta_n)(e_1)}{\zeta_n(e_1)},$$

to

$$g_n := A_n * \gamma_n. \tag{101}$$

Załóżmy, że γ jest nieznane, ale znamy η i g. Wtedy możemy zrekonstruować γ poprzez wyrażenie

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n} g_n. \tag{102}$$

Jeśli $\gamma \in L^2(S^{D-1})$, to sferyczne współczynniki Fouriera (będące funkcjami) funkcji γ są określone przez $\gamma_n := Z_n * \gamma$ dla $n \in N$. Sferyczne szeregi Fouriera dla γ są wtedy ortogonalną dekompozycją:

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n. \tag{103}$$

Własność ta wynika z twierdzenia 4, a także twierdzeń wcześniejszych.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono przegląd metod statystycznych, służących do szacowania miary spektralnej Γ, określającej strukturę korelacyjną wielowymiarowych α-stabilnych rozkładów prawdopodobieństwa. Zaprezentowano także sposób estymacji miary Γ, w sposób analityczny, poprzez liniową kombinację harmonik sferycznych opisaną w [15] i [16], a także w bardzo podobny sposób w [21]. Metoda ta umożliwia precyzyjniejsze szacowanie tej miary w porównaniu z metodami opisanymi w punkcie 2 opracowania, jednakże możliwości jej implementacji praktycznej w przypadku systemów ekonomicznych o dużej liczbie swobody są ograniczone ze względu na dotychczasowy brak w literaturze odpowiednich algorytmów numerycznych.

Literatura

[1] Abdul-Hamid H., Nolan J.P., *Multivariate Stable Densities as Function of One Dimensional Projection*, Journal of Multivariate Analysis 1998, 67, 1, 80-89

[2] Belkacem L., *How to Select Optimal Portfolio in α-stable Markets*, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique 1997, no. 3100

[3] Cheng B., Rachev S. T., *Multivariate Stable Future Prices*. Mathematical Finance 1995, 5 (2), 133-153

[4] Davydov Yu., Paulauskas V., *On the Estimation of the Parameters of Multivariate Stable Distributions*, Acta Applicandae Mathematicae 1999, 58, 107-124

[5] Davydov Yu., Paulauskas V., Rackauskas A., *More on p-stable Convex Sets in Banach Spaces*, Journal of Theoretical Probability 2000, 13 (1), 39-64

[6] Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. 2, PWN, Warszawa 1978

[7] Hill B.M., *A Simple General Approach to Inference About the Tail of Distribution*, Ann. Statistics 1975, 3, 1163-1174

[8] Levy P., *Theorie des erreurs la loi de Gauss et les exceptionelles*, Bulletin de la Societe de France 1924, 52, 49-85

[9] McCulloch J.H., *Estimation of Bivariate Stable Spectral Densities*, Unpublished Manuscript – preprint, Departament of Economics, Ohio State University 1994

[10] Meerschaert M.M., Scheffler H.P., *Portfolio Modeling with Heavy Tailed Random*, w: *Handbook of Heavy Tailed Distribution in Finance*, ed. S.T. Rachev, Elsevier, Amsterdam 2003

[11] Nolan J.P., *Numerical Computation of Stable Densities and Distributions Functions*, Communications in Statistics. Stochastic Models 1975, 13(4), 759-774

[12] Nolan J.P., Panorska, A.K., *Data Analysis for Heavy Tailed Multivariate Samples*, Communications in Statistics: Stochastic Models 1997, 13(4), 687-702

[13] Nolan J.P., Panorska A.K., McCulloch J.H., *Estimation of Stable Spectral Measure*, Mathematical and Computer Modeling 2001, 34, 1113-1122

[14] Nolan J.P., *Modeling Financial Data With Stable Distribution*, w: *Handbook of Heavy Tailed Distribution in Finance*, ed. S.T. Rachev, Elsevier, Amsterdam 2003

[15] Pivato M., *Analytical Methods for Multivariate Stable Probabilty Distributions*, PhD thesis, University of Toronto, 2001

[16] Pivato M., Seco L., *Estimating the Spectral Measure of Multivariate Stable Distribution via Spherical Harmonics Analysis*, Journal of Multivariate Analysis 2003, 87 (2)
[17] Rachev S.T., Xin H., *Test on Association of Random Variables in the Domain of Attraction of Multivariate Stable Law* Probability and Mathematicale Statistic 1993, 14, 125-141
[18] Rachev S., Mittnik S., *Stable Paretian Models in Finance*, Wiley, Nowy Jork 2000
[19] Samorodnitsky G., Taqqu M.S., *Stable Non-Gausian Random Processes*, Chapman and Hall, New York 1994
[20] Stein E., Weiss G., *Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton NJ 1971
[21] Zaigraev A., *On Asymptotic Properties of Multi-dimensional α-stable Densities*, Preprint Submitted to Elsevier Science 2003
[22] Zolotarev V.M. *On Representation of Densities of Stable Laws by Special Functions*, Theory Probability Applicanae 39, 354-362

APPLICATION OF THE ULTRA – SPHERICAL HARMONIC ANALYSIS FOR DERIVING DENSITY FUNCTIONS OF MULTIVARIATE α-STABLE DISTRIBUTIONS

Summary

In the paper there are discussed the basic properties of uni- and multivariate α-stable distributions. It has been extensively described methods of estimation of the spectral measure, and fundamental characteristics determining multivariate distributions. The attention is concentrated on an analytical method based on abelian harmonic analysis to represent the spectral measure using the spherical harmonics on the sphere.